A COURSE OF MATHEMATICS IN THE MARAT'HA LANGUAGE,

CONSISTING OF

ELEMENTS OF ALGEBRA,
LOGARITHMS,
ELEMENTS OF GEOMETRY,
APPLICATION OF ALGEBRA TO GEOMETRY,
PLANE TRIGONOMETRY,
MENSURATION:

WITH

TABLES OF LOGARITHMS.

TRANSLATED

FROM THE WORKS OF

DR. CHARLES HUTTON,

BY

Captain George Ritso Jervis,

BOMBAY ENGINEERS.

BOMBAY:
1827.

शिक्षामाला

महाराष्ट्र भाषेंत,

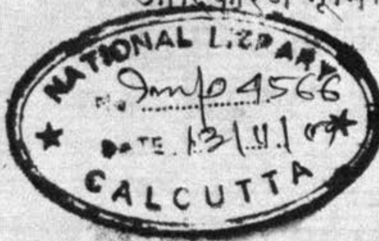
जांत

बीजगणित,
लाग्रतंम,
आदिकारण भूमिति,

बीजभूमिति संगतीकरण,
सरळरेघ त्रिकोणमिति,
भूमापन,

आणि

लाग्रतंमाचे कोष्टक.



याचें मूळ पुस्तक इंग्रेजी भाषेंत आहे त्याचा कवि
डांकतर चार्ल्स हट्टन,
त्या पुस्तकाचें भाषांतर
क्यापटन जार्ज जार्विस साहेब
इंजनेर
याणी महाराष्ट्र भाषेंत केलें



मुंबई:
१८२७.

PART I.

ELEMENTS OF ALGEBRA.

CONTENTS.

प्रथम भाग

बीजगणित

अनुक्रमणिका

श्री

बीज गणित

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी

१ बीज गणित ह्मणजे त्या त्या संख्यांचे अंकांवांचून अक्षरचिन्हें करूनच गणित करण्याची विद्या ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे

२ या विद्ये मध्यें सर्व पदार्थ जातींचे संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात त्या संगातीं जीं कामें करायाचीं आहेत जसें मिळवणी वजाबाकी इत्यादिक तीं सर्व कित्येक स्वल्परूप कार्यप्रकाश्क चिन्हें करून होतात

३ बीजगणिताचे उदाहरणां मध्यें कित्येक पदें व्यक्त ह्मणजे ठाउक किंवा सांगीतलीं आहेत जांस भास्कराचार्यांचे बीज गणितांत रूप ह्मटलें आहे आणि जीं दुसरीं पदें अव्यक्त ह्मणजे ठाउक किंवा सांगीतलीं नाहींत त्यांस त्याच आचार्यांचे बीज गणितांत यावत् तावत् इत्यादिक नावें दिलीं आहेत इंग्रेजी रीतींत व्यक्त संख्या दाखवायास मूळ लिपीचे आरंभींचीं अबक इत्यादिक अक्षरें घेतात आणि अव्यक्त संख्या दाखवायास मूळ लिपीचे शेवटील क्षयज्ञ इत्यादिक अक्षरें घेतात

४ कामें दाखविणारीं चिंन्हें आहेत त्यांस कार्य प्रकाशक चिन्हें ह्मणतात तीं लिहितों

+ हें चिन्ह मिळवणी दाखवितें याठिकाणीं अधीक असें ह्मणतात यास धन चिन्ह ह्मणावें

— हें चिन्ह वजा बाकी दाखवितें या ठिकाणीं उणें असें ह्मणतात यास ऋण चिन्ह ह्मणावें

x हें अथवा • हें चिन्ह गुणाकार दाखवितें या ठिकाणीं गुणिले असें ह्मणतात

÷ हें चिन्ह भागाकार दाखवितें या ठिकाणीं भागिले असें ह्मणतात

√ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखवितें ३√ हें चिन्ह घनमूळ दाखवितें ४√ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दाखवितें याप्रमाणें पुढेंही आणि न√ हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दाखवितें

: : : : हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दाखवितें

= हें चिन्ह बरोबरी दाखवितें या ठिकाणीं बरोबर असें ह्मणतात अथवा ह्मणजे असा शब्द बोलतात

यांचे उपयोगाचीं स्थलें

जसें अ + ब हें दाखवितें किं बचे संख्येस अची संख्या मिळवावी

अ — ब यांतील चिन्ह दाखवितें किं अचे संख्येंतून बची संख्या वजा करावी

अ ∾ ब हें चिन्ह अ आणि ब यां दोन संख्यांची वजा

बाकी

बाकी दाखवितें परंतु या दोन संख्यांत लाहान कोणती आणि मोटी कोणती हें विदित नाहीं

अब अथवा अ×ब किंवा अ•ब हें चिन्ह अ आणि ब या दोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें

अ÷ब अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें किं अची संख्या बचे संख्येनें भागावी

अ : ब : : क : ड हें दाखवितें किं असें अ प्रमाण बला होतें तसें क प्रमाण डला होतें

क्ष = अ - ब + क हें समीकरण आहे तें दाखवितें किं अ आणि ब यांचे संख्यांची वजा बाकी करून त्यांत कची संख्या मिळवावी तें क्षचे बरोबर आहे

$\sqrt{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{२}}$ हें अचें वर्गमूळ दाखवितें $\sqrt[३]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{३}}$ हें अचें घनमूळ दाखवितें $\sqrt[३]{अ^{२}}$ अथवा $अ^{\frac{२}{३}}$ हें अचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितें $\sqrt[म]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{म}}$ हें अचें मसंख्याघातमूळ दाखवितें $\sqrt[म]{अ^{न}}$ अथवा $अ^{\frac{न}{म}}$ हें दाखवितें किं जितकी म संख्या आहे तितकें असंख्येचें घातमूळ काढावें आणि त्या मूळाचा न संख्या घात करावा अथवा अची संख्या $\frac{न}{म}$ याचा भागाकार येईल तितकी अची संख्या वर्गादिकें करून वाढवावी किंवा मूळ काढावें

$अ^{२}$ हें अचा वर्ग दाखवितें $अ^{३}$ हें अचा घन दाखवितें $अ^{४}$ हें अचा चतुर्घात दाखवितें $अ^{न}$ हें नची संख्या आहे तितका

अचा

अच्या घातदाखवितें

$\overline{अ+ब}\times क$ अथवा (अ+ब) क हें अ+ब या संयुक्त पदानें गुणिलें क हें एकपद याचा जो गुणाकार तो दाखवितें $\overline{\quad}$ याप्रमाणें वरती रेघ किंवा ( ) या प्रमाणें दोन बाजूंस दोन कौंस हें चिन्ह वियुक्त पदें परस्पर संबद्ध यामुळें संयुक्त असें दाखवितें

$\overline{अ+ब}\div\overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हें अ+ब भागिला अ−बनें या पासून जो भागाकार तो दाखवितें

$\sqrt{अब+कड}$ अथवा $(अब+कड)^{\frac{१}{२}}$ हें अब+कड या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ दाखवितें आणि $क\sqrt{अब+कड}$ अथवा $क(अब+कड)^{\frac{१}{२}}$ हें अब+कड या संयुक्त पदाचें वर्गमूळ क या एक पदानें गुणून जो गुणाकार तो दाखवितें

$\overline{अ+ब-क}^{३}$ अथवा $(अ+ब-क)^{३}$ हें अ+ब−क या संयुक्त पदाचा घन दाखवितें

३अ हें अची संख्या ३ याणीं गुणावी ऐसें दाखवितें आणि ४(अ+ब) हें अ+ब या संयुक्त पदाचे संख्येस ४ याणीं गुणावें ऐसें दाखवितें आणि यांतील गुणक अंकास वेळाप्रकाशक ह्मणतात - आणि $\frac{३}{४}$क्ष हें तीन चतुर्थांशानीं गुणिला क्ष असें दाखवितें जसें $\frac{३}{४}\times$क्ष अथवा $\frac{३}{४}$क्ष

५ सरूप पदें तींच होत जांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक ए

कच

कच आहे जसें अ आणि ३अ अथवा २अब आणि ४अब अथवा ३अबक आणि -५अबक

६ विरूप पदें तींच होत जांचीं अक्षरें आणि वर्गादिक हीं भिन्न जाति आहेत जसें अ आणि ब अथवा २अ आणि $अ^2$ अथवा ३$अब^2$ आणि ३ अबक

७ एक पद तेंच होय जांत एकच रकम आहे जसें ३अ अथवा ५अब अथवा ६$अबक^2$

८ संयुक्त पदें तींच होत जांत दोन तीन आदिकरून अनेक रकमा परस्पर संबद्ध आहेत जसें अ+ब अथवा २अ-३क अथवा अ+२ब-३क

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्यास द्वियुक्पद ह्मणतात जसें अ+ब जेव्हां त्यांत तीन पदें आहेत तेव्हां त्यास त्रियुक्पद ह्मणतात जसें अ+२ब-३क जेव्हां त्यांत चार रकमा आहेत तेव्हां त्यास चतुर्युक्पद ह्मणतात जसें २अ-३ब+क-४ड आणि याप्रमाणेंच पंचयुक्पद इत्यादिक पुढेंही जाणावीं आणखीही जांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद ह्मणतात

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एक रकम ऋण आहे तेव्हां त्यास धनर्ण पद ह्मणतात जसें अ-२ब

११ धन पद तेंच होय जें मिळवायाचें आहे अथवा ज्यास+ हें अधिक जाति प्रकाशकचिन्ह जोडिलें आहे जसें अ अथवा+अ अथवा अब

वा अब   जेव्हां कोणतेंही पद कोणत्येही चिन्हा वांचून असेल तेव्हां तें धन आहे असें समजावें

१२ ऋण पद तेंच होय जें वजा करायाचें आहे असें −अ अथवा −२अब अथवा −३अब^{२}

१३ सरूप चिन्हें तींच होत जीं सर्व(+) धन किंवा सर्व(−) ऋण आहेत

१४ विरूप चिन्हें तींच होत जांत कित्येक(+) धन आणि कित्येक (−) ऋण अशीं आहेत

१५ कोणत्येही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय जो अंक-त्या पदाचे मागें लिहिला आहे जसें ३अब एथे ३ हा अंक वेळाप्रकाशक आहे

१६ कोणतेंही पद ह्मणजे जसा (अ) याचा वर्ग जसा (अ^{२}) अथवा घन जसा (अ^{३}) अथवा चतुर्घात (अ^{४}) याप्रमाणें पुढेंही

१७ वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादिप्रकाशक तोच अंक होय जो त्या पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूळादिक दाखवितो ह्मणजे २ हा अंक वर्गप्रकाशक जसें अ^{२} आणि ३ हा अंक घनप्रकाशक जसें अ^{३} आणि $\frac{१}{२}$ हा वर्गमूळप्रकाशक जसें अ$^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{अ}$ आणि $\frac{१}{३}$ हा घनमूळप्रकाशक जसें अ$^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{अ}$

१८ अखंड पद तेंच होय जास मूळप्रकाशक (√) नाहीं

असें

असें अ अथवा ३अब

१९ खंड पद अथवा करणी तीच होय ज्याचें मूळ अंशांवांचून केवळ पूर्णांकांतच येत नाहीं जसें २, ३, ५ इत्यादिक यांचें वर्गमूळ केवळ पूर्णांकांतच येतनाहीं करणीस मूळप्रकाशक (√) सर्वदा जोडिला राहातो जसें $\sqrt{२}$ अथवा $\sqrt{\text{अ}}$ अथवा $\sqrt[३]{\text{अ}^{२}}$ अथवा $\text{अब}^{\frac{१}{२}}$

२० कोणत्येही पदाचा व्युत्क्रम तोच होय जें पद उलटें लिहिलें अथवा त्या पदानें १ भागिला जसें अ अथवा $\frac{\text{अ}}{१}$ याचा व्युत्क्रम हा होय जे $\frac{१}{\text{अ}}$ आणि $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ याचा व्युत्क्रम हा होय जे $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$

२१ जीं अक्षरें एक एकपदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इछेस येईल त्या क्रमानें लिहावीं जसें अ आणि-ब यांचा गुणाकार या प्रमाणें लिहितां येतो अब अथवा बअ आणि अ . ब . क यांचा गुणाकार याप्रमाणें लिहितां येतो अबक अथवा अकब अथवा बअक अथवा बकअ अथवा कअब किंवा कबअ यांत कोणताही प्रथम गुणिला ह्मणोन चिंतानाहीं गुणाकार बरोबरच येतो

२२ याप्रमाणें संयुक्त पदाचा वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इछेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या त्यांची किंमत अथवा अर्थ बराबरच आहे जसें ३अ−२अब+४अबक हे असेही

लिहितां

लिहितां येतात ३अ+४अबक−२अब अथवा याप्रमाणें ४अबक+३अ−२अब किंवा याप्रमाणेंही −२अब+४अबक+३अ इत्यादि ह्मणजे हे सर्व ४अबक आणि ३अ यांचे बेरिजेंतून २अब वजा करून जी बाकी राहात्ये तीच बराबर दाखवितात परंतु बहूत करून धनरकम आरंभीं लिहितात अशी चाल आहे

या सर्व वरचा व्याख्या समजावया करितां कित्येक उदाहरणें लिहितो

तीं अशीं किं वेगळाल्ये चिन्हांचे संयुक्त पदांपासून संख्या काढायाचीं

मनांत आण किं पुढील उदाहरणांत अ=६ ब=५ क=४ ड=१ ई=०

उदाहरणें

प्रथम अ^{२}+३अब−क^{२} याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ३६+९०−१६=११०

दुसरें २अ^{३}−३अ^{२}ब+क^{३} याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४३२−५४०+६४=−४४

तिसरें अ^{२}×$\overline{\text{अ+ब}}$−२अबक याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ३६×११−२४०=१५६

चौथें $\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अ+२क}}$ +क^{२} याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\frac{२१६}{१८}$+१६=१२+१६=२८

पांचवें

पांचवें $\sqrt{\text{२अक}+\text{क}^{\text{२}}}$ अथवा $\overline{\text{२अक}+\text{क}^{\text{२}}}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\sqrt{\text{६४}}=\text{८}$

साहावें $\sqrt{\text{क}}+\frac{\text{२बक}}{\sqrt{\text{२अक}+\text{क}^{\text{२}}}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\text{२}+\frac{\text{४०}}{\text{८}}=\text{७}$

सातवें $\frac{\text{अ}^{\text{२}}-\sqrt{\text{ब}^{\text{२}}-\text{अक}}}{\text{२अ}-\sqrt{\text{ब}^{\text{२}}+\text{अक}}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\frac{\text{३६}-\text{१}}{\text{१२}-\text{७}}=\frac{\text{३५}}{\text{५}}=\text{७}$

आठवें $\sqrt{\text{ब}^{\text{२}}-\text{अक}}+\sqrt{\text{२अक}+\text{क}^{\text{२}}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\text{१}+\text{८}=\text{९}$

नववें $\sqrt{\text{ब}^{\text{२}}-\text{अक}+\sqrt{\text{२अक}+\text{क}^{\text{२}}}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\sqrt{\text{२५}-\text{२४}+\text{८}}=\text{३}$

दाहावें $\text{अ}^{\text{२}}\text{ब}+\text{क}-\text{ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १८३

अकरावें $\text{९अब}-\text{१०ब}^{\text{२}}+\text{क}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\text{२७०}-\text{२५०}+\text{४}=\text{२०}+\text{४}=\text{२४}$

बारावें $\frac{\text{अ}^{\text{२}}\text{ब}}{\text{क}}\times\text{ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४५

तेरावें $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{क}}\times\frac{\text{ब}}{\text{ड}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\text{१३}\ \frac{\text{३}}{\text{४}}$

चोदावें $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{क}}-\frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{ड}}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $\text{१}\ \frac{\text{३}}{\text{४}}$

पंधरावें

पंधरावें $\frac{अ^२ब}{क}+ई$ याचीसंख्या काय होत्ये

उत्तर ४५

सोळावें $\frac{अ^२ब}{क}\times ई$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ०

सत्रावें $\overline{ब-क}\times\overline{ड-ई}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १

अठरावें $\overline{अ+ब-क-ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ८

एकुणिसावें $\overline{अ+ब}-क-ड$ याचीसंख्या काय होत्ये

उत्तर ६

विसावें $अ^२क\times ड^३$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १४४

एकविसावें अकड−ड याची संख्या काय होत्ये

उत्तर २३

बाविसावें $अ^३ई+ब^३ई+ड$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर १

तेविसावें $\frac{ब-ई}{ड-ई}\times\frac{अ+ब}{क-ड}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर $१८\frac{२}{३}$

चौविसावें $\sqrt{अ^२+ब^२}-\sqrt{अ^२-ब^२}$ याची संख्या काय होत्ये

उत्तर ४.४९३६२४९

पंचविसावें

पंचविसावें $३अक^{३}+\sqrt[३]{अ^{३}-ब^{३}}$ याची संख्या काय होते

उत्तर २९२-४९७९४२

सव्विसावें $४अ^{२}-३अ\sqrt{अ^{२}-३अब}$ याची संख्या काय होते

उत्तर ७२

मिळवणी

बीज गणितांत मिळवणीतीच होय जे वेगळालीं पदें त्यांचे त्यांचे चिन्हांनी जोडून लिहिणें जेव्हां सरूप पदेंच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एकरकम करावी जसें ३अ+२ब-२अ यांची बेरीज अ+२ब

बीज गणितांत मिळवणीचे रीतीचे प्रकार तीन आहेत

१ वेगळालीं पदें सरूप आणि त्यांचीं चिन्हेंही सरूप आहेत

२ वेगळालीं पदें सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिन्हें विरूप आहेत

३ वेगळालीं पदें विरूप आहेत-यांचीं कामें पुढें सांगतो*

---

* जीं पदें मिळवायाचीं आहेत त्यांची जाति लक्ष्यांत आणिली असता या कामाचा आश्रय आणि त्याप्रकारांचीं कारणें स्वल्पांत समजात येतील ह्मणोन प्रथम प्रकारात दोन पदें आहेत ३अ आणि ५अ आतां एथे एक रकमेंतील अ जी वस्तु निवेदितो तीच वस्तु दुसरे रकमेंतीलही अ निवेदितो तेव्हां जी वस्तु ३ वेळा तीच वस्तु पुनः ५ वेळा एकूण ८ वेळा परंतु वस्तु तीच हा निश्चय जर अ एक रुपया निवेदितो तर ३अ ३ रुपये आणि ५अ ५ रुपये त्यांची बेरीज ८अ ह्मणजे ८ रुपये आली या प्रमाणें-२अब आणि-७अब अथवा कोणतीही वस्तु-२ आणि तीच वस्तु-७ हे दोनी मिळोन तीच वस्तु-९ बेरीज आली

आतां दुसरे प्रकारांत पदें मात्र सरूप आणि चिन्हें विरूप या प्रकाराचें कारण यापासून स्वल्पांत समजांत येईल किं मिळवणी ह्मणजे ही आहे जे वेगळालीं पदें गणित रीतीनें एकत्र मिळवावीं अशीं त्यांचीं चिन्हें +धन आणि-ऋण हीं दाखवितात ह्मणजे मिळवणी आणि बजाबाकी परंतु

प्रथमप्रकार

जेव्हां वेगळालीं पदें सरूप आहेत आणि त्यांचीं चिन्हेंही सरूप आहेत

रीति

सर्व वेळा प्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी नंतर त्या सरूप पदांचें अक्षर पुढें लिहावें आणि प्रकाशक चिन्ह + धन किंवा − ऋण असेल तें आदी जोडावें

जसें ३ अ आणि ५ अ या दोहोंची बेरीज ८ अ होत्ये

" −२ अब आणि −७ अब यांची बेरीज −९ अब होत्ये

" ५ अ + ७ ब आणि ७ अ + ३ ब यांची बेरीज १२ अ + १० ब होत्ये

※ हीं दोन कामें परस्पर विरुद्ध याजकरितां असें आल्यास एकाचा वेळा प्रकाशक दुसर्याचांतो न वजा केला पाहिजे असाकिं त्या पदांची एकच रकम होईल

आतां तिसर्यें प्रकारांत जेव्हां सर्वपदें विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसतें किं अशीं पदें एकत्र रकमें त कदापि येणार नाहींत ह्मणोन त्यांची बेरीज वेगळाल्या रकमा त्यांचे त्यांचे चिन्हांनीं जोडिल्या वांचून दुसर्या रीतीनें कदापि होणार नाहीं असें जर अ एकरुपया निवेदिलो आणि ब एकपैसा तर अ आणि ब यांची बेरीज २ अ किंवा २ ब होणार नाहीं ह्मणजे २ रुपये किंवा पैसे नाहींत परंतु अ + ब हें आहे किं एकरुपया अधिक एकपैसा

या रीतींत मिळवणी हा शब्द चांगल्ये प्रकारें लागत नाहीं एथे जितकें काम करायाचें आहे तितका पूर्ण अर्थ या शब्दापासून मिळत नाहीं तें काम हें आहे किं वेगळालीं पदें एकत्र मिळतील तर मिळवावीं न मिळतील तर त्यांचीं त्यांचीं चिन्हें जोडून अनुक्रमें लिहावीं जेव्हां वेगळाल्ये पदांत कित्येक + धन आणि कित्येक − ऋण आहेत तर त्यांत सरूप पदें असतील तीं पूर्व रीतीनें एकत्र करितां येतील

बीजगणितांत मिळवणी पाहातां कोठे अनेक रकमांची एक रकम करणें कोठे वजा बाकी करणें ऐसें परम आश्चर्य दिसतें परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी ऐसा एथे मनांत आणि त्यावर किमपि आश्चर्य नाहीं ऐसें दिसेल

हीच रीति समजाया करितां दुसरीं उदाहरणें

३ अ
९ अ
५ अ
१२ अ
अ
२ अ
३२ अ

—३ बक्ष
—५ बक्ष
—४ बक्ष
—२ बक्ष
—७ बक्ष
— बक्ष
—२२ बक्ष

बक्षय
२ बक्षय
५ बक्षय
बक्षय
३ बक्षय
६ बक्षय
१८ बक्षय

३ ज्ञ
२ ज्ञ
४ ज्ञ
ज्ञ
५ ज्ञ
१५ ज्ञ

३ क्ष^2+५ क्षय
क्ष^2+ क्षय
२ क्ष^2+४ क्षय
५ क्ष^2+२ क्षय
४ क्ष^2+३ क्षय
१५ क्ष^2+१५ क्षय

२ अक्ष–४ य
४ अक्ष–य
अक्ष–३ य
५ अक्ष–५ य
७ अक्ष–२ य
१९ अक्ष–१५ य

५ क्षय
१४ क्षय
२२ क्षय
१७ क्षय
१ $\frac{1}{2}$ क्षय
$\frac{1}{2}$ क्षय

—१२ य^2
—७ य^2
—२ य^2
—४ य^2
— य^2
—३ य^2

४ अ – ४ ब
५ अ – ५ ब
६ अ – ब
३ अ – २ ब
२ अ – ७ ब
८ अ – ब

३०–१३ क्ष^2–[illegible] क्षय
२७–१० क्ष^2–४ क्षय
१४–१४ क्ष^2–७ क्षय
१०–१६ क्ष^2–५ क्षय
१६–२० क्ष^2 – क्षय

५ क्षय – ३ क्ष + ४ अब
८ क्षय – ४ क्ष + ३ अब
३ क्षय – ५ क्ष + ५ अब
क्षय – २ क्ष + अब
४ क्षय – क्ष + ७ अब

दुसरा प्रकार

जेव्हां वेगळाली पदें सरूप आहेत परंतु त्यांचीं चिन्हें विरूप आहेत

रीति

धन वेळा प्रकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि ऋण वेळा प्रकाशकांची बेरीज घ्यावी नंतर या दोन बेरिजांत जी अधिक असेल त्यांतून उणी बेरीज वजाकरून बाकी राहील तिचे आदीं अधिक बेरिजेचें प्रकाशक चिन्ह जें असेल तें लिहावें आणि त्याचे पुढें या बाकी सरूप पदाचें अक्षर चिन्ह लिहावें

असें +५अ आणि –३अ यांची बेरीज +२अ जाली

" –५अ आणि +३अ यांची बेरीज –२अ जाली

हीच रीति समजावयाकरितां दुसरीं उदाहरणें

–५अ	+३अक्ष^{२}	+८क्ष^{२}–३य
+४अ	+४अक्ष^{२}	–५क्ष^{२}+४य
+६अ	–८अक्ष^{२}	–१६क्ष^{२}+५य
–३अ	–६अक्ष^{२}	+३क्ष^{२}–७य
+ अ	+५अक्ष^{२}	+२क्ष^{२}–७य
+३अ	–२अक्ष^{२}	–८क्ष^{२}–३य
–३अ^{२}	+३ब^{२}य^{३}	+४अब+४
–५अ^{२}	+९ब^{२}य^{३}	–४अब+१२
–१०अ^{२}	–१०ब^{२}य^{३}	+७अब–१४
+१०अ^{२}	–१९ब^{२}य^{३}	+ अब+३
+१४अ^{२}	–२ब^{२}य^{३}	–५अब–१०

−३ अक्ष^{२}	+१०√अक्ष	+३य+४ अक्ष^{२}
+ + अक्ष^{२}	−३ √अक्ष	− य−५ अक्ष^{२}
+५ अक्ष^{२}	+४√अक्ष	+४ य+२ अक्ष^{२}
+६ अक्ष^{२}	−१२√अक्ष	−२य+६ अक्ष^{२}

तिसरा प्रकार

जेव्हां वेगळालीं पदें विरूप आहेत तेव्हां

रीति

पूर्वी सांगीतल्ये दोन प्रकारां प्रमाणें सरूप पदें एकत्र मिळवून लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांच त्यांचे प्रकाशक चिन्हा सह वर्तमान एका पुढें एक जोडून लिहावीं

उदाहरणें

३ क्षय	−६क्षय−१२क्ष^{२}	४ अक्ष−१३०+३ क्ष^{२}
२ अक्ष	−४ क्ष^{२}+३क्षय	५ क्ष^{२} +३अक्ष+६क्ष^{२}
−५ क्षय	+४ क्ष^{२}+२क्षय	७ क्षय−४क्ष +९०
६ अक्ष	−३ क्षय+४ क्ष^{२}	√ क्ष + ४० −६ क्ष^{२}
−२क्षय+८अक्ष	−४क्षय−८ क्ष^{२}	७ अक्ष+८ क्ष^{२}+७क्षय

९क्ष^{२}य^{२}	१४अक्ष−२क्ष^{२}	९−१०√अक्ष−५ य
−७ क्ष^{२}य	५ अक्ष+३क्षय	२क्ष+७√क्षय+५य
+३अक्षय	८ य^{२}−४अक्ष	५य+३√अक्ष−४य
+४क्ष^{२}य	३ क्ष^{२} +२५	१०−४√अक्ष+४य

४ क्ष^{२}य	४√क्ष − ३य	३अ^{२} + ९ + क्ष^{२} − ४
−६ क्षय^{२}	२√क्षय + १४क्ष	२अ − ८ + २अ^{२} − ३क्ष
+३ य^{२}क्ष	३ क्ष + २य	४क्ष^{२} − २अ^{२} + १८ − ७
−७ क्ष^{३}य	−९ − ३ क्षय	−१२ − अ − ३क्ष^{२} − २य

आणखी उदाहरणें

प्रथम अ+ब आणि ३अ−५ब यांची बेरीज काय होईल

दुसरें ५अ−८क्ष आणि ३अ−४क्ष यांची बेरीज काय होईल

तिसरें ६क्ष−५ब+अ+८ आणि −५अ−४क्ष+४ब−३ यांची बेरीज काय होईल

चौथें अ+२ब−३क−१० आणि ३ब−४अ+५क+१० आणि ५ब−क यांची बेरीज काय होईल

पांचवें अ+ब आणि अ−ब यांची बेरीज काय होईल

साहावें ३अ+ब−१० आणि क−ड−अ आणि −४क+२अ−३ब−७ यांची बेरीज काय होत्ये

सातवें

सातवें $३अ^{३}+ब^{२}-क$ आणि $२अब-३अ^{३}+बक-ब$ यांची बेरीज कांय.होस्ये

आठवें $अ^{३}+ब^{२}क-ब^{३}$ आणि $अब^{२}-अबक+ब^{३}$ यांची बेरीज काय होस्ये ·

नववें ९अ−८ब+१०क्ष−६ड−७क+५० आणि २क्ष−३अ−५क +४ब+६ड−१० यांची बेरीज काय होईल

वजा बाकी

जर कोणत्येही पदापासून कांहींही वजा करायाचें आहे तर तें पद वर एक ओळींत लिहि नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्याचे खालीं लिहि असें किं सरूप अक्षरें एकाखालीं एक अशीं येतील

नंतर खालचे ओळींतील चिन्हें + धन आणि − ऋण असतील तीं बदल करून लिहि अथवा बदल केलीं असें मनांत आण नंतर मिळवणीचे रीतीनें तीं सर्व पदें एकत्र कर ※

※ या रीतीस आश्चर्य हेंच आहे किं मिळवणी आणि वजा बाकी यांची जाति आणि कामें परस्पर विरुद्ध आहेत हें त्यांचीं चिन्हें दाखविलात + आणि − कोणतींही ऋण पदें दुसऱ्यें धन पदांशीं मिळवितां असें कार्य होतें किं धन पदांतून या ऋण पदाबरोबर धन पद वजा केलें आतां वजा बाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे याजकरितां धन पद कोणत्येही दुसऱ्ये धन पदांतून वजा करणें हें याचे बरोबर आहे किं ऋण पद धन पदास मेळविलें या रीतीनें एक ऋण पद मेळविणें हें याचे बराबर आहे किं एक धन पद मेळविलें याप्रमाणें कोणत्येही पदाचीं चिन्हें बदल करितां ह्मणजे + धन ठिकाणीं − ऋण आणि − ऋण ठिकाणीं + धन याप्रमाणें करितां त्या पदाची जातीही बदल होत्ये ह्मणजे पूर्वी वजा बाकीचें रूप होतें तें मेळवणीचें रूप आलें

१अ−३ब

उदाहरणें

७अ^{२}-३ब यांतून	९क्ष^{२}-४य+८	८क्षय-३+६क्ष-य
२अ^{२}-८ब हे वजा	६क्ष^{२}+५य-४	४क्षय-७-६क्ष-४य
५अ^{२}+५ब बाकी	३क्ष^{२}-९य+१२	४क्षय+४+१२क्ष+३य
५क्षय-६	४य^{२}-३य-४	-२०-६क्ष-५क्षय
-२क्षय+६	२य^{२}+२य+४	३क्षय-९क्ष+८-२अय
७क्षय-१२	२य^{२}-५य-८	-२८+३क्ष-८क्षय+२अय
८क्ष^{२}य+६	५√क्षय+२क्ष√क्षय	७क्ष^{२}+२√क्ष-१८+३ब
-२क्ष^{२}य+२	७√क्षय+३-२क्षय	९क्ष^{२}-१२+५ब+क्ष^{३}
५क्षय-३०	७क्ष^{२}-२(अ+ब)	३क्षय+२०अ√(क्षय+१
७क्षय-५०	२क्ष^{२}-४(अ+ब)	४क्ष^{३}य^{२}+१२अ√(क्षय+

आणखी उदाहरणें

प्रथम अ+ब यांतून अ-ब हे वजाकर

दुसरें ४अ+४ब यांतून ब+अ हे वजाकर

तिसरें ४अ-४ब यांतून ३अ+५ब हे वजाकर

चौथें ८अ-१२क्ष यांतून ४अ-३क्ष हे वजाकर

पांचवें ३क्ष-४अ-२ब+५ यांतून ८-५ब+अ+६क्ष हे वजाकर

साहावें

साहावें ३अ+ब+क−ड−१० यांतून क+२अ−ड हे वजा कर.

सातवें ३अ+ब+क−ड−१० यांतून ब−१०+३अ हे वजा कर.

आठवें २अब+ब−५क+बक−ब यांतून ३अ^{2}−क+ब^{2} हे वजा कर.

नववें अ^{3}+३ब^{2}क+अब^{2}−अबक यांतून ब^{3}+अब^{2}−अबक हे वजा कर.

दाहावें १२क्ष+६अ−४ब+४० यांतून ४ब−३अ+४क्ष+६ड हे वजा कर.

अकरावें २क्ष−३अ+४ब+६क−५० यांतून ९अ+क्ष+६ब−६क−४ हे वजा कर.

बारावें ६अ−४ब−१२क+१२क्ष यांतून २क्ष−८अ+४ब−५क हे वजा कर.

गुणाकार

गुणाकार

गुणाकारांत गुण्य आणि गुणक यांचीं पदें एकाकी अथवा संयुक्त याअवरून त्याचे अनेक प्रकार आहेत

प्रथम प्रकार

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही पदें एकाकी आहेत

रीति

गुण्य आणि गुणक यांचे वेळा प्रकाशक परस्पर गुणून लिहावे नंतर दोन रकमांचीं जीं अक्षरें आहेत तीं सर्व जोडून त्या गुणाकारा पुढें लिहावींह्मणजे हें सर्व मिळून गुणाकार जाला

गुण्य आणि गुणक यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास गुणाकार (+) धन होतो आणि तीं गुण्यगुणकांचीं चिन्हें विरूप असल्यास गुणाकार (−) ऋण होतो※

※ यारीतीचा खरेपणा यापुढील लिहिल्यावरून समजांत येतो

१ जेव्हां + अ हा + क संगातीं गुणायाचा आहे यांतील अर्थ हा किं + क यामध्यें जितकी संख्या आहे तितक्या वेळा + अ घेतला पाहिजे आतां जा रकमा धन आहेत त्यांची बेरीज धन होते यांतून निघतें किं + अ × + क याचा गुणाकार + अक होतो

२ जेव्हां दोन आदिकरून पदें परस्पर गुणायाचीं आहेत तर कोणत्येही तर्हेनें तीं पदें लिहिलीं तरी गुणाकार बराबर येईल ह्मणजे अ × क आणि क × अ हे दोनही एकच आहेत याजकरितां जेव्हां − अ हा + क याणें गुणायाचा अथवा + क हा − अ याणें गुणावयाचा आहे यांत अर्थ हा आहे किं जितकी संख्या + क यामध्यें आहे तितक्या वेळा − अ घेतला पाहिजे आतां जा रकमा ऋण आहेत त्यांची बेरीज ऋण होते यांतून निघतें किं − अ × + क अथवा + क × − अ हे दोनही गुणाकार − अक होतात

३ जेव्हां − अ आणि − क हे परस्पर गुणायाचे आहेत एथे जी संख्या − क यामध्यें आहे तितक्या वेळा − अ वजा केला पाहिजे परंतु ऋण वजा करणें हें पूर्वीं सांगीतल्ये वजाबाकीवरील टीपीप्रमाणे धनाचे मिळवणी बराबर आहे क × अ अथवा + अक

असें नसेल अ − अ = ० याजकरितां (अ − अ) × − क हेंही = ० कारण कोणत्येही पदानें ० शून्य गुणिल्यास गुणाकार ० शून्य होईल आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ × − क = − अक हें दुसरें प्रकारा प्रमाणें सिद्ध आहे याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम − अ × − क = निश्चय + अक असा किं दोन रकमांची बेरीज ० शून्या बराबर होईल याप्रमाणें − अक + अक = ० शून्य यांतून निघतें किं − अ × − क = + अक आहे

उदाहरणें



उदाहरणें

१०अ	-३अ	७अ	-६क्ष	हे गुण्य
२ब	+२ब	-४क	-४अ	हे गुणक
२०अब	-६अब	-२८अक	२४अक्ष	हा गुणाकार
४अक	९अ^{2}क्ष	-२क्ष^{2}य	-४क्षय	
-३अब	४क्ष	३क्षय^2	- क्षय	
-१२अ^{2}बक	३६अ^{2}क्ष^2	-६क्ष^{2}य^2	४क्ष^{2}य^2	
-३अक्ष	-अक्ष	३क्षय	-५क्षयज्ञ	
४क्ष	-६क	-४	-५अक्ष	

दुसरा प्रकार

जेव्हां गुण्य आणि गुणक यांत एक संयुक्त पद आहे

रीति

संयुक्त पदाची एक रकम एक वेगळाली एक पदानें पूर्व रीती प्रमाणें गुणावी, गुणाकार येईल तो एकापुढें एक त्याचे त्याचे चिन्हानें युक्त करून अनुक्रमानें लिहावा ह्मणजे सर्व मिळोन गुणाकार आला

उदाहरणें

५अ-३क	३अक-४ब	२अ^2-३क+५
२अ	३अ	बक
१०अ^2-६अक	९अ^{2}क-१२अब	२अ^{2}बक-३बक^2+५बक

१२क्ष−२अक	२५क−७ब	४क्ष−ब+३अब
४अ	−२अ	२अब
३क^{२}+क्ष	१०क्ष^{२}−३य^{२}	३अ^{२}−२क्ष^{२}−६ब
४क्षय	−४क्ष^{२}	२अक्ष^{२}

तिसरा प्रकार

जेव्हां गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्त पदेंच आहेत

रीति

गुण्याचा सर्व वेगळाल्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळाल्ये रकमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या अशा किं गुण्याची एक एक रकम सर्व गुणकानें गुणिली जाईल गुणाकार येईल तो एकाखालीं एक अथवा एका पुढें एक अनुक्रमें लिहावा नंतर त्यांत जीं सरूप पदें असतील तीं सर्व एकत्र करावीं ह्मणजे सर्व मिळोन गुणाकार आला

उदाहरणें

अ+ब	३क्ष+२य	२क्ष^{२}+क्षय−२य^{२}
अ+ब	४क्ष−५य	३क्ष−३य
अ^{२}+अब	१२क्ष^{२}+८क्षय	६क्ष^{३}+३क्ष^{२}य−६क्षय^{२}
+अब+ब^{२}	−१५क्षय−१०य^{२}	−६क्ष^{२}य−३क्षय^{२}+६य^{३}
अ^{२}+२अब+ब^{२}	१२क्ष^{२}−७क्षय−१०य^{२}	६क्ष^{३}−३क्ष^{२}य−९क्षय^{२}+६य^{३}

अ+ब

अ+ब	क्ष^2+य	अ^2+अब+ब^2
अ−ब	क्ष^2+य	अ−ब
अ^2+अब	क्ष^4+क्ष^{2}य	अ^3+अ^{2}ब+अब^2
−अब−ब^2	+क्ष^{2}य+य^2	−अ^{2}ब−अब^2−ब^3
अ^2. ※ −ब^2	क्ष^4+२क्ष^{2}य+य^2	अ^3 ※ ※ −ब^3

जेव्हां संयुक्त पदांस परस्पर गुणितात तेव्हां गुणायाचा आरंभ डावेकडून करावा ह्मणजे अंक गणित गुणाकाराचे उलटा आणि गुणाकार लिहिले समयीं पूर्वओळीचें एक स्थान सोडून दुसर्ये ओळीचा आरंभ करावा या प्रमाणें प्रति ओळीस एक एक स्थान सोडून असें पुढेंही ह्मणजे सरूप रकमा एकारवालीं एकयेतुन मिळवणी समयीं श्रम पडणार नाहीं

बहुतेक प्रकारें संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहितात किं संयुक्त पदें सांखळींत लिहून मध्यें गुणाकाराचें चिन्ह मात्र लिहितात

जसें (अ+ब)×(अ−ब)×३अब अथवा या प्रमाणें

$\overline{\text{अ+ब}}\cdot\overline{\text{अ−ब}}\cdot\text{३अब}$

उदाहरणें

प्रथम १० अक यांस २अ याणीं गुण

गुणाकार २०अ^{2}क

दुसरें ३अ^2−२ब यांस ३ब याणीं गुण

गुणाकार ९अ^{2}ब−६ब^2

तिसरें

तिसरें $३अ+२ब$ यांस $३अ-२ब$ याणीं गुण

गुणाकार $९अ^{२}-४ब^{२}$

चवथें $क्ष^{२}-क्षय+य^{२}$ यांस $क्ष+य$ याणीं गुण

गुणाकार $क्ष^{३}+य^{३}$

पांचवें $अ^{३}+अ^{२}ब+अब^{२}+ब^{३}$ यांस $अ-ब$ याणीं गुण

गुणाकार $अ^{४}-ब^{४}$

साहावें $अ^{२}+अब+ब^{२}$ यांस $अ^{२}-अब+ब^{२}$ याणीं गुण

सातवें $क्ष^{२}-२क्षय+५$ यांस $क्ष^{२}+२क्षय-६$ याणीं गुण

आठवें $३अ^{२}-२अक्ष+५क्ष^{२}$ यांस $३अ^{२}-४अक्ष-७क्ष^{२}$ याणीं गुण

नववें $३क्ष^{३}+२क्ष^{२}य+३य^{३}$ यांस $२क्ष^{३}-३क्ष^{२}य-३य^{३}$ याणीं गुण

दाहावें $अ^{२}+अब+ब^{२}$ यांस $अ-२ब$ याणीं गुण

भागाकार

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणाकाराचे उलटा आहे आणि अंकगणिताप्रमाणेंच डावेकडून उजवेकडे भागीतजावें भाज्य निःशेष भागिलाजाईल तर वर सांगीतल्ये रीतीनें भा-

गुन

गून भागाकार लिहावा तसें नहोईल तर व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें वर भाज्य लिहून खालीं भाजक लिहावा त्यांतही होईल तर संक्षेप करावा आणि लिहावा त्याचे प्रकार आहेत ते सांगतो

प्रथम प्रकार

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही एकाकी आहेत

अंक गणिता प्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें भाज्याचे खालीं अशा तर्हेनें दोनही रकमा लिहाव्या नंतर भाज्य भाजकांचा होईल तेवढा संक्षेप करावा त्याची रीति ही आहे किं या दोन रकमांत जीं साधारण अक्षरें असतील तीं दोनही रकमांतून रद करावीं नंतर भाजक वेळाप्रकाशानें भाज्यवेळाप्रकाशक भागावा अथवा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें त्या दोहोंचा दृढभाजकानें भागून संक्षेप करावा

भाज्य आणि भाजक यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागार (−) ऋण होतो*

---

* ह्मणोन पाहा भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणिले असतां भाज्य सिद्ध होतो याजकरितां

१ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार निश्चित (+) धन होईल कारण धन भाजक धनभागाकारानें गुणिला असतां गुणाकार भाज्य धन होतो

२ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (−) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार (+) धन होईल कारण ऋण भाजक × ऋणभागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (+) धन होतो

३ जेव्हां भाज्य आणि भाजक यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे तेव्हां भागाकार निश्चित (−) ऋण होईल कारण धनभाजक × ऋणभागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो अथवा ऋण भाजक × धनभागाकारानें तर गुणाकार भाज्य (−) ऋण होतो

यांतून दिसतें किं भाज्यभाजकांचीं सरूप चिन्हें भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्यभाजकांचीं विरूप चिन्हें भागाकारास (−) ऋण करितात ही सामान्य रीति होय

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम ६अब यांस ३अ याणीं भाग

आतां ६अब÷३अ अथवा ३अ)६अब(अथवा $\frac{६अब}{३अ}$=२ब

दुसरें क÷क= $\frac{क}{क}$ =१ आणि अबक्ष÷बक्षय= $\frac{अबक्ष}{बक्षय}$ = $\frac{अ}{य}$

तिसरें १६$क्ष^{२}$ यांस ८क्ष याणीं भाग

भागाकार २क्ष

चवथें १२$अ^{२}क्ष^{२}$ यांस −३$अ^{२}$क्ष याणीं भाग

भागाकार −४क्ष

पांचवें −१५$अय^{२}$ यांस ३अय याणीं भाग

भागाकार −५य

साहावें −१८$अक्ष^{२}$य यांस −८अक्षज्ञ याणीं भाग

भागाकार $\frac{९क्षय}{४ज्ञ}$

दुसरा प्रकार

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे

रीति

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीती प्रमाणे भाजकानें वेगळा-ल्या भागाव्या

उदाहरणें

प्रथम (अब+$ब^{२}$)÷२ब अथवा $\frac{अब+ब^{२}}{२ब}$ = $\frac{अ+ब}{२}$ = $\frac{१}{२}$अ+ $\frac{१}{२}$ब

दुसरें

दुसरें (१०अब+१५अक्ष)÷५अ अथवा $\frac{\text{१०अब+१५अक्ष}}{\text{५अ}}=$ २ब+३क्ष.

तिसरें (३०अज्ञ–४८ज्ञ)÷ज्ञ अथवा $\frac{\text{३०अज्ञ–४८ज्ञ}}{\text{ज्ञ}}$

भागाकार ३०अ–४८

चवथें ६अब–८अक्ष+अ यांस २अ याणीं भाग

पांचवें ३क्ष^{२}–१५+६क्ष+६अ यांस ३क्ष याणीं भाग

साहावें ६अबक+१२अबक्ष–९अ^{२}ब यांस ३अब याणींभाग

सातवें १०अ^{२}क्ष–१५क्ष^{२}–२५क्ष यांस ५क्ष याणीं भाग

आठवें १५अ^{२}बक–१५अकक्ष^{२}+५अड^{२} यांस–५अक याणीं भाग

नववें १५अ+३अय–१८य^{२} यांस २१अ याणीं भाग

दाहावें –२०ड^{२}ब^{२}+६०अब^{२} यांस–६अब याणीं भाग

तिसरा प्रकार

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही संयुक्त पदेंच आहेत

रीति

१ अंक गणित रीतीनें भाज्यभाजक लिहावे म्हणजे प्रथम भाजक लिहावा नंतर भाज्य लिहावा आतां या दोहोंचे मध्यें एक वांकडी रेघ करावी आणि दोहोंत अक्षरचिन्हें असतील तीं त्यांचे घातापासून उतरतीं लिहावीं

२ भाज्याचें पहिलें पद भाजकाचे पहिल्ये पदानें प्रथमप्रकाराप्रमाणें भागावें आणि भागाकार येईल तो भागाकारस्थळीं लिहावा

३ या भागाकारानें सर्व भाजक पदें गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा

४ नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खालीं घेउन पुनः पूर्व प्रमाणें भागावें या प्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें असें शेवट पर्यंत करावें जसें अंकगणितांत करितात

टीप जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाहीं तर तें पद व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें लिहावें जशी अंकगणितांत बाकी लिहितात

उदाहरणें

$अ-क)\ अ^{३}-४अ^{२}क+४अक^{२}-क^{३}\ (अ^{२}-३अक+क^{२}$

$\underline{अ^{३}-अ^{२}क}$

$※\ -३अ^{२}क+४अक^{२}$

$\underline{-३अ^{२}क+३अक^{२}}$

$※\ +\ अक^{२}-क^{३}$

$\underline{+\ अक^{२}-क^{३}}$

$※\quad ※$

अ−ब)

अ−ब) $अ^{२}$ − २अब + $ब^{२}$ (अ−ब भागाकार
$अ^{२}$ − अब
− अब + $ब^{२}$
− अब + $ब^{२}$
※ ※

अ−२) $अ^{३}$ − ६$अ^{२}$ + १२अ − ८ ($अ^{२}$ − ४अ + ४ भागाकार
$अ^{३}$ − २$अ^{२}$
※ − ४$अ^{२}$ + १२अ
− ४$अ^{२}$ + ८अ
※ + ४अ − ८
+ ४अ − ८
※ ※

अ+ज्ञ) $अ^{३}$ + $ज्ञ^{३}$ ($अ^{२}$ − अज्ञ + $ज्ञ^{२}$ भागाकार
$अ^{३}$ + $अ^{२}$ज्ञ
※ − $अ^{२}$ज्ञ + $ज्ञ^{३}$
− $अ^{२}$ज्ञ − अ$ज्ञ^{२}$
+ अ$ज्ञ^{२}$ + $ज्ञ^{३}$
+ अ$ज्ञ^{२}$ + $ज्ञ^{३}$
※ ※

अ+२क्ष) $अ^{२}$ + ४अक्ष + ४$क्ष^{२}$ (अ + २क्ष भागाकार
$अ^{२}$ + २अक्ष
※ + २अक्ष + ४$क्ष^{२}$
+ २अक्ष + ४$क्ष^{२}$
※ ※

अ+क्ष) अ^{४}−३क्ष^{४} (अ^{३}−अ^{२}क्ष+अक्ष^{२}−क्ष^{३}− $\frac{\text{२क्ष}^{४}}{\text{अ+क्ष}}$ भागाका

अ^{४}+अ^{३}क्ष

※ −अ^{३}क्ष−३क्ष^{४}

−अ^{३}क्ष−अ^{२}क्ष^{२}

※ +अ^{२}क्ष^{२}−३क्ष^{४}

+अ^{२}क्ष^{२}+अक्ष^{३}

※ −अक्ष^{३}−३क्ष^{४}

−अक्ष^{३}− क्ष^{४}

※ −२क्ष^{४}

दुसरीं उदाहरणें

प्रथम अ^{२}+४अक्ष+४क्ष^{२} यांस अ+२क्ष याणीं भाग

उत्तर अ+२क्ष

दुसरें अ^{३}+३अ^{२}ज्ञ+३अज्ञ^{२}−ज्ञ^{३} यांस अ−ज्ञ याणीं भाग

उत्तर अ^{२}−२अज्ञ+ज्ञ^{२}

तिसरें १ यास १+अ याणीं भाग

उत्तर १−अ+अ^{२}−अ^{३} इत्यादि अनंत

चवथें १२क्ष^{४}−१९२ यांस ३क्ष−६ याणीं भाग

उत्तर ४क्ष^{३}+ [illegible] १६क्ष+३२

पांचवें अ^{५}−५अ^{४}ब+१०अ^{३}ब^{२}−१०अ^{२}ब^{३}+५अब^{४}−ब^{५} यांस अ^{२}−२अब+ब^{२} याणीं भाग

उत्तर अ^{३}−३अ^{२}ब+३अब^{२}−ब^{३}

साहावें

साहावें $४८ज्ञ^४ - ९६अज्ञ^३ - ६४अ^३ज्ञ + १५०अ^४$ यांस $२ज्ञ - ३अ$ याणीं भाग

सातवें $ब^६ - ३ब^४क्ष^२ + ३ब^२क्ष^४ - क्ष^६$ यांस $ब^३ - ३ब^२क्ष + ३बक्ष^२ - क्ष^३$ याणीं भाग

आठवें $अ^५ - क्ष^५$ यास $अ - क्ष$ याणीं भाग

नववें $अ^५ + ५अ^४क्ष + ५अक्ष^४ + क्ष^५$ यांस $अ + क्ष$ याणीं भाग

दाहावें $अ^५ + ४अ^४ब - ३२ब^५$ यांस $अ + २ब$ याणीं भाग

अकरावें $२४अ^५ - ब^५$ यांस $३अ - २ब$ याणीं भाग

अपूर्ण

अपूर्ण बीजगणित

अपूर्ण बीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकगणिताप्रमाणेंच आहेत हें पुढें सांगतो या प्रकारांवरून कळेल

प्रथम प्रकार

भागानुबंध पूर्णबीजास विषम अपूर्णबीजाचें रूप द्यावयाची

रीति

पूर्णबीज अपूर्णबीजाचे छेदानीं गुणून त्यागुणाकारांत अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे चिन्हानीं जोडून वर लिहावें आणि खालीं छेद लिहावे म्हणजे विषम अपूर्णबीजाचें रूप जालें

उदाहरणें

प्रथम $\text{३}\frac{\text{४}}{\text{५}}$ आणि $\text{अ}-\frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे

$\text{३}\frac{\text{४}}{\text{५}}=\frac{\text{३}\times\text{५}+\text{४}}{\text{५}}=\frac{\text{१५}+\text{४}}{\text{५}}=\frac{\text{१९}}{\text{५}}$ हें उत्तर

$\text{अ}-\frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}=\frac{\text{अ}\times\text{क्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}}=\frac{\text{अक्ष}-\text{ब}}{\text{क्ष}}$ हें उत्तर

दुसरें $\text{अ}+\frac{\text{अ}^2}{\text{ब}}$ आणि $\text{अ}-\frac{\text{श}^2-\text{अ}^2}{\text{अ}}$ या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे

$\text{अ}+\frac{\text{अ}^2}{\text{ब}}=\frac{\text{अ}\times\text{ब}+\text{अ}^2}{\text{ब}}=\frac{\text{अब}+\text{अ}^2}{\text{ब}}$ हें उत्तर

$\text{अ}-\frac{\text{श}^2-\text{अ}^2}{\text{अ}}=\frac{\text{अ}^2-\text{श}^2+\text{अ}^2}{\text{अ}}=\frac{\text{२अ}^2-\text{श}^2}{\text{अ}}$ हें उत्तर

तिसरें $\text{५}\frac{\text{३}}{\text{७}}$ यांस विषम अपूर्णांक रूप दे

उत्तर $\frac{\text{३८}}{\text{७}}$

चवथें

चवथें $१-\frac{३अ}{क्ष}$ यांस विषम अपूर्णबीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{क्ष-३अ}{क्ष}$

पांचवें $२अ-\frac{३अक्ष+अ^{२}}{४क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{५अक्ष-अ^{२}}{४क्ष}$

साहावें $१२+\frac{४क्ष-१८}{५क्ष}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{६४क्ष-१८}{५क्ष}$

सातवें $क्ष+\frac{१-३अ-क}{क}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{कक्ष+१-३अ-क}{क}$

आठवें $४+२क्ष-\frac{२क्ष^{२}+३अ}{५अ}$ यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूपदे

उत्तर $\frac{२३अ+१०अक्ष-२क्ष^{२}}{५अ}$

दुसरा प्रकार

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप द्यावयाचा

रीति

पूर्णबीज निघावयाकरितां अंशांस छेदानीं भागावे आणि कांहीं बाकी राहिली तर ती भागाकाराचे बाजूस लिहून तिचे खालीं छेद लिहावे

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम $\frac{१६}{३}$ आणि $\frac{अब+अ^{२}}{ब}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\frac{१६}{३}=१६\div३=५\frac{१}{३}$$ हें उत्तर

$$\frac{अब+अ^{२}}{ब}=\overline{अब+अ^{२}}\div ब=अ+\frac{अ^{२}}{ब}$$ हें उत्तर

दुसरें $\frac{२अक-३अ^{२}}{क}$ आणि $\frac{३अक्ष+४क्ष^{२}}{अ+क्ष}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

$$\frac{२अक-३अ^{२}}{क}=\overline{२अक-३अ^{२}}\div क=२अ-\frac{३अ^{२}}{क}$$ हें उत्तर

$$\frac{३अक्ष+४क्ष^{२}}{अ+क्ष}=\overline{३अक्ष+४क्ष^{२}}\div\overline{अ+क्ष}=३क्ष+\frac{क्ष^{२}}{अ+क्ष}$$ हें उत्तर

तिसरें $\frac{३३}{५}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष^{२}}{अ}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

उत्तर $६\frac{३}{५}$ आणि $२क्ष-\frac{३क्ष^{२}}{अ}$

चवथें $\frac{४अ^{२}क्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ^{२}+२ब^{२}}{अ-ब}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

उत्तर $२अक्ष$ आणि $२अ+२ब+\frac{४ब^{२}}{अ-ब}$

पांचवें $\frac{३क्ष^{२}-३य^{२}}{क्ष+य}$ आणि $\frac{२क्ष^{२}-२य^{२}}{क्ष-य}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

साहावें

साहावें $\frac{१०अ^२-४अ+६}{५अ}$ यांस पूर्ण बीज रूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीज रूप दे

सातवें $\frac{१५अ^३+५अ^२}{७अ^३+२अ^२-२अ-४}$ यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे

तिसरा प्रकार

अपूर्ण बीजास समछेद करायाचा

रीति

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्वपदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे आणि समछेद होण्याकरितां सर्वछेद परस्पर गुणावे

जेव्हां सर्व छेद कोणत्याही एक अंकानें अथवा बीजानें भागले जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा नंतर पूर्वप्रमाणें करावें आणि या प्रकरणीं अपूर्णांक गणितांत जा रीती सांगीतल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावे

उदाहरणे

उदाहरणें

प्रथम $\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}$ आणि $\frac{\text{ब}}{\text{ज्ञ}}$ यांस समछेद रूप दे

आतां $\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}$ आणि $\frac{\text{ब}}{\text{ज्ञ}} = \frac{\text{अज्ञ}}{\text{क्षज्ञ}}$ आणि $\frac{\text{बक्ष}}{\text{क्षज्ञ}}$ हें उत्तर

दुसरें $\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}$ $\frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}$ आणि $\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ यांस समछेद रूप दे

आतां $\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}}$ $\frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}$ आणि $\frac{\text{ब}}{\text{क}} = \frac{\text{अबक}}{\text{क्षबक}}$ $\frac{\text{क्ष}^{2}\text{क}}{\text{क्षबक}}$ आणि $\frac{\text{ब}^{2}\text{क्ष}}{\text{क्षबक}}$ हें उत्तर

तिसरें $\frac{\text{२अ}}{\text{क्ष}}$ आणि $\frac{\text{३ब}}{\text{२क}}$ यांस समछेद रूप दे

उत्तर $\frac{\text{४अक}}{\text{२कक्ष}}$ आणि $\frac{\text{३बक्ष}}{\text{२कक्ष}}$

चवथें $\frac{\text{२अ}}{\text{ब}}$ आणि $\frac{\text{३अ+२ब}}{\text{२क}}$ यांस समछेद रूप दे

उत्तर $\frac{\text{४अक}}{\text{२बक}}$ आणि $\frac{\text{३अब+२ब}^{2}}{\text{२बक}}$

पांचवें $\frac{\text{५अ}}{\text{३क्ष}}$ $\frac{\text{३ब}}{\text{२क}}$ आणि ४ड यांस समछेद रूप दे

उत्तर $\frac{\text{१०अक}}{\text{६कक्ष}}$ $\frac{\text{९बक्ष}}{\text{६कक्ष}}$ आणि $\frac{\text{२४कडक्ष}}{\text{६कक्ष}}$

साहावें $\frac{\text{५}}{\text{६}}$ $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि २ब+ $\frac{\text{३अ}}{\text{ब}}$ यांस समछेद रूप दे

उत्तर $\frac{\text{२०ब}}{\text{२४ब}}$ $\frac{\text{१८अब}}{\text{२४ब}}$ आणि $\frac{\text{४८ब}^{2}\text{+७२अ}}{\text{२४ब}}$

सातवें ३ $\frac{\text{२अ}^{2}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{२अ}^{2}\text{+ब}^{2}}{\text{अ+ब}}$ यांस समछेद रूप दे

आठवें

आठवें $\frac{३ब}{४अ^२}$ $\frac{२क}{३अ}$ आणि $\frac{ड}{२अ}$ यांस समछेद रूप दे

चोथा प्रकार

अपूर्ण बीजाचे पदांचा दृढ भाजक काढायाचा

रीति

मोटें पद लाहान पदानें भागावें बाकी राहील तो भाजक कल्पून त्याणें पूर्व भाजकास भागावें या प्रमाणें बाकी ० शून्य पर्यंत करावें शेवटील भाजक दृढ भाजक होय

टीप भाजक पदांमध्यें जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील तीं परस्पर भागून रद करावीं नंतर दृढ भाजक काढावा

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अब+ब^२}{अक^२+बक^२}$ यांचा दृढ भाजक काढ

$$अब+ब^२)\ अक^२+बक^२$$

अथवा

$$अ+ब)\ अक^२+बक^२\ (क^२$$
$$\underline{अक^२+बक^२}$$
$$※\quad ※$$

एथे अ+ब हा दृढ भाजक आहे हें उत्तर

दुसरें

दुसरें $\frac{अ^३ - अब^२}{अ^२ + २अब + ब^२}$ यांचा दृढ भाजक काढ

$अ^२ + २अब + ब^२)\, अ^३ - अब^२ \,(अ$

$अ^३ + २अ^२ब + अब^२$

$※ - २अ^२ब - २अब^२)\, अ^२ + २अब + ब^२$

अथवा $अ + ब)\, अ^२ + २अब + ब^२ \,(अ + ब$

$अ^२ + अब$

$※ \quad अब + ब^२$

$अब + ब^२$

$※ \quad ※$

एथे अ+ब हा दृढ भाजक आहे हें उत्तर

तिसरें $\frac{अ^२ - ४}{अब + २ब}$ यांचा दृढ भाजक काढ

उत्तर $अ - २$

चवथें $\frac{अ^५ - अ^३ब^२}{अ^४ - ब^४}$ यांचा दृढ भाजक काढ

उत्तर $अ^२ - ब^२$

पांचवें $\frac{अ^३क्ष + २अ^२क्ष^२ + २अक्ष^३ + क्ष^४}{५अ^५ + १०अ^४क्ष + ५अ^३क्ष^२}$ यांचा दृढ भाजक काढ

पांचवा प्रकार

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करायाचा

रीति

पूर्व प्रकारा प्रमाणें पदांचा दृढ भाजक काढून त्याणें सर्व पदें भागावीं भागाकार येतील तो संक्षेप जाला

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अब+ब^2}{अक^2+बक^2}$ यांचा संक्षेप कर

$अब+ब^2)\ अक^2+बक^2$

अथवा $अ+ब)\ अक^2+बक^2\ (क^2$

$अक^2+बक^2$

※ ※

एथे अ+ब हा दृढभाजक आहे याजकरितां

$अ+ब)\ \frac{अब+ब^2}{अक^2+बक^2} = \frac{ब}{क^2}$ हा संक्षेप आला हें उत्तर

दुसरें $\frac{क^3-ब^2क}{क^2+२बक+ब^2}$ यांचा संक्षेप कर

$क^2+२बक+ब^2)\ क^3-ब^2क\ (क$

$क^3+२बक^2+ब^2क$

$※-२बक^2-२ब^2क)$

$क+ब)\ क^2+२बक+ब^2\ (क+ब$

$क^2+बक$

$※-बक+ब^2$

$बक+ब^2$

※ ※

एथे क+ब हा दृढभाजक आहे याज करितां

$क+ब)\ \frac{क^3-ब^2क}{क^2+२बक+ब^2} = \frac{क^2-बक}{क+ब}$ हा संक्षेप आला

तिसरें

तिसरें $\frac{क^3-ब^3}{क^3-ब^2क}$ यांचा संक्षेप कर

उत्तर $\frac{क^2+बक+ब^2}{क^2+बक}$

चवथें $\frac{अ^2-ब^2}{अ^4-ब^4}$ यांचा संक्षेप कर

उत्तर $\frac{१}{अ^2+ब^2}$

पांचवें $\frac{अ^2-ब^2}{अ^3-३अ^2ब+३अब^2-ब^3}$ यांचा संक्षेप कर

साहावें $\frac{३अ^5+६अ^4क+३अ^3क^2}{अ^3क+३अ^2क^2+३अक^3+क^4}$ यांचा संक्षेप कर

सातवें $\frac{अ^2-अब}{अ^2+२अब+ब^2}$ यांचा संक्षेप कर

साहावा प्रकार

अपूर्ण बीजाची मिळवणी करायाचा

रीति

अपूर्ण बीज पदांचे छेद सम असल्यास सर्व अंशांची बेरीज घ्यावी आणि त्या बेरिजे खालीं समछेद लिहावे ह्मणजे मिळवणी जाली

ते छेद सम नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगीतल्या प्रमाणें करावें

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

एथे $\frac{अ}{३}+\frac{अ}{४}=\frac{४अ}{१२}+\frac{३अ}{१२}=\frac{७अ}{१२}$ ही बेरीज हें उत्तर

दुसरें

दुसरें $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ $\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ आणि $\frac{\text{क}}{\text{ड}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

एथे $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}+\frac{\text{ब}}{\text{क}}+\frac{\text{क}}{\text{ड}}=\frac{\text{अकड}}{\text{बकड}}+\frac{\text{ब}^{२}\text{ड}}{\text{बकड}}+\frac{\text{बक}^{२}}{\text{बकड}}=\frac{\text{अकड}+\text{ब}^{२}\text{ड}+\text{बक}^{२}}{\text{बकड}}$ ही बेरीज जाली हें उत्तर

तिसरें* $\text{अ}-\frac{\text{३क्ष}^{२}}{\text{ब}}$ आणि $\text{ब}+\frac{\text{२अक्ष}}{\text{क}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

एथे $\text{अ}-\frac{\text{३क्ष}^{२}}{\text{ब}}+\text{ब}+\frac{\text{२अक्ष}}{\text{क}}=\text{अ}-\frac{\text{३कक्ष}^{२}}{\text{बक}}+\text{ब}+\frac{\text{२अबक्ष}}{\text{बक}}=$
$\text{अ}+\text{ब}+\frac{\text{२अबक्ष}-\text{३कक्ष}^{२}}{\text{बक}}$ ही बेरीज हें उत्तर

चवथें $\frac{\text{४क्ष}}{\text{३अ}}$ आणि $\frac{\text{२क्ष}}{\text{५ब}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

उत्तर $\frac{\text{२०बक्ष}+\text{६अक्ष}}{\text{१५अब}}$

पांचवें $\frac{\text{अ}}{\text{३}}$ $\frac{\text{अ}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{अ}}{\text{५}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

उत्तर $\frac{\text{४७अ}}{\text{६०}}$

साहावें $\frac{\text{२अ}-\text{३}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{५अ}}{\text{८}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

उत्तर $\frac{\text{९अ}-\text{६}}{\text{८}}$

सातवें $\text{२अ}+\frac{\text{अ}+\text{३}}{\text{५}}$ आणि $\text{४अ}+\frac{\text{२अ}-\text{५}}{\text{४}}$ याची मि॰ होत्ये

उत्तर $\text{६अ}+\frac{\text{१४अ}-\text{१३}}{\text{२०}}$

आठवें ६अ आणि $\frac{\text{३अ}^{२}}{\text{४ब}}$ आणि $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{३ब}}$ यांची मि॰ काय होत्ये

नववें $\frac{\text{५अ}}{\text{४}}$ $\frac{\text{६अ}}{\text{५}}$ आणि $\frac{\text{३अ}+\text{२}}{\text{७}}$ यांची मिळवणी काय होत्ये

---

* भागानुबंध पूर्णबीजाची मिळवणी करित्ये समयीं ही रीति सर्वांहून उत्तम आहे किं अपूर्णबीजाचे मात्र अवयव समछेद करून मिळवणी करावी नंतर पूर्णबीजाची मिळवणी करून त्या अपूर्ण बीज बेरिजेस जोडून लिहावी

दाहावें $\text{२अ} \quad \frac{\text{३अ}}{\text{८}}$ आणि $\text{३}+\frac{\text{अ}}{\text{६}}$ यांची मिळवणी काय होते

अकरावें $\text{८अ}+\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि $\text{२अ}-\frac{\text{५अ}}{\text{८}}$ यांची मिळवणी काय होते

सातवा प्रकार

एक अपूर्णबीज पदास दुसर्यांतून वजा करायाचा

रीति

अपूर्ण बीज समछेद नसल्यास मिळवणी प्रमाणें त्यास समछेद करावें नंतर अंशांची वजा बाकी करून त्याबाकी खालीं समछेद लिहावे ह्मणजे वजा बाकी जाली

उदाहरणें

प्रथम $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}$ आणि $\frac{\text{४अ}}{\text{७}}$ यांची वजाबाकी कर

एथे $\frac{\text{३अ}}{\text{४}}-\frac{\text{४अ}}{\text{७}}=\frac{\text{२१अ}}{\text{२८}}-\frac{\text{१६अ}}{\text{२८}}=\frac{\text{५अ}}{\text{२८}}$ बाकी हें उत्तर

दुसरें $\frac{\text{२अ}-\text{ब}}{\text{४क}}$ आणि $\frac{\text{३अ}-\text{४ब}}{\text{३ब}}$ यांची वजा बाकी कर

एथे $\frac{\text{२अ}-\text{ब}}{\text{४क}}-\frac{\text{३अ}-\text{४ब}}{\text{३ब}}=\frac{\text{६अब}-\text{३ब}^{\text{२}}}{\text{१२बक}}-\frac{\text{१२अक}-\text{१६बक}}{\text{१२बक}}=$ $\frac{\text{६अब}-\text{३ब}^{\text{२}}-\text{१२अक}+\text{१६बक}}{\text{१२बक}}$ हें उत्तर

तिसरें $\frac{\text{१०अ}}{\text{९}}$ आणि $\frac{\text{४अ}}{\text{७}}$ यांची वजाबाकी कर

चवथें

चवथें $६अ$ आणि $\frac{३अ}{४}$ यांची वजाबाकी कर

पांचवें $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{३}$ यांची वजाबाकी कर

साहावें $\frac{३अ+क}{ब}$ यांतून $\frac{२ब}{क}$ हे वजाकर

सातवें $\frac{४अ+८}{५}$ यांतून $\frac{२अ+६}{९}$ हे वजाकर

आठवें $४अ+\frac{२अ}{क}$ यांतून $२अ-\frac{अ-३ब}{क}$ हे वजाकर

आठवा प्रकार

अपूर्ण बीज पदें परस्पर गुणायाचा

रीति

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदांकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे*

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{८}$ आणि $\frac{२अ}{५}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{अ\times २अ}{८\times ५}=\frac{२अ^२}{४०}=\frac{अ^२}{२०}$ हा गुणाकार हें उत्तर

---

* १ जेव्हां एक अपूर्ण बीज पदाचे अंश आणि दुसर्या अपूर्ण बीज पदाचे छेद यांचा दृढभाजक मिळेल तेव्हां त्याणें संक्षेप करावा

२ जेव्हां अपूर्ण बीजासंगातीं पूर्णबीज गुणायाचें आहे तेव्हां गुणाकार याप्रमाणें होतो पूर्णबीजानें अंश गुणावे अथवा छेद भागावे आणि जर पूर्णबीज आणि छेद एकच सरूप आहेत तर अंशसिद्धच गुणाकार आहे

दुसरें

दुसरें $\frac{अ}{२}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{६अ}{७}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{अ \times ३अ \times ६अ}{२ \times ४ \times ७} = \frac{१८अ^3}{५६} = \frac{९अ^3}{२८}$ हा गुणाकार

तिसरें $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{२अ+क}$ हे परस्पर गुण

आतां $\frac{२अ \times (अ+ब)}{ब \times (२अ+क)} = \frac{२अ^2+२अब}{२अब+बक}$ गुणाकार हें उत्तर

चवथें $\frac{४अ}{३}$ आणि $\frac{६अ}{५क}$ हे परस्पर गुण

पांचवें $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४ब^2}{३अ}$ हे परस्पर गुण

साहावें $\frac{३अ}{ब}$ आणि $\frac{८अक}{ब}$ आणि $\frac{४अब}{३क}$ हे परस्पर गुण

सातवें $३अ+\frac{अब}{२क}$ आणि $\frac{३अ^2}{ब}$ हे परस्पर गुण

आठवें $\frac{२अ^2-२ब^2}{३बक}$ आणि $\frac{४अ^2+२ब^2}{अ+ब}$ हे परस्पर गुण

नववें $३अ$ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे परस्पर गुण

दाहावें $अ+\frac{क्ष}{२अ}-\frac{क्ष^2}{४अ^2}$ यांस $क्ष-\frac{अ}{२क्ष}+\frac{अ^2}{४क्ष^2}$ याणीं गुण

नववा प्रकार

एक अपूर्ण बीज पदास दुसर्यानें भागायाचा

रीति

रीति

एकाचे अंश दुसर्याचे अंशांनीं भागावे आणि छेद छेदांनीं भागावे जर निःशेष भागिले जातील तसें न होईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदलं करून गुणाकार रीतीनें भाज्य भाजक गुणावे※

उदाहरणें

प्रथम $\frac{अ}{४}$ यांस $\frac{३अ}{८}$ याणीं भाग

एथे $\frac{अ}{४} \div \frac{३अ}{८} = \frac{अ}{४} \times \frac{८}{३अ} = \frac{८अ}{१२अ} = \frac{२}{३}$ भागाकार हें उत्तर

दुसरें $\frac{३अ}{२ब}$ यांस $\frac{५क}{४ड}$ याणीं भाग

एथे $\frac{३अ}{२ब} \div \frac{५क}{४ड} = \frac{३अ}{२ब} \times \frac{४ड}{५क} = \frac{१२अड}{१०बक}$ हा भागाकार हें उत्तर

तिसरें $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब}$ यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ याणीं भाग

एथे $\frac{२अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{८अ^२+६अब+ब^२}{९अ^२-४ब^२}$ हा भागाकार हें उत्तर

चवथें $\frac{३अ^२}{अ^३+ब^३}$ यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ याणीं भाग

एथे $\frac{३अ^२}{अ^३+ब^३} \times \frac{अ+ब}{अ} = \frac{३अ^२ \times (अ+ब)}{(अ^३+ब^३) \times अ} = \frac{३अ}{अ^२-अब+ब^२}$ भागाकार हें उत्तर

पांचवें $\frac{३क्ष}{४}$ यांस $\frac{११}{१२}$ याणीं भाग

※ १ जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशांकरितां त्याचे अंश घ्यावे आणि भागाकाराचे छेदांकरितां भाजकाचे अंश घ्यावे

२ जेव्हां अपूर्णबीज कोणत्येही पदानें भागायाचें आहे तेव्हां त्या पदानें अंश भागिले अथवा छेद गुणिले या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो

३ जेव्हां दोनही अंशांचा अथवा दोनही छेदांचा दृढभाजक मिळतो तेव्हां त्याणें संक्षेप करून नंतर पूर्वप्रकारें भागावे

साहावें $\frac{\text{६क्ष}^{2}}{\text{५}}$ यांस ३क्ष याणीं भाग

सातवें $\frac{\text{३क्ष}+\text{१}}{\text{२}}$ यांस $\frac{\text{४क्ष}}{\text{३}}$ याणीं भाग

आठवें $\frac{\text{४क्ष}}{\text{२क्ष}-\text{१}}$ यांस $\frac{\text{क्ष}}{\text{३}}$ याणीं भाग

नववें $\frac{\text{४क्ष}}{\text{५}}$ यांस $\frac{\text{३अ}}{\text{५ब}}$ याणीं भाग

दाहावें $\frac{\text{२अ}-\text{ब}}{\text{४कड}}$ यांस $\frac{\text{५अक}}{\text{६ड}}$ याणीं भाग

अकरावें $\frac{\text{५अ}^{3}-\text{५ब}^{3}}{\text{२अ}^{2}-\text{४अब}+\text{२ब}^{2}}$ यांस $\frac{\text{६अ}^{2}+\text{५अब}}{\text{४अ}-\text{४ब}}$ याणीं भाग

बीज वर्ग घनादि

बीज वर्ग घनादि ह्मणजे सांगीतलें मूळबीज फिरून फिरून त्याच मूळबीजानें गुणून वाढविलें बीज जसें कोणत्येही सांगीतल्ये पदाचा वर्ग काय होतो तो शोधायाचा तसाच घन चतुर्घात इत्यादिक याची रीति पुढें सांगतो

※ सांगीतल्ये मूळास अथवा पदास त्याणेंच प्रकाशक संख्येंत ए-

※ एक अथवा अनेक पदें आहेत त्यांचे गुणाकाराचें वर्गादिक त्या पदांचे वेगळाल्ये त्या त्या वर्गादिकाचे गुणाकारा बरोबर आहे जसा या तीन पदांचे गुणाकाराचा वर्ग $(\text{३}\times\text{५}\times\text{७})^{2}=\text{११०२५}$ आणि $\text{३}^{2}\times\text{५}^{2}\times\text{७}^{2}=\text{९}\times\text{२५}\times\text{४९}=\text{११०२५}$

आणि

क कर्मी वेळा पर्यंत पुनः पुनः गुणावें शेवटील गुणाकार इछिलें वर्ग घनादिक होईल अथवा सांगीतल्ये मूळांत किंवा पदांत अक्षर चिन्हेंच असलीं तर या रीतीनें करावें त्या अक्षर चिन्हाचा मूळप्रकाशक इछिल्ये वर्ग घनादिप्रकाशंकानें गुणून जो गुणाकार येईल तें इछिलें वर्ग घनादिक होईल आणि वेळाप्रकाशकही एकमूळच होय यास्तव त्याचेंही वर्गादि प्रकाशका प्रमाणें वर्गादिक करावें

टीप जेव्हां सांगीतल्ये मूळाचें कार्य प्रकाशक चिन्ह (+) धन आहे तेव्हां त्या पासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन होईल परंतु जेव्हां त्या सांगीतल्ये मूळाचें कार्य प्रकाशकचिन्ह (−) ऋण आहे तेव्हां त्या पासून जें वर्ग घनादिक करायाचें तें वर्गादि प्रकाशक सम असेल त्यास्थळीं धन होईल आणि तो विषम असेल त्या स्थळीं ऋण होईल हें सर्व गुणाकार रीतीनें जाणावें

आणि अपूर्णबीजाचें कोणतेंही वर्गादिक त्या अपूर्णबीजाचे अंशाचें वर्गादिक छेदाचे तशेच वर्गादिकानें भागिलें याचेबरोबर आहे
असा या अपूर्ण बीजाचा घन $\left(\frac{२अ}{अ}\right)^{३} = २^{३} = ८$

$$\text{आणि } \frac{२^{३}अ^{३}}{अ^{३}} = २^{३} = ८$$

आणि एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूलादि परस्पर गुणायाचें आहे तर त्या गुण्य गुणकांचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज घेउन त्या पदावर प्रकाशकस्थळीं लिहावी असें $अ^{३}×अ^{२} = अ^{३+२} = अ^{५}$ $अ^{\frac{१}{२}}×अ^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}} = अ^{\frac{५}{६}}$

तसेंच एकाच पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूलादिक परस्पर भागायाचें आहे तर त्या भाज्य भाजकांचे वर्गादिप्रकाशकांची वजाबाकी करून त्या पदावर प्रकाशक स्थळीं लिहावी असें $अ^{३}÷अ^{२} = अ^{३-२} = अ$ $अ^{\frac{१}{२}}÷अ^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{६}}$

उदाहरणें

उदाहरणें

$अ$ = हें एक मूळ आहे	$अ^{२}$ = हें एक मूळ आहे
$अ^{२}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय	$अ^{४}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
$अ^{३}$ = हा त्याच मूळाचा घन होय	$अ^{६}$ = हा त्या मूळाचा घन होय
$अ^{४}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात	$अ^{८}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात होय
$अ^{५}$ = हा त्या मूळाचा पंचघात	$अ^{१०}$ = हा त्या मूळाचा पंचघात होय
इत्यादि	इत्यादि
$-२अ$ = हें एक मूळ आहे	$-३अब^{२}$ = हें एक मूळ आहे
$+४अ^{२}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय	$+९अ^{२}ब^{४}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
$-८अ^{३}$ = हा त्या मूळाचा घन होय	$-२७अ^{३}ब^{६}$ = हा त्या मूळाचा घन होय
$+१६अ^{४}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात	$+८१अ^{४}ब^{८}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात
$-३२अ^{५}$ = हा त्या मूळाचा पंचघात	$-२४३अ^{५}ब^{१०}$ = हा त्या मूळाचा पंचघात
इत्यादि	इत्यादि
$-\frac{२अक्ष^{२}}{३ब}$ = हें एक मूळ आहे	$\frac{अ}{२ब}$ = हें एक मूळ आहे
$+\frac{४अ^{२}क्ष^{४}}{९ब^{२}}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय	$\frac{अ^{२}}{४ब^{२}}$ = हा त्या मूळाचा वर्ग होय
$-\frac{८अ^{३}क्ष^{६}}{२७ब^{३}}$ = हा त्या मूळाचा घन	$\frac{अ^{३}}{८ब^{३}}$ = हा त्या मूळाचा घन होय
$+\frac{१६अ^{४}क्ष^{८}}{८१ब^{४}}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात	$\frac{अ^{४}}{१६ब^{४}}$ = हा त्या मूळाचा चतुर्घात
इत्यादि	इत्यादि

क्ष − अ = हें एक मूळ आहे

क्ष − अ

क्ष^{२} − अक्ष

− अक्ष + अ^{२}

क्ष^{२} − २अक्ष + अ^{२} = हा त्या मूळाचा वर्ग होय

क्ष − अ

क्ष^{३} − २अक्ष^{२} + अ^{२}क्ष

− अक्ष^{२} + २अ^{२}क्ष − अ^{३}

क्ष^{३} − ३अक्ष^{२} + ३अ^{२}क्ष − अ^{३} = हा त्या मूळाचा घन होय

क्ष + अ = हें एक मूळ आहे

क्ष + अ

क्ष^{२} + अक्ष

+ अक्ष + अ^{२}

क्ष^{२} + २अक्ष + अ^{२} = हा त्या मूळाचा वर्ग होय

क्ष + अ

क्ष^{३} + २अक्ष^{२} + अ^{२}क्ष

+ अक्ष^{२} + २अ^{२}क्ष + अ^{३}

क्ष^{३} + ३अक्ष^{२} + ३अ^{२}क्ष + अ^{३} = हा त्या मूळाचा घन होय

हीं दोन उदाहरणें क्ष−अ आणि क्ष+अ या दोन मूळांचे वर्ग आणि घन दाखवितात

दुसरीं उदाहरणें

प्रथम ३अ^{२} यांचा घन काय होतो

उत्तर २७अ^{६}

दुसरें २अ^{२}ब यांचा चतुर्घात काय होतो

तिसरें −४ अ^{२}ब^{२} यांचा घन काय होतो

चवथें $-\frac{अ^{२}क्ष}{२ब^{२}}$ यांचा चतुर्घात काय होतो

पांचवें अ−२क्ष यांचा पंचघात काय होतो

साहावें २अ^{३} यांचा षड्घात काय होतो

सर ऐसाक न्युटंन यांची द्वियुक्पदाचें वर्गादिक करायाची रीति*

१ वेळाप्रकाशका यांचून पदें करायाची त्यांचा आरंभ द्वियुक् पदाचे प्रथम पदापासून होतो आणि त्यास वर्गादिप्रकाशक असावा तो द्वियुक्पदाच्या इछिल्ये वर्गादीच्या प्रकाशक आहे तोच होय आणि त्याचे पु-

ढील

* यारीतीचें सामान्यतः हें रूप आहे (न) ह्मणजे कोणतीही संख्या (अ+क्ष)^{न}=अ^{न}+न·अ$^{न-१}$क्ष+न·$\frac{न-१}{२}$अ$^{न-२}$क्ष^{२}+न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$अ$^{न-३}$क्ष^{३} इत्यादि

(अ-क्ष)

ढील पदांस वर्गादि प्रकाशक असावा तो हाच प्रतिपदीं अनुक्रमें एक एक उणा करून होतो आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्ये दुसर्ये पदास वर्गादि प्रकाशक असावा तो शून्यापासून ०. १. २. ३ या अनुक्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो तो इछिल्ये वर्गादि प्रकाशका पर्यंत ह्मणजे इछिल्यें वर्गादिकाचें प्रथम पद मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथम पद होईल तें इछिल्ये वर्गादि प्रकाशकानें आणि या श्रेढीचें शेवटील पद त्या मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल तें इछिल्ये वर्गादि प्रकाशकानें परंतु दुसरीं अथवा मध्यपदें मूळ द्वियुक्पदाचे दोन पदांचे गुणाकार होतील अशा रीतीनें किं मूळ द्वियुक्पदाचे पहिल्ये पदास प्रति पदीं वर्गादि प्रकाशक एक एक उणा आणि दुसर्ये पदास वर्गादि प्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत आईल

वेळा

$(अ-क्ष)^{न} = अ^{न} - न \cdot अ^{न-१} क्ष + न \cdot \frac{न-१}{२} अ^{न-२} क्ष^{२} - न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} अ^{न-३} क्ष^{३}$ इत्यादि

टीप प्रत्येक पवरामध्यें येळा प्रकाशकांची बेरीज (२) या संख्येचे प्रत्येक पवरा बराबर आहे जसें १+१=२ हें मूळ अथवा प्रथमपवर १+२+१=४=$२^{२}$ हें वर्गस्थळ अथवा दुसरा पवर १+३+३+१=८=$२^{३}$ हा घन अथवा तिसरा पवर या प्रमाणें पुढेंही जाणावे

अ+ब	$अ^{२}$+२अब+$ब^{२}$	$अ^{३}$+३$अ^{२}$ब+३अ$ब^{२}$+$ब^{३}$
१+१=२	१+२+१=४	१+३+३+१=८

$अ^{४}$+४$अ^{३}$ब + ६$अ^{२}ब^{२}$+४ अ$ब^{३}$+$ब^{४}$

१+४ + ६ + ४ + १=१६

पवर ह्मणजे घात मूळ ह्मणजे एकपवर अथवा एकघात वर्ग ह्मणजे द्विघात घन ह्मणजे त्रिघात याप्रमाणे पुढेंही जाणावें

२ वेळा प्रकाशक काढायाची श्रेढीचे प्रथम पदाचा वेळा प्रकाशक १ आहे दुसर्ये पदाचा वेळा प्रकाशक तो आहे कि जो इछिल्ये वर्गादिकाचा प्रकाशक आहे तिसर्ये पदाच्या वेळाप्रकाशक याप्रमाणें निघतो किं दुसर्ये पदाच्या वेळा प्रकाशक आणि त्याच दुसर्ये पदांतील पहिल्ये अक्षराच्या वर्गादि प्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार दोहोर्नी भागावा भागाकार येईल तो त्या तिसर्ये पदाच्या वेळा प्रकाशक होईल आणि या प्रमाणें पुढेंही ह्मणजे शेवटीं वेळा प्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचे वर्गादि प्रकाशकानें गुणून तो गुणाकार तेंच पद कित्यावें असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदापुढील जवळचे पदाच्या वेळा प्रकाशक होईल यारीतीनें एकापुढें एक अशा सर्व पदांच्या वेळा प्रकाशक निघेल

टीप श्रेढींतील सर्व पदांची संख्या इछिल्ये वर्गादि प्रकाशक संख्येहून एकानें अधिक होईल आणि मूळ द्वियुक्पदांतील दोनही पदें (+) धन आहेत तर श्रेढीचीं सर्व पदें (+) धन होतील परंतु जर त्या मूळ द्वियुक्पदांत दुसरें पद (−) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदें (+) धन होतील आणि सम पदें (−) ऋण होतील याच कारणास्तव तीं सर्व पदें (+) धन (−) ऋण (+) धन (−) ऋण अशा अनुक्रमें होतील पुनः प्रतिपदीं त्या त्या पदांतील अक्षरांचे वर्गादि प्रकाशकांची बेरीज इछिल्ये वर्गादिकाचे प्रकाशका बरोबर आहे आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहोंकडील स्थळीं वर्गादि प्रकाशक बराबर आहेत परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे

आणि

आणि मध्यापासून दोहोंकडील बराबर स्थळीं वेळाप्रकाशकही बराबर आहेत तसें आदीपासून मध्यपर्यंत वेळाप्रकाशक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे तसा तितक्या तितक्या अंतरानें वेळाप्रकाशक मध्यापासून अंत पर्यंत उणा होत जातो

उदाहरणें

प्रथम अ+क्ष याचा पंचघात करायाचा

प्रथम रीतीनें वेळाप्रकाशकावांचून पदें करावीं

अ^{५} अ^{४}क्ष अ^{३}क्ष^{२} अ^{२}क्ष^{३} अक्ष^{४} क्ष^{५}

आणि दुसर्‍ये रीतीनें वेळाप्रकाशक काढावे

१	५	$\frac{५×४}{२}$	$\frac{१०×३}{३}$	$\frac{१०×२}{४}$	$\frac{५×१}{५}$
१	५	१०	१०	५	१

याजकरितां मूळद्वियुग्गणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे

अ^{५}+५ अ^{४}क्ष+१० अ^{३}क्ष^{२}+१० अ^{२}क्ष^{३}+५ अक्ष^{४}+क्ष^{५}

परंतु हें उत्तम आहे किं वेळाप्रकाशक आणि वर्गादिप्रकाशक हे तपशीलावांचून जुळून सर्व पदें एके ओळींत लिहावीं जसें दुसरें उदाहरण पुढें लिहितो

दुसरें अ−क्ष याचा षड्घात करायाचा

अ^{६}−६ अ^{५}क्ष+१५ अ^{४}क्ष^{२}−२० अ^{३}क्ष^{३}+१५ अ^{२}क्ष^{४}−६ अक्ष^{५}+क्ष^{६}

तिसरें अ−क्ष याचा चतुर्घात करायाचा

अ^{४}−४ अ^{३}क्ष+६ अ^{२}क्ष^{२}−४ अक्ष^{३}+क्ष^{४}

आणि

आणि या रीतीनें कोणतेंही वर्गादिक सुखानें एके ओळींत लिहितां येईल

बीज वर्गादि मूळ

बीज वर्गादि मूळ म्हणजे वर्गादिकाची उलट सांगीतल्ये पदापासून त्याचें वर्गादि मूळ काढायाचें तें पद एकाकी अथवा संयुक्त असेल

प्रथम प्रकार

एकाकी पदाचें मूळ काढायाचा

अंक गणित रीतीनें वेळा प्रकाशकाचें मूळ काढावें आणि अक्षर चिन्हाचा वर्गादि प्रकाशक इछिल्ये वर्गादि मूळ प्रकाशकानें भागावा म्हणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचें मूळ होईल नंतर हें मूळ पूर्व वेळा प्रकाशक मूळाशीं ओडिलें असतां इछिलें वर्गादि मूळ होईल*

उदाहरणें

---

* धन (+) पदाचें कोणतेंही सम मूळ (+) धन अथवा (−) ऋण असेल म्हणजे असें $+\text{अ}^2$ याचें वर्गमूळ +अ अथवा −अ असेल कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}=+\text{अ}^2$ आणि $-\text{अ}\times-\text{अ}=+\text{अ}^2$ आहे परंतु कोणत्येही पदाचें विषम मूळ त्या पदाचे चिन्हा प्रमाणें आहे असें $+\text{अ}^3$ याचें घनमूळ +अ आहे आणि $-\text{अ}^3$ याचें घनमूळ −अ आहे कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}\times+\text{अ}=+\text{अ}^3$ आहे आणि $-\text{अ}\times-\text{अ}\times-\text{अ}=-\text{अ}^3$ आहे कोणत्येही पदाचें सममूळ ऋण होत नाहीं कारण $+\text{अ}\times+\text{अ}$ अथवा $-\text{अ}\times-\text{अ}$ हे दोनही $-\text{अ}^2$ होण्यास परम अशक्य

कोणत्येही गुणाकाराचें मूळ त्या गुण्य गुणकांचे वेगळाल्ये मूळांचे गुणाकारा बरोबर आहे आणि अपूर्ण बीजाचे मूळाची इछा असेल तर त्या अंश छेदांचीं वेगळालीं मूळें काढावीं म्हणजे तीं मूळें त्या अपूर्ण बीजाचें इछिलें मूळ होईल

उदाहरणें

प्रथम — $४अ^{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $२अ$

दुसरें $८अ^{३}$ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर $२अ$

तिसरें $\frac{५अ^{२}ब^{२}}{९क^{२}}$ यांचें वर्गमूळ काढ

$\sqrt{\frac{५अ^{२}ब^{२}}{९क^{२}}} = \frac{अब}{३क}\sqrt{५}$ हें उत्तर

चवथें $\frac{१६अ^{४}ब^{६}}{२७क^{३}}$ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर — $\frac{२अब^{२}}{३क}\sqrt[३]{२अ}$

पांचवें $२अ^{२}ब^{४}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $अब^{२}\sqrt{२}$

साहावें $-६४अ^{३}ब^{६}$ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर $-४अब^{२}$

सातवें $\frac{८अ^{२}ब^{२}}{३क^{३}}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\frac{२अब}{क}\sqrt{\frac{२}{३क}}$

आठवें $८१अ^{४}ब^{५}$ यांचें चतुर्घातमूळ काढ

उत्तर $३अब\sqrt[४]{ब}$

नववें $-३२अ^{५}ब^{६}$ यांचें पंचघातमूळ काढ

उत्तर $-२अब\sqrt[५]{ब}$

दुसरा

दुसरा प्रकार

संयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा

याची रीति अंकगणिता प्रमाणें आहे म्हणजे

१ जा पदाचें घातादिक अधिक असेल तें पद प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरतीं अशा रीतीनें सर्व पदें लिहावीं नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकार स्थळीं लिहावें

२ या मूळाचा वर्ग प्रथमपदाखालीं लिहून त्यांतून वजा करावा नंतर नव्ये भाज्याकरितां बाकी जवळ वरचीं दुसरीं दोन पदें घ्यावीं आणि नव्ये भाजकाकरितां मूळाची दुपट करून भाजकस्थळीं लिहावी

३ तो भाज्य भाजकानें भागावा आणि जें येईल तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि भाजकासही जोडावें

४ आतां वाढविला भाजक भागाकार स्थळीं जें आतां नवें लिहिलें त्याणें गुणून गुणाकार भाज्याखालीं लिहावा आणि त्यांतून वजा करावा याप्रमाणें अंक गणित रीतीनें करित जावें

उदाहरणें

प्रथम $अ^{४}-४अ^{३}ब+६अ^{२}ब^{२}-४अब^{३}+ब^{४}$ यांचें वर्गमूळ काढ

$अ^{४}-४अ^{३}ब+६अ^{२}ब^{२}-४अब^{३}+ब^{४}(अ^{२}-२अब+ब^{२}$ हें वर्गमूळ हें उत्तर

$$
\begin{array}{l}
\quad\; \underline{अ^{४}} \\
२अ^{२}-२अब)-४अ^{३}ब+६अ^{२}ब^{२} \\
\qquad\quad \underline{-४अ^{३}ब+४अ^{२}ब^{२}} \\
२अ^{२}-४अब+ब^{२})\;*\;+२अ^{२}ब^{२}-४अब^{३}+ब^{४} \\
\qquad\qquad\quad \underline{+२अ^{२}ब^{२}-४अब^{३}+ब^{४}} \\
\qquad\qquad\qquad *\quad\;\; *\;\; *
\end{array}
$$

दुसरें

दुसरें $अ^४+४अ^३ब+१०अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$ यांचें वर्गमूळ काढ

$अ^४+४अ^३ब+१०अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$ ($अ^२+२अब+३ब^२$ वर्गमूळ हें उत्तर

$अ^४$

$२अ^२+२अब$) $+४अ^३ब+१०अ^२ब^२$

$+४अ^३ब+४अ^२ब^२$

$२अ^२+४अब+३ब^२$) ※ $+६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$

$+६अ^२ब^२+१२अब^३+९ब^४$

※ ※ ※

तिसरें $अ^४+४अ^३+६अ^२+४अ+१$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $अ^२+२अ+१$

चवथें $अ^४-२अ^३+२अ^२-अ+\frac{१}{४}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $अ^२-अ+\frac{१}{२}$

पांचवें $अ^२-अब$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $अ-\frac{ब}{२}-\frac{ब^२}{८अ}-\frac{ब^३}{१६अ^२}$ इत्यादि

तिसरा प्रकार

कोणत्येही वर्गादीचें मूळ काढायाचा

याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे ह्मणजे प्रथम पदाचें सांगीतलें मूळ काढून तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि त्या मूळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथम पदांतून वजा करावें नंतर नव्ये भाज्या करितां वरचें दुसरें पद खालीं घ्यावें आणि नव्ये भाजकाकरितां तें का-

ढिलें

ढिलें मूळ सांगीतल्ये वर्गादि घातांत एक घात कमी पर्यंत वाढवून त्यास सांगीतल्ये वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजक स्थळीं लिहावें आणि या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें भागाकार स्थळीं लिहावें नंतर भागाकार स्थळींचें तें सर्व मूळ सांगीतला वर्गादि घात पर्यंत वाढवून सांगीतल्ये सर्व वर्गादींतून वजा करावें नंतर बाकींचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकार स्थळीं लिहावें आणि तें भागाकार स्थळींचें सगळें मूळ सांगीतल्ये वर्गादि घात पर्यंत वाढवून सांगीतल्ये वर्गादींतून वजा करावें या प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें म्हणजे इछिलें वर्गादि मूळ मिळेल*

उदाहरणें

प्रथम $अ^{४}-२अ^{३}ब+३अ^{२}ब^{२}-२अब^{३}+ब^{४}$ यांचें वर्गमूळ काढ

* जेह्वां सांगीतला घात फार मोठा आहे तेह्वां या रीतीनें तपशील करण्या मुळें फार श्रम पडतो असें कोणाचे मनांत येईल तर कोणे समयीं संयुक्त पदाचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे किं त्यांतील कित्येक सोईचीं पदें घेउन त्यांचीं सांगीतलीं मूळें काढावीं आणि तीं मूळांचीं पदें सुमारानें (+) धन (−) ऋण चिन्हांनीं जोडून लिहावीं नंतर हें मूळ सांगीतल्ये घाता पर्यंत वाढवावें नंतर तें जर सांगीतल्ये घाता बराबर जालें तर हेंच मूळ खरें आहे परंतु जर वाढविल्या घाताचीं सुमारानें पूर्वीं केलेलीं चिन्हें सांगीतल्ये घाता बराबर नाहींत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोनही ठिकाणीं सांगीतल्ये घाता बराबर होतील अशीं करावीं

जसें पांचव्ये उदाहरणांत ३अ−२ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदांचे मूळांचे वजाबाकी बराबर आहे आणि तिसर्ये उदाहरणांत अ−ब+क्ष हें संयुक्त मूळ प्रथम चवथें आणि शेवट या तीन पदांचे मूळांची बेरीज आहे आणि साहाव्ये उदाहरणांत संयुक्त मूळ प्रथम आणि शेवट या दोन पदांपासून निघतें

$अ^{४}-२अ^{३}ब+३अ^{२}ब^{२}-२अब^{३}+ब^{४}$ ($अ^{२}-अब+ब^{२}$ हें वर्गमूळ हें उत्तर

$अ^{४}$

$२अ^{२}$) $-२अ^{३}ब$

$अ^{४}-२अ^{३}ब+अ^{२}ब^{२}=(अ^{२}-अब)^{२}$

$२अ^{२}$) $+२अ^{२}ब^{२}$

$अ^{४}-२अ^{३}ब+३अ^{२}ब^{२}-२अब^{३}+ब^{४}=(अ^{२}-अब+ब^{२})^{२}$

दुसरें $अ^{६}-६अ^{५}+२१अ^{४}-४४अ^{३}+६३अ^{२}-५४अ+२७$ यांचें घनमूळ काढ

$अ^{६}-६अ^{५}+२१अ^{४}-४४अ^{३}+६३अ^{२}-५४अ+२७$ ($अ^{२}-२अ+३$ घनमूळ हें उत्तर

$अ^{६}$

$३अ^{४}$) $-६अ^{५}$

$अ^{६}-६अ^{५}+१२अ^{४}-८अ^{३}=(अ^{२}-२अ)^{३}$

$३अ^{४}$) $+९अ^{४}$

$अ^{६}-६अ^{५}+२१अ^{४}-४४अ^{३}+६३अ^{२}-५४अ+२७=(अ^{२}-२अ+३)^{३}$

* * * * * * *

तिसरें $अ^{२}-२अब+२अक्ष+ब^{२}-२बक्ष+क्ष^{२}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $अ-ब+क्ष$

चवथें $अ^{६}-३अ^{५}+९अ^{४}-१३अ^{३}+१८अ^{२}-१२अ+८$ यांचें घनमूळ काढ

उत्तर $अ^{२}-अ+२$

पांचवें $८१अ^{४}-२१६अ^{३}ब+२१६अ^{२}ब^{२}-९६अब^{३}+१६ब^{४}$ यांचें

चें चतुर्घात मूळ काढ

उत्तर ३अ-२ब

साहावें $अ^५ - १० अ^४ + ४० अ^३ - ८० अ^२ + ८० अ - ३२$ यांचें पंच घात मूळ काढ

उत्तर अ-२

सातवें $१ - क्ष^२$ याचें वर्गमूळ काढ

उत्तर

आठवें $१ - क्ष^३$ याचें घनमूळ काढ

उत्तर

करणी

करणी ह्मणजे ज्याचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीं तें पद आणि या करणीस अपूर्ण बीज वेळा प्रकाशकानें अथवा मूळ चिन्हानें युक्त लिहितात असें $३^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{३}$ हीं दोनही ३ या संख्येचें वर्गमूळ दाखवितात आणि $२^{\frac{२}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{२^२}$ अथवा $\sqrt[३]{४}$ हीं २ या संख्येचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितात ह्मणजे २ हें पद कोणत्या घाता पर्यंत वाढवावें हें पदाचे प्रकाशकांतील अंश दाखवितात आणि वाढविल्या पदाचे कोणत्या घाताचें मूळ काढावें तें छेद दाखवितात

प्रथम

प्रथम प्रकार

अखंड पदास करणीचें रूप द्यावयाचा

सांगीतल्ये पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घातपर्यंत वाढवावें नंतर या नव्ये वाढविल्ये पदास सांगीतल्ये करणीचे मूळ चिन्हानें युक्त करावें

उदाहरणें

प्रथम ४ यांस वर्गमूळाचें रूपदे

$४^२ = ४ \times ४ = १६$ तर $\sqrt{१६}$ अथवा $१६^{\frac{१}{२}}$ हें उत्तर

दुसरें $३अ^२$ यास घनमूळाचें रूपदे

आतां $(३अ^२)^३ = ३अ^२ \times ३अ^२ \times ३अ^२ = २७अ^६$ तर $\sqrt[३]{२७अ^६}$ अथवा $(२७अ^६)^{\frac{१}{३}}$ हें उत्तर

तिसरें ६ यांस घनमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[३]{२१६}$ अथवा $(२१६)^{\frac{१}{३}}$

चवथें $\frac{२}{३}$ अब यास वर्गमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt{\frac{४}{९}अ^२ब^२}$ अथवा $(\frac{४}{९}अ^२ब^२)^{\frac{१}{२}}$

पांचवें २ यांस चतुर्घातमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[४]{१६}$ अथवा $(१६)^{\frac{१}{४}}$

साहावें $अ^२$ यास पंचघातमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[५]{अ^{१०}}$ अथवा $(अ^{१०})^{\frac{१}{५}}$

सातवें

सातवें $अ+क्ष$ यास वर्गमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt{अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२}}$ अथवा $(अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$

आठवें $अ-क्ष$ यास घनमूळाचें रूप दे

उत्तर $\sqrt[३]{अ^{३}-३अ^{२}क्ष+३अक्ष^{२}-क्ष^{३}}$ अथवा $(अ^{३}-३अ^{२}क्ष+३अक्ष^{२}-क्ष^{३})^{\frac{१}{३}}$

दुसरा प्रकार

पदांस सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचा

१ सांगीतल्ये पदांचे मूळप्रकाशकांस समछेद करावें नंतर तीं प्रत्येक पदें वेगळाल्ये अंशस्थळींचे संख्ये इतके घातपर्यंत वाढवावीं आणि त्या समछेदांचे अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा ह्मणजे तीं पदें सममूळ प्रकाशक आलीं

२ जर सांगीतलें सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे तर पदाच्या मूळप्रकाशक सांगीतल्ये प्रकाशकानें भागावा ह्मणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचे नवे मूळ प्रकाशक होतील नंतर त्या त्या पदांस तेते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगीतला प्रकाशक लिहावा ह्मणजे इच्छिलें बराबर पद निघेल

उदाहरणें

प्रथम $३^{\frac{१}{२}}$ आणि $५^{\frac{१}{२}}$ यांस सममूळ प्रकाशक रूप दे

आतां

आतां $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{५} = \frac{५}{१०}$ आणि $\frac{२}{१०}$

याअकरितां $३^{\frac{५}{१०}}$ आणि $५^{\frac{२}{१०}} = (३^{५})^{\frac{१}{१०}}$ आणि $(५^{२})^{\frac{१}{१०}}$

ह्मणजे $\sqrt[१०]{२४३}$ आणि $\sqrt[१०]{२५}$ सममूळप्रकाशक आले हें उत्तर

दुसरें $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $ब^{\frac{१}{३}}$ यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर

आतां $\frac{१}{२} \div \frac{१}{६} = \frac{१}{२} \times \frac{६}{१} = \frac{६}{२}$ हा प्रथम पदाचा मूळप्रकाशक

आणि $\frac{१}{३} \div \frac{१}{६} = \frac{१}{३} \times \frac{६}{१} = \frac{६}{३}$ हा दुसर्ये पदाचा मूळप्रकाशक

याअकरितां $(अ^{३})^{\frac{१}{६}}$ आणि $(ब^{२})^{\frac{१}{६}}$ अथवा $\sqrt[६]{अ^{३}}$ आणि $\sqrt[६]{ब^{२}}$ हीं इछिलीं पदें पूर्व पदांचे बराबर किमतीचीं आहेत

तिसरें $४^{\frac{२}{३}}$ आणि $५^{\frac{१}{३}}$ यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर

उत्तर $(२५६)^{\frac{१}{६}}$ आणि $(२५)^{\frac{१}{६}}$

चवथें $अ^{\frac{१}{३}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{२}}$ यांस $\frac{१}{६}$ हा सममूळप्रकाशक कर

उत्तर $(अ^{२})^{\frac{१}{६}}$ आणि $(क्ष^{३})^{\frac{१}{६}}$

पांचवें $अ^{\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{१}{५}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे

उत्तर $\sqrt[१०]{अ^{५}}$ आणि $\sqrt[१०]{क्ष^{२}}$

साहावें $(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}$ आणि $(अ-क्ष)^{\frac{१}{२}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे

सातवें $(अ+ब)^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-ब)^{\frac{१}{३}}$ यांस सममूळप्रकाशक रूप दे

तिसरा

तिसरा प्रकार

करणीस अतिसरळ रूप द्यावयाची

रीति

सांगीतली संख्या अथवा पद याचे गुण्य गुणक रूपानें दोन अवयव करावे असे किं त्यांतील एक अवयव त्या संख्येचे आंत सांगीतल्ये मूळाचा मोठा घात होईल नंतर या मोठ्ये घाताचें सांगीतलें मूळ काढून तें राहिल्ये दुसर्ये अवयवाचे डाव्ये कडे लिहावें आणि या दोहोंचे मध्यें सांगीतल्ये मूळाचें चिन्ह करावें ※

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{४८}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

आतां $\sqrt{४८}=\sqrt{१६\times३}=४\sqrt{३}$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt[३]{१०८}$ या करणीस अति सरळ रूप दे

आतां $\sqrt[३]{१०८}=\sqrt[३]{२७\times४}=३\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर

प्रथम टीप जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद करणीस मागें जोडिलें आहे तेव्हां तें पद त्या गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांत ओ-पूर्ण घात असेल त्याचे मूळानीं गुणून तो गुणाकार पूर्वरीतीनें त्या दुसर्ये अवयवाशीं जोडून लिहावा

उदाहरणें

※ जेव्हां सांगीतल्ये करणींत वर सांगीतल्ये गुण्य गुणकरूप दोन अवयवांतील एकही अवयव सांगीतल्ये मूळाच्या बरोबर मोठा घात होत नाहीं तेव्हां ती करणी सरळ रूपच आहे असें $\sqrt{१५}$ यास याहून दुसरें सरळरूप होत नाहीं कारण गुण्य गुणकरूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोंतून एकही इछिल्ये मूळाच्या पूर्ण घात ह्मणजे एथे वर्ग होत नाहीं

उदाहरणें

प्रथम $२\sqrt{३२}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $२\sqrt{३२}=२\sqrt{१६\times२}=२\times४\sqrt{२}=८\sqrt{२}$ हें उत्तर

दुसरें $५\sqrt[३]{२४}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $५\sqrt[३]{२४}=५\sqrt[३]{८\times३}=५\times२\sqrt[३]{३}=१०\sqrt[३]{३}$ हें उत्तर

दुसरी टीप अपूर्ण करणीसही अतिसरळ रूप देतां येतें या पुढील रीती करून

रीति

अंश आणि छेद हे कोणत्येही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे असे कि गुणिलेले छेद सांगीतल्ये मूळाचा पूर्ण घात होईल नंतर त्या घाताचें सांगीतलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा आणि त्यास करणीचा राहिला दुसरा अवयव जोडून मध्यें पूर्व प्रमाणें मूळ चिन्ह करावें※

उदाहरणें

※ करणीस अतिसरळ रूप द्यावयाचा उपयोग असा आहे किं उत्तर दशांशांत सरळ निघतें हें या प्रथम उदाहरणाचा विचार केला असतां कळेल पाहा यांत दिसतें किं $\sqrt{\frac{२}{७}}=\frac{१}{७}\sqrt{१४}$ या उदाहरणांत १४ चें वर्गमूळ काढायाचें अथवा वर्गमूळ कोष्टकांतून तयार घ्यावयाचें आणि त्या मूळास ७ याणीं भागायाचें इतकें मात्र आहे आणि सरळ रूप न दिलें तर छेदानीं अंश भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें अथवा अंश छेदांचीं वेगळालीं मूळें काढून अंशांचें मूळ छेदांचे मूळानें भागावें लागतें आणि या दोनही रीतींहीं मूळ काढण्यास अतिसरळ रूप रीती पेक्षां या उदाहरणी बहुत श्रम पडतात आणि दुसर्ये उदाहरणांत तर अतिसरळ रूप न दिल्यास बहुतच श्रम पडतात

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{\frac{२}{७}}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

आतां $\sqrt{\frac{२}{७}} = \sqrt{\frac{२\times७}{७\times७}} = \sqrt{\frac{१४}{४९}} = \frac{१}{७}\sqrt{१४}$ हें उत्तर

दुसरें $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}}$ यांस अतिसरळ रूप दे

आतां $३\sqrt[३]{\frac{२}{५}} = ३\sqrt[३]{\frac{२\times२५}{५\times२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{५०}{१२५}} = ३\sqrt[३]{\frac{१}{१२५}}\times\sqrt[३]{५०} = ३\times\frac{१}{५}\sqrt[३]{५०} =$
$\frac{३}{५}\sqrt[३]{५०}$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt{३२}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $४\sqrt{२}$

चवथें $\sqrt{३२०}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $८\sqrt{५}$

पांचवें $\sqrt{७५}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $५\sqrt{३}$

साहावें $\sqrt[३]{१८९}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $३\sqrt[३]{७}$

सातवें $\sqrt{७५\,अ^{२}ब}$ यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $५अ\sqrt{३ब}$

आठवें $७\sqrt{८०}$ यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर $२८\sqrt{५}$

नववें $९\sqrt{८१}$ यांस अतिसरळ रूप दे

उत्तर ८१

दाह्यावें

दाहावें $\sqrt{\frac{४४}{७५}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{२}{१५}\sqrt{३३}$

अकरावें $\sqrt[३]{\frac{१३५}{३२}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३}{४}\sqrt[३]{१०}$

बारावें $\frac{क}{ड}\sqrt{\frac{अ^२}{ब}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{अक}{बड}\sqrt{ब}$

तेरावें $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{७}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{३}{२८}\sqrt{१४}$

चौदावें $\frac{२}{३}\sqrt[३]{\frac{२६}{८१}}$ यास अतिसरळ रूप दे

उत्तर $\frac{२}{२७}\sqrt{१८}$

पंधरावें $\sqrt{९८ अ^२ क्ष}$ यास अतिसरळ रूप दे

सोळावें $\sqrt{क्ष^३ - अ^२ क्ष^२}$ या करणीस अतिसरळ रूप दे

चवथा प्रकार

करणी पदांची मेळवणी करायाचा

रीति

१ अपूर्ण पदें असतील तीं समछेद करावीं आणि पूर्व प्रकाराप्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळ रूप द्यावें

२ ज्या पदाचा मूळ प्रकाशक विषम आहे त्यास दुसऱ्ये प्रकारा प्रमाणें बरोबर किमतीचें सम मूळ प्रकाशक पदाचें रूप द्यावें

३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल तर त्या पदांचे अखंड अवयवांची बेरीज घेउन तीस ती करणी जोडून लिहावी हीच त्यांची मिळवणी परंतु सर्व पदांत करणी अवयव एकरूप नसेल तर तीं सर्व पदें (+) धन (−) ऋण चिन्हें जोडून लिहावीं हीच त्यांची मिळवणी

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

आतां $\sqrt{१८}=\sqrt{९\times२}=३\sqrt{२}$

आणि $\sqrt{३२}=\sqrt{१६\times२}=४\sqrt{२}$

तर $\overline{७\sqrt{२}}$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt[३]{३७५}$ आणि $\sqrt[३]{१९२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

आतां $\sqrt[३]{३७५}=\sqrt[३]{१२५\times३}=५\sqrt[३]{३}$

आणि $\sqrt[३]{१९२}=\sqrt[३]{६४\times३}=४\sqrt[३]{३}$

$\overline{९\sqrt[३]{३}}$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $७\sqrt{३}$

चवथें $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $११\sqrt{२}$

पांचवें

पांचवें $\sqrt{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{१२५}}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $४\sqrt{\frac{३}{१२५}}$ अथवा $\frac{४}{२५}\sqrt{१५}$

साहावें $\sqrt[३]{५६}$ आणि $\sqrt[३]{१८९}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $५\sqrt[३]{७}$

सातवें $\sqrt[३]{५००}$ आणि $\sqrt[३]{२०८}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $८\sqrt[३]{४}$

आठवें $\sqrt[३]{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{३}{३२}}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $\frac{३}{४}\sqrt[३]{२}$

नववें $४\sqrt{१४७}$ आणि $३\sqrt{७५}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $४३\sqrt{३}$

दाहावें $३\sqrt{\frac{२}{५}}$ आणि $२\sqrt{\frac{१}{१०}}$ यांची बेरीज काय होत्ये

उत्तर $\frac{४}{५}\sqrt{१०}$

अकरावें $३\sqrt{अ^{३}ब}$ आणि $५\sqrt{१६ अ^{४}ब}$ यांची बेरीज काय होत्ये

बारावें $\frac{१}{२}\sqrt{अ^{२}ब}$ आणि $\frac{१}{२}\sqrt{४ बक्ष^{४}}$ यांची बेरीज काय होत्ये

पांचवा

पांचवा प्रकार

करणी पदांची वजा बाकी करायाची

रीति

पूर्व प्रकाराप्रमाणें दोनही पदें सिद्ध करावीं नंतर करणी एकरूपच असेल तर अखंड पदांची वजा बाकी करावी आणि राहिल्या बाकीस ती साधारण करणी जोडावी ह्मणजे वजाबाकी जाली त्या पदांची करणी एकरूप नसेल तर तीं पदें (−) ऋण चिन्ह जोडून लिहावीं ह्मणजे हीच वजा बाकी जाली

उदाहरणें

प्रथम $\sqrt{३२०}$ आणि $\sqrt{८०}$ यांची वजा बाकी कर

आतां $\sqrt{३२०}=\sqrt{६४\times५}=८\sqrt{५}$

आणि $\sqrt{८०}=\sqrt{१६\times५}=४\sqrt{५}$

$\overline{४\sqrt{५}}$ बाकी हें उत्तर

दुसरें $\sqrt[3]{१२८}$ आणि $\sqrt[3]{५४}$ यांची वजा बाकी कर

आतां $\sqrt[3]{१२८}=\sqrt[3]{६४\times२}=४\sqrt[3]{२}$

आणि $\sqrt[3]{५४}=\sqrt[3]{२७\times२}=३\sqrt[3]{२}$

$\overline{१\sqrt[3]{२}\sqrt[3]{२}}$ हें उत्तर

तिसरें $५\sqrt{२०}$ आणि $३\sqrt{४५}$ यांची वजा बाकी कर

आतां $५\sqrt{२०}=५\sqrt{४\times५}=१०\sqrt{५}$

आणि $३\sqrt{४५}=३\sqrt{९\times५}=९\sqrt{५}$

$\overline{\sqrt{५}}$ बाकी हें उत्तर

चवथें

चवथें $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{६}}$ यांची वजाबाकी कर

आता $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{३}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{६}{९}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{१}{९}}\sqrt{६} = \frac{१}{४}\sqrt{६}$

आणि $\frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{६}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{६}{३६}} = \frac{२}{५}\sqrt{\frac{१}{३६}}\sqrt{६} = \frac{१}{१५}\sqrt{६}$

$\frac{११}{६०}\sqrt{६}$ बाकी हें उत्तर

पांचवें $\sqrt{७५}$ आणि $\sqrt{४८}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\sqrt{३}$

साहावें $\sqrt[३]{२५६}$ आणि $\sqrt[३]{३२}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $२\sqrt[३]{४}$

सातवें $\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\sqrt{\frac{१}{३}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{१}{६}\sqrt{३}$

आठवें $\sqrt{\frac{२}{३}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{८}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{१}{१२}\sqrt{६}$

नववें $\sqrt[३]{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt[३]{\frac{२५}{९}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $\frac{२}{१५}\sqrt[३]{७५}$

दाहावें $\sqrt{२४ अ^{२} ब^{२}}$ आणि $\sqrt{५४ ब^{२}}$ यांची वजाबाकी कर

उत्तर $(३ब - २अब)\sqrt{६}$

साहावा प्रकार

करणी पदें परस्पर गुणायाचा

रीति

जेव्हां सर्व पदांत करणी एकजातीची आहे तेव्हां त्या पदांचे अखंड अवयवांचा गुणाकार करावा तसाच खंड अवयवांचाही गुणाकार करावा नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्यें साधारण करणी चिन्ह लिहावें ह्मणजे हा इछिला गुणाकार होईल यागुणाकारास तिसर्ये प्रकारा प्रमाणें अतिसरळरूप देतां येईल

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मूळ प्रकाशक रूप देउन तीं पदें वर सांगीतल्याप्रमाणें गुणावीं

पृ ४७ या समयीं पूर्वीं सांगीतल्ये रीतीचें स्मरण करावें जे सरूप पदांस वर्गादि प्रकाशक अथवा वर्गादि मूळ प्रकाशक विरूप आहे तर त्यांचा गुणाकार प्रकाशकांची बेरीज करून ती त्या साधारण पदास रीती प्रमाणें जोडावी ह्मणजे गुणाकार जाहाला

उदाहरणें

प्रथम ३√८ आणि २√६ यांचा गुणाकार काय होतो

आतां ३√८ हे गुण्य

आणि २√६ हे गुणक

$\overline{६\sqrt{४८}} = ६\sqrt{१६\times३} = २४\sqrt{३}$ गुणाकार हे उत्तर

दुसरें

दुसरें $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

आतां $\frac{१}{२}\sqrt[३]{\frac{२}{३}}$

$\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{५}{६}}$

$\frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१०}{१८}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{५}{९}} = \frac{३}{८}\sqrt[३]{\frac{१५}{२७}} = \frac{१}{८}\sqrt[३]{१५}$ गुणाकार हें उत्तर

तिसरें $२^{\frac{१}{२}}$ आणि $३^{\frac{१}{३}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

$\frac{१}{२}$ $\frac{१}{३} = \frac{३}{६}$ हा प्रथम पदाचा

$= \frac{२}{६}$ हा दुसर्ये पदाचा

आतां $२^{\frac{१}{२}} = २^{\frac{३}{६}} = (२^{३})^{\frac{१}{६}} = ८^{\frac{१}{६}}$

$३^{\frac{१}{३}} = ३^{\frac{२}{६}} = (३^{२})^{\frac{१}{६}} = ९^{\frac{१}{६}}$

$७२^{\frac{१}{६}}$ हा गुणाकार हें उत्तर

चवथें $५\sqrt{अ}$ आणि $३\sqrt{अ}$ यांचा गुणाकार काय होतो

आतां $५\sqrt{अ} = ५अ^{\frac{१}{२}} = ५अ^{\frac{३}{६}}$

$३\sqrt[३]{अ} = ३अ^{\frac{१}{३}} = ३अ^{\frac{२}{६}}$

$१५अ^{\frac{५}{६}} = १५(अ^{५})^{\frac{१}{६}} = १५\sqrt[६]{अ^{५}}$ हें उत्तर

पांचवें $३\sqrt{२}$ आणि $२\sqrt{८}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर २४

साहावें $\frac{१}{२}\sqrt[३]{४}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt[३]{१२}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर $\frac{१}{२}\sqrt[३]{६}$

सातवें $\frac{४}{५}\sqrt{\frac{३}{८}}$ आणि $\frac{५}{१०}\sqrt{\frac{५}{६}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर $\frac{२}{१०}\sqrt{३५}$

आठवें

आठवें २$\sqrt[३]{१४}$ आणि ३$\sqrt[३]{४}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर १२$\sqrt[३]{७}$

नववें २अ$^{\frac{२}{३}}$ आणि अ$^{\frac{४}{५}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

उत्तर २अ^{२}

दाहावें (अ+ब)$^{\frac{१}{३}}$ आणि (अ+ ब)$^{\frac{२}{३}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

अकरावें २क्ष+$\sqrt{ब}$ आणि २क्ष-$\sqrt{ब}$ यांचा गुणाकार काय होतो

बारावें (अ+२$\sqrt{ब}$)$^{\frac{१}{२}}$ आणि (अ-२$\sqrt{ब}$)$^{\frac{१}{२}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

तेरावें २क्ष$^{\frac{१}{न}}$ आणि ३क्ष$^{\frac{१}{न}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

चौदावें ४क्ष$^{\frac{१}{न}}$ आणि २य$^{\frac{१}{न}}$ यांचा गुणाकार काय होतो

सातवा प्रकार

एक करणी पदास दुसयें करणी पदानें भागायाचा

रीति

जेव्हां करणी एकजातीची आहे तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा तसाच खंड पदांचाही भागाकार करावा आणि त्या दोन भागाकारां मध्यें साधारण करणी चिन्ह लिहावें ह्मणजे भागाकार जाहाला

अर

जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मूळ प्रकाशकरूप देउन वर प्रमाणें भागाकार करावा

या समयीं पूर्वीं सांगीतल्ये रीतीचें स्मरण असावें जे सरूप पृ ४७
पदांस वर्गादि प्रकाशक अथवा वर्गमूळादि प्रकाशक भिन्न जाति आहेत तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे वजा बाकी वरून होतो तो असा किं प्रकाशकांची वजा बाकी करून ती साधारण पदास रीती प्रमाणें जोडावी ह्मणजे भागाकार आला

उदाहरणें

प्रथम $८\sqrt{१०८}$ यांस $२\sqrt{६}$ याणीं भाग

आतां $\frac{८\sqrt{१०८}}{२\sqrt{६}} = ४\sqrt{१८} = ४\sqrt{९\times२} = १२\sqrt{२}$ भागाकार हें उत्तर

दुसरें $८\sqrt[३]{५१२}$ यांस $४\sqrt[३]{२}$ याणीं भाग

आतां $\frac{८\sqrt[३]{५१२}}{४\sqrt[३]{२}} = २\sqrt[३]{२५६} = २\sqrt[३]{६४\times४} = ८\sqrt[३]{४}$ हें उत्तर

तिसरें $\frac{३}{२}\sqrt{५}$ यांस $\frac{३}{३}\sqrt{२}$ याणीं भाग

आतां $\frac{\frac{३}{२}\sqrt{५}}{\frac{३}{३}\sqrt{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{५}{२}} = \frac{३}{२}\sqrt{\frac{१०}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{१०}$ हें उत्तर

चवथें $\sqrt{७}$ यांस $\sqrt[३]{७}$ याणीं भाग

आतां $\frac{\sqrt{७}}{\sqrt[३]{७}} = \frac{७^{\frac{१}{२}}}{७^{\frac{१}{३}}} = \frac{७^{\frac{३}{६}}}{७^{\frac{२}{६}}} = ७^{\frac{३}{६}-\frac{२}{६}} = ७^{\frac{१}{६}}$ हें उत्तर

पांचवें $४\sqrt{५०}$ यांस $२\sqrt{५}$ याणीं भाग

उत्तर $२\sqrt{१०}$

साहावें

साहावें $६\sqrt[३]{१००}$ यांस $३\sqrt[३]{५}$ याणीं भाग

उत्तर $२\sqrt[३]{२०}$

सातवें $\frac{५}{६}\sqrt{\frac{५}{१०}}$ यांस $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{२}{५}}$ याणीं भाग

उत्तर $\frac{५}{९}\sqrt{५}$

आठवें $\frac{३}{४}\sqrt[३]{\frac{३}{१६}}$ यांस $\frac{३}{५}\sqrt[३]{\frac{२}{५}}$ याणीं भाग

उत्तर $\frac{५}{१६}\sqrt[३]{३०}$

नवचें $\frac{४}{५}\sqrt{अ}$ यांस अथवा $\frac{४}{५}अ^{\frac{१}{२}}$ यांस $\frac{२}{३}\sqrt[३]{अ}$ याणीं भाग

उत्तर $\frac{६}{५}अ^{\frac{१}{६}}$

दाहावें $अ^{\frac{४}{५}}$ यांस $अ^{\frac{२}{३}}$ याणीं भाग

अकरावें $३अ^{न}$ यांस $४अ^{म}$ याणीं भाग

टीप करणीच्या भागाकार भाज्यभाजकांचे मूळप्रकाशक चिन्हांचे वजाबाकी करून होतो यावरून निश्चय कळतें किं कोणत्ये ही अपूर्णांकाचे अथवा अपूर्ण बीजाचे छेद अंशस्थळीं घेतां येतील अथवा अंश छेदस्थळीं घेतां येतील असे किं प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल करून

पुनः $\frac{अ^{म}}{अ^{म}}=१$ अथवा $अ^{म-म}=अ^{०}$ यापासून निघतें किं $अ^{०}$ हें अक्षर चिन्ह कोणत्येही एकपदाबराबर आहे जें पद १ या संख्येचे बराबर आहे याजकरितां जा स्थळीं $अ^{०}$ अशा रीतीचें अ-

क्षर

क्षर चिन्ह येतें तेथे १ हा अंक लिहितां येईल*

उदाहरणें

प्रथम जसें $\frac{१}{अ} = \frac{अ^{-१}}{१}$ अथवा $अ^{-१}$ आणि $\frac{१}{अ^{न}} = \frac{अ^{-न}}{१}$ अथवा $अ^{-न}$

दुसरें $\frac{ब}{अ^{२}} = \frac{बअ^{-२}}{१}$ अथवा $बअ^{-२}$ आणि $\frac{अ^{-न}}{ब^{-म}} = \frac{१}{अ^{न}ब^{-म}} = \frac{ब^{म}}{अ^{न}}$

तिसरें $\frac{१}{अ^{२}}$ यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि

चवथें $अ^{-\frac{१}{२}}$ यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि

पांचवें $\frac{१}{अ+क्ष}$ यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि

साहावें $अ(अ^{२}-क्ष^{२})^{-\frac{३}{२}}$ यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि

---

* याजवर याहून अधिक विचार केला पाहिजे

१ कोणत्येही पदास शून्य मिळविलें अथवा त्यांतून वजा केलें तर तें पद अधिक किंवा उणें होत नाहीं ह्मणजे

$अ + ० = अ$ आणि $अ - ० = अ$

२ जर कोणत्येही पदानें शून्य गुणिलें किंवा भागिलें तर गुणाकार किंवा भागाकार शून्य होईल कारण-किती वेळा शून्य घेतलें तर शून्यच होईल शून्याचे किती भाग घेतले तरी शून्यच होईल ह्मणजे $० \times अ$ अथवा $अ \times ० = ०$ आणि $\frac{०}{अ} = ०$

३ यांतूनही निघतें कीं शून्यानें भागिले शून्य त्याचा भागाकार काहीं एक सांत पद आहे कारण

$० \times अ = ०$ अथवा $० = ० \times अ$ याजकरितां $\frac{०}{०} = अ$

४ याहूनही अधिक जर कोणतेंही सांत पद शून्यानें भागिलें तर भागाकार अनंत होईल या पुढील उदाहरणांत पाहा

$\frac{ब}{अ} = क$ जर त्याची किमत सर्वकाळ बरोबर असेल तर साफ दिसतें कीं जितका अ लाहान होत जाईल तितका क मोटा होईल याजकरितां जर अ अनंत लाहान आहे तर क अनंत मोटा होईल आणि जेव्हां अ शून्य आहे तेव्हां क अनंत होईल ह्मणजे

$\frac{ब}{०}$ अथवा $\frac{०}{०} = \infty$ अनंत आहे

हा गुणविचार याविषेंत शेवटीं मोठ्ये मोठ्ये कामांत बहुत उपयोगी आहे याजकरितां पक्केपणें स्मरणांत असावा

आठवा

आठवा प्रकार

करणी पदास वर्गघनादिकें करून वाढवायाचा

रीति

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे वर्गकरणें आहे तर त्या करणी पदाचें प्रकाशक चिन्ह दोहोंनीं गुणावें आणि घन करणें आहे तर तिहींनीं गुणावें इत्यादि चतुर्घातादिकीं हें करणीचे खंड अवयवाचें इछिलें वर्गघनादिक होईल नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इछिलें वर्गघनादिक करून त्यास ओडावें ह्मणजे करणीचे एकाकी पदाचें इछिलें वर्गघनादिक होईल अर करणी संयुक्त पद आहे तर इछिलें वर्गघनादिक करायाकरितां इछिलें वर्गघनादिक होई पर्यंत वर्गघनादि रीतीनें तें करणी संयुक्तपद पुनः पुनः गुणावें*

उदाहरणें

प्रथम $\frac{२}{३}$ अ$^{\frac{२}{३}}$ याचा वर्ग काय होतो

आतां $(\frac{२}{३}$ अ$^{\frac{२}{३}})^{२} = \frac{४}{९}$ अ$^{\frac{२}{३} \times २} = \frac{४}{९}$ अ$^{\frac{४}{३}}$ अथवा $\frac{४}{९} \sqrt[३]{\text{अ}^{२}}$ हें उत्तर

दुसरें $\frac{२}{३}\sqrt{३}$ याचा घन काय होतो

आतां. $(\frac{२}{३}\sqrt{३})^{३} = \frac{८}{२७} \times ३^{\frac{१}{२} \times ३} = \frac{८}{२७} \times ३^{\frac{३}{२}} = \frac{८}{२७} \times \sqrt{२७} = \frac{८}{२७} \times \sqrt{९ \times ३} = \frac{२४}{२७}\sqrt{३} = \frac{८}{९}\sqrt{३}$ हें उत्तर

---

* जेव्हां कोणतेंही पद वर्गमूळचिन्हानें युक्त आहे आणि त्याचा वर्ग करणें आहे तर तें वर्गमूळचिन्ह पुसून टाकावें ह्मणजे वर्ग आला जसें $(\sqrt{\text{अ}})^{२}$ अथवा $\sqrt{\text{अ}} \times \sqrt{\text{अ}} =$ अ आणि $(\sqrt{\text{अ}+\text{ब}})^{२}$ अथवा $\sqrt{\text{अ}+\text{ब}} \times \sqrt{\text{अ}+\text{ब}} =$ अ+ ब

तिसरें

तिसरें $\frac{२}{३}\sqrt{६}$ याचा घन काय होतो

आतां $\frac{२}{३}\times\frac{२}{३}\times\frac{२}{३}=\frac{८}{२७}$ नंतर $६^{\frac{१}{२}\times ३}=६^{\frac{३}{२}}=\sqrt{२१६}=\sqrt{३६\times ६}=$ $६\sqrt{६}$

तेव्हां $(\frac{२}{३}\sqrt{६})^{३}=\frac{८}{२७}\times ६\sqrt{६}=\frac{४८}{२७}\sqrt{६}=\frac{१६}{९}\sqrt{६}$ हें उत्तर

चवथें $२\sqrt[३]{२}$ याचा वर्ग काय होतो

उत्तर $४\sqrt[३]{४}$

पांचवें $३^{\frac{३}{२}}$ याचा घन काय होतो

उत्तर $३\sqrt{३}$

साहावें $\frac{१}{३}\sqrt{३}$ याचा घन काय होतो

उत्तर $\frac{१}{९}\sqrt{३}$

सातवें $\frac{१}{२}\sqrt{२}$ याचा चतुर्घात काय होतो

उत्तर $\frac{१}{४}$

आठवें $अ^{\frac{न}{म}}$ याचा म घात काय होतो

नववें $२+\sqrt{३}$ याचा वर्ग काय होतो

दाहावें $३+२\sqrt{५}$ याचा वर्ग काय होतो

अकरावें $\sqrt{क्ष}+३\sqrt{य}$ याचा घन काय होतो

नववा प्रकार.

करणीपदाचें वर्गघनादिमूळ काढायाचा

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर त्या करणीपदाचें प्रकाशक चिन्ह $\frac{१}{२}$ याणें गुणावें आणि घनमूळ काढणेंतर $\frac{१}{३}$ याणें गुणावें इत्यादि चतुर्घातादि मूळीं हें करणीचे खंड अवयवाचें इछिलें वर्गादिमूळ होईल नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इछिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणीपदांतील त्या खंड अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडावें ह्मणजे करणीचे एकाकी पदाचें इछिलें वर्गादिमूळ होईल जर करणी संयुक्तपद आहे तर पूर्वीं सांगीतल्ये रीती प्रमाणें त्याचें वर्गादिमूळ काढावें ⁜

उदाहरणें

प्रथम $९\sqrt{३}$ यांचें वर्गमूळ काढ

आतां $(९\sqrt{३})^{\frac{१}{२}} = ९^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{२} \times \frac{१}{२}} = ९^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{४}} = ३\sqrt[४]{३}$ हें उत्तर

दुसरें $\frac{१}{८}\sqrt{२}$ याचें घनमूळ काढ

आतां $(\frac{१}{८}\sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (\frac{१}{८})^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{२} \times \frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \times २^{\frac{१}{६}} = \frac{१}{२}\sqrt[६]{२}$ हें उत्तर

⁜ कोणतेंही पद अ याचे म घाताचें न मूळ अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचा म घात $= अ^{\frac{म}{न}}$

आणि कोणतेंही पद अ याचे म मूळाचें न मूळ अथवा कोणतेंही पद अ याचे न मूळाचें म मूळ $= अ^{\frac{१}{मन}}$

या पासून कळतें किं अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे चतुर्घात मूळा बराबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा अ पदाचे घनमूळाचे वर्गमूळ अ पदाचे षड्घात मूळा बराबर आहे आणि या प्रमाणें पुढेंही कोणत्येही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर या प्रमाणें काढावें

तिसरें

तिसरें ६^3 याचें वर्गमूळ काढ

उत्तर ६$\sqrt{६}$

चवथें $\frac{8}{27}$अ^{3}ब यांचें घनमूळ काढ

उत्तर $\frac{2}{3}$अ$\sqrt[3]{ब}$

पांचवें १६अ यांचें चतुर्घातमूळ काढ

उत्तर २$\sqrt[4]{अ}$

साहावें क्ष$^{[illegible]}$ यांचें म मूळ काढ

सातवें अ^2-६अ$\sqrt{ब}$+९ब यांचें वर्गमूळ काढ

आठवें $\frac{अ}{३}\sqrt{\frac{अ}{३}}$ यांचें घनमूळ काढ

दाहावा प्रकार

द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास सामान्य करणीरूप द्या-वयाचा

रीति

सांगीतलें द्वियुक्पद अथवा धनर्ण पद यास त्यांतील करणी-चे घाता पर्यंत वाढवावें नंतर त्या घाताचें मूळचिन्ह त्या द्वियुक्पदा-स

स अथवा धनर्ण पदास जोडून लिहावें ह्मणजे त्या पदास सामान्य करणी रूप आलें

उदाहरणें

प्रथम $२+\sqrt{३}$ यास सामान्य करणीरूप दे

आतां $(२+\sqrt{३})^२=४+३+४\sqrt{३}=७+४\sqrt{३}$ याजकरितां $२+\sqrt{३}=\sqrt{७+४\sqrt{३}}$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt{२}+\sqrt{३}$ यास सामान्य करणीरूप दे

आतां $(\sqrt{२}+\sqrt{३})^२=२+३+२\sqrt{६}=५+२\sqrt{६}$ याजकरितां $\sqrt{२}+\sqrt{३}=\sqrt{५+२\sqrt{६}}$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}$ यास सामान्य करणीरूप दे

आतां $(\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})^३=६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}$ याजकरितां $\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४}=\sqrt[३]{६+६\sqrt[३]{२}+६\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{६(१+\sqrt[३]{२}+\sqrt[३]{४})}$ हें उत्तर

चवथें $३-\sqrt{५}$ यास सामान्य करणीरूप दे

पांचवें $\sqrt{२-२\sqrt{६}}$ यास सामान्य करणीरूप दे

साहावें $४-\sqrt{७}$ यास सामान्य करणीरूप दे

सातवें $२\sqrt{३}-३\sqrt{९}$ यास सामान्य करणीरूप दे

अकराया

अकरावा प्रकार

द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढायाची रीति

या खालचे दोन सारणी कोष्ठकांत अक्षरस्थळीं सांगीतल्ये करणीचे दोन अवयव लिहावे ह्मणजे सांगीतल्ये द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्ण पदाचें इछिलें मूळ होईल

$$\sqrt{\text{अ}+\sqrt{\text{ब}}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}} + \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}}$$

$$\sqrt{\text{अ}-\sqrt{\text{ब}}} = \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}} - \sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}}$$

पाहायाचें आहे जर या दोन सारणी कोष्टकांत अ आणि $\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}$ अखंड पदें असतील तर मूळ पदें दोनही करणी असतील अथवा एक पद अखंड आणि दुसरें पद करणी असें असेल ह्मणोन दोन प्रकारचीं मात्र उदाहरणें या रीतीचा उपयोगी आहेत

उदाहरणें

प्रथम $\text{११}+\sqrt{\text{७२}}$ अथवा $\text{११}+\text{६}\sqrt{\text{२}}$ यांचें वर्गमूळ काढ

आतां $\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}} = \sqrt{\tfrac{\text{११}}{\text{२}}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{१२१}-\text{७२}}} = \sqrt{\tfrac{\text{११}}{\text{२}}+\tfrac{\text{७}}{\text{२}}} = \sqrt{\tfrac{\text{१८}}{\text{२}}} = \sqrt{\text{९}} = \text{३}$

आतां $+\sqrt{\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\text{अ}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}-\text{ब}}} = \sqrt{\tfrac{\text{११}}{\text{२}}-\tfrac{\text{१}}{\text{२}}\sqrt{\text{१२१}-\text{७२}}} = \sqrt{\tfrac{\text{११}}{\text{२}}-\tfrac{\text{७}}{\text{२}}} = \sqrt{\tfrac{\text{४}}{\text{२}}} = \sqrt{\text{२}}$

याजकरितां $\sqrt{\text{११}+\text{६}\sqrt{\text{२}}} = \text{३}+\sqrt{\text{२}}$ हें उत्तर

दुसरें $\text{३}-\text{२}\sqrt{\text{२}}$ यांचें वर्गमूळ काढ

आतां

आतां $\sqrt{\frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}\sqrt{अ^२ - ब}} - \sqrt{\frac{१}{२}अ - \frac{१}{२}\sqrt{अ^२ - ब}}$

$\sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = \sqrt{\frac{३}{२} + \frac{१}{२}} = \sqrt{\frac{४}{२}} = \sqrt{२}$

$-\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{९ - ८}} = -\sqrt{\frac{३}{२} - \frac{१}{२}} = -१$

याजकरितां $\sqrt{३ - २\sqrt{२}} = \sqrt{२} - १$ हें उत्तर

तिसरें $६ \pm २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\sqrt{५} \pm १$

चवथें $२३ \pm ८\sqrt{७}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $४ \pm \sqrt{७}$

पांचवें $४ + २\sqrt{३}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $१ + \sqrt{३}$

साहावें $६ - २\sqrt{५}$ यांचें वर्गमूळ काढ

उत्तर $\sqrt{५} - १$

बारावा प्रकार

एक किंवा अधिक गुणक काढायाचा

तो गुणक असा किं ज्याणें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाउन तें अखंड होईल

रीति

१ जेव्हां करणीचे एक पदाचा किंवा दोनही पदांचे मूळ प्रकाशक सम आहेत तेव्हां सांगीतल्ये द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्ण पदाचें

एक

एक चिन्ह बदल करावें ह्मणजे तोच गुणक आला नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें या प्रमाणें गुणाकारांतही एक चिन्ह बदल करून पुनः पुनः गुणावें गुणाकारास करणी रूप सुटेपर्यंत

या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणी रूप सुटोन अखंड रूप देतां येईल असें किं त्रियुक्पदादि करणीसही एक चिन्ह बदल करावें चतुर्युक्पद करणीस दोन चिन्हें बदल करावीं पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हें बदल करावीं इत्यादि षड्युक्पदादिकींही

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळ प्रकाशक विषम आहे तेव्हां रीति याहून अधिक कठीण आहे परंतु दोन वर्गमूळांची बेरीज किंवा वजा बाकी करायास इछिला गुणक त्रियुक्पद करणी होईल हें त्रियुक्पद या रीतीनें उत्पन्न होतें किं जीं दोन पदें आहेत त्यांचे वर्ग दोन पदें आणि त्याच पदांचा गुणाकार धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावा तो तिसरें मध्यपद होतें

उदाहरणें

प्रथम ५+√३ यांचा एक गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाउन तें अखंड पद होईल

सांगीतली

सांगीतली करणी $५+\sqrt{३}$
गुणक $५-\sqrt{३}$

$२५+५\sqrt{३}$
$-५\sqrt{३}-३$

$२५-३=२२$ हें उत्तर

दुसरें $\sqrt{५}+\sqrt{३}$ याचा एक गुणक काढायाचा जाणें हे पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाउन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt{५}+\sqrt{३}$
गुणक $\sqrt{५}-\sqrt{३}$

$५+\sqrt{५}\sqrt{३}$
$-\sqrt{५}\sqrt{३}-३$

$५-३=२$ हें उत्तर

तिसरें $\sqrt[४]{५}+\sqrt[४]{३}$ याचा एक गुणक काढायाचा जाणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाउन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt[४]{५}+\sqrt[४]{३}$
गुणक $\sqrt[४]{५}-\sqrt[४]{३}$

$\sqrt{५}+\sqrt[४]{१५}$
$-\sqrt[४]{१५}-\sqrt{३}$

$\sqrt{५}-\sqrt{३}$

पुनः गुणक $\sqrt{५}+\sqrt{३}$

$५-\sqrt{१५}$
$+\sqrt{१५}-३$

$५-३=२$ हें उत्तर

चवथें $\sqrt[३]{७}+\sqrt[३]{३}$ याचा गुणक काढायाचा जाणें हें पद

गुणिलें

गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप आडुन तें अखंड पद होईल

सांगीतली करणी $\sqrt[3]{७}+\sqrt[3]{३}$

गुणक $\sqrt[3]{७^2}-\sqrt[3]{७\times ३}+\sqrt[3]{३^2}$

$७+\sqrt[3]{७^2\times ३}$

$-\sqrt[3]{७^2\times ३}-\sqrt[3]{७\times ३^2}$

$+\sqrt[3]{७\times ३^2}+३$

गुणाकार $\overline{७+३=१०}$ हें उत्तर

पांचवें $\sqrt{५}-\sqrt{क्ष}$ याच्या गुणक काढायाच्या जाणें हें पद गु-णिलें असतां त्याचें करणी रूप आडुन तें अखंड पद होईल

साहावें $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाचा आणें हें पद गु-णिलें असतां त्याचें करणी रूप आडुन तें अखंड पद होईल

सातवें $अ+\sqrt{ब}$ याचा गुणक काढायाच्या आणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप आडुन तें अखंड पद होईल

आठवें $१+\sqrt[3]{२अ}$ याचा गुणक काढायाचा आणें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप आडुन तें अखंड पद होईल

नववें $\sqrt[3]{३}-\frac{३}{२}\sqrt[3]{२}$ याच्या गुणक काढायाच्या आणें हें पद गुणिलें

गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाउन तें अखंड पद होईल

तेरावा प्रकार

ज्या अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत त्यांस बदल अखंड रूप देण्याचा

रीति

१ जेव्हां कोणतेंही एकाकी अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{\text{ब}}{\sqrt{\text{अ}}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशानी ह्मणजे एथें $\sqrt{\text{अ}}$ याणीं गुणावे ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{\text{ब}\sqrt{\text{अ}}}{\text{अ}}$

अथवा जेव्हां तें अपूर्ण बीज या पद्धतीचें आहे $\frac{\text{ब}}{\sqrt[३]{\text{अ}}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[३]{\text{अ}^{२}}$ याणीं गुणावे ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{\text{ब}\sqrt[३]{\text{अ}^{२}}}{\text{अ}}$

आणि जेव्हां या सामान्य पद्धतीचें रूप आहे $\frac{\text{ब}}{\sqrt[\text{न}]{\text{अ}}}$ तेव्हां त्याचे अंश आणि छेद $\sqrt[\text{न}]{\text{अ}^{\text{न}-१}}$ याणीं गुणावे ह्मणजे त्याचें रूप या पद्धतीचें होईल $\frac{\text{ब}\sqrt[\text{न}]{\text{अ}^{\text{न}-१}}}{\text{अ}}$.

२ जेव्हां अपूर्ण बीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत तेव्हां पूर्व १२ प्रकारा प्रमाणें गुणक काढावा असा किं जाणें ते छेद गुणिले असतां त्यांचें करणी रूप जाउन अखंड रूप होतील नंतर अंश आणि छेद त्या गुणाकानीं गुणिले असतां अपूर्ण बीजास इछिलें अखंड छेद रूप होईल

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम $\frac{२}{\sqrt{३}}$ आणि $\frac{३}{२\sqrt[३]{५}}$ या दोन अपूर्ण बीजांस अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{२}{\sqrt{३}}=\frac{२}{\sqrt{३}}\times\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३}}=\frac{२\sqrt{३}}{३}$ हें एक उदाहरणाचें उत्तर

आणि $\frac{३}{२\sqrt[३]{५}}=\frac{३}{२\sqrt[३]{५}}\times\frac{\sqrt[३]{५^२}}{\sqrt[३]{५^२}}=\frac{३\sqrt[३]{५^२}}{२\times५}=\frac{६\sqrt[३]{५^२}}{५}=\frac{६}{५}\sqrt[३]{१२५}$ हें दुसर्‍ये उदाहरणाचें उत्तर

दुसरें $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{३}{\sqrt{५}-\sqrt{२}}\times\frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{\sqrt{५}+\sqrt{२}}=\frac{३\sqrt{५}+३\sqrt{२}}{३}=\frac{\sqrt{५}+\sqrt{२}}{१}=\sqrt{५}+\sqrt{२}$ हें उत्तर

तिसरें $\frac{\sqrt{२}}{३-\sqrt{२}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आतां $\frac{\sqrt{२}}{३-\sqrt{२}}\times\frac{३+\sqrt{२}}{३+\sqrt{२}}=\frac{३\sqrt{२}+२}{९-२}=\frac{३\sqrt{२}+२}{७}$ अथवा $\frac{२}{७}+\frac{३}{७}\sqrt{२}$ हें उत्तर

चवथें $\frac{\sqrt{६}}{\sqrt{७}+\sqrt{३}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

पांचवें $\frac{क्ष}{३+\sqrt{क्ष}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

सहावें $\frac{अ}{अ+\sqrt{ब}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

सातवें $\frac{१०}{\sqrt[३]{७}-\sqrt[३]{५}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

आठवें

आठवें $\frac{३}{\sqrt{८}+\sqrt{१०}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

नववें $\frac{४}{\sqrt{४}+\sqrt{५}}$ या अपूर्ण बीजास अखंड छेद रूप दे

गणितप्रमाण आणि श्रेढी

गणितप्रमाण, एक जातीचे दोन पदांचे वजाबाकीवरून त्यांचे संबंधि आहे. या वजाबाकीस गणितप्रमाणांत उत्तर ह्मणतात.

चार पदें गणितप्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात, जेव्हां प्रथम आणि दुसरें यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें यांचे उत्तराबरोबर आहे.

जसें ३, ७, १२, १६ आणि अ, अ+ब, क, क+ब परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत

गणितश्रेढी तीच होय, जी कित्येक पदांची श्रेणी एकच उत्तरानें चढती किंवा उतरती आहे.

जसें १, ३, ५, ७, ९, ११ इत्यादि, आणि अ, अ+ब, अ+२ब, अ+३ब, अ+४ब, अ+ ५ब, इत्यादि, या श्रेणी गणितप्रमाणांत आहेत, जांत प्रथमेचें उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ब आहे.

गणितप्रमाण आणि श्रेढी यांचे परम उपयोगी अवयव पू

र्दे अंकगणितामध्यें उघड करून सांगीतले आहेत· ते बीज गणितामध्यें या प्रमाणे लिहितात · जसें

अति लाहान पद दाखवायास	अ घे
अति मोटें पद दाखवायास	ज्ञ घे
उत्तर ————————	ड घे
गछ ————————	न घे
सर्वधन ————————	स घे

तेव्हां गणितप्रमाणांतील मुख्य गुण या पुढील समीकरणांत दाखविला जातो, ह्मणजे

१ , ज्ञ=अ+ड·(न−१)

२ , अ= ज्ञ−ड·(न−१)

३ , स=(अ+ज्ञ)½न

४ , स=(ज्ञ−½ड·न−१)न

५ , स=(अ+½ड·न−१)न

आणि जेव्हां प्रथम पद अ=० आहे तेव्हां वरचे समीकरणास हें रूप होतें·

ज्ञ=ड·(न−१)

स=½नज्ञ

उदाहरणें

प्रथम , एक चढती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १ उत्तर २

आणि

आणि गछ २१ तीचें सर्वधन काय होईल.

प्रथम, $१+२\times२०=१+४०=४१$ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{१+४१}{२}\times२०=२१\times२०=४२०$ हें इछिलें सर्वधन.

दुसरें, एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १९९ उत्तर ३ आणि गछ ६७ आहे तीचें सर्वधन काय होईल.

प्रथम, $१९९-३\times६६=१९९-१९८=१$ हें अतिलाहान पद.

तेव्हां $\frac{१९९+१}{२}\times६७=१००\times६७=६७००$ हें इछिलें सर्वधन.

तिसरें, १, २, ३, ४, ५, ६ इत्यादि मूळसंख्यांची श्रेणी, गछ १०० पर्यंत आहे तीचें सर्वधन काय होईल.

उत्तर ५०५०

चवथें*, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम संख्यांची श्रेणी गछ ९९ पर्यंत आहे तीचें सर्वधन काय होईल.

उत्तर ९८०१

पांचवें

---

* १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकांचे गणित श्रेढीचें न गछ पर्यंत सर्वधन त्या गछाचे (न²) वर्गाबरोबर आहे - असें

जर १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि पदें असतील.

तेव्हां $१^२, २^२, ३^२, ४^२, ५^२$ हीं प्रथम, दुसरें, तिसरें इत्यादि पदांची सर्वधनें होतील. याप्रमाणें

$०+१=१$ अथवा $१^२$ हें प्रथम पदाचें सर्वधन.
$१+३=४$ ——— $२^२$ हें दोन पदांचें सर्वधन.
$४+५=९$ ——— $३^२$ हें तीन पदांचें सर्वधन.
$९+७=१६$ ——— $४^२$ हें चार पदांचें सर्वधन.
$१६+९=२५$ ——— $५^२$ हें पांच पदांचें सर्वधन आहे, इत्यादि

ह्मणोन वरच्या प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण याणें $१+२\cdot(न-१)=१+२न-२=२न-१$

ह्मणजे

पांचवें इताल्या मुलकांत वेनीत्स्या या नामें एक शहर आहे तेथे सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदय पर्यंत प्रथम १ दुसर्ये वेळे २ तिसर्ये वेळे ३ अशारीतीनें चोविसाव्ये वेळे २४ पर्यंत घडाळ्यांत अवर वाजतात तेव्हां एकदिवसांत अवरांचे टोले किती वाजतात अवर म्हणजे १ तास अथवा घटका २ १/२

उत्तर ३०० टोले

साहावें २, ४, ६, ८, १०, १२, इत्यादि या सम पद श्रेणींत ३६५ वें पद काय आहे

उत्तर ७३०

सातवें गणितश्रेढींतील एक उतरती श्रेणी आहे जीचें प्रथम पद १० उत्तर १/३ आणि गछ २१ तीचें सर्वधन किती होईल

उत्तर १४०

आठवें एकसरळ रेघेंत एक एक यार्डाचे अंतरानें १०० खडे ठेविले आहेत आणि प्रथम खडयापासून एक यार्डाचे अंतरानें पांटी ठेविली आहे आणि एक मनुष्यास आज्ञाजाली किं त्याणें एक एक खेपेस त्यां खडयांतील एक एक खडा त्या पांटींत टाकावा तेव्हांसर्व खडे त्या पांटींत येतपर्यंत त्या मनुष्यास किती चालावें लागेल

उत्तर मैल ५ यार्ड १३००

म्हणजे हे लोटें पद आहे तेव्हां गछ न आहे ; या लोझे पदाशीं प्रथम पद १ मिळवून दोन शेवट पदांची बेरीज २ न ही होईल, अथवा त्या बेरिजेचें अर्ध न होईल ; तेव्हां वरचे तिसर्ये समीकरणानें स सर्वधन = न · न = न^{२}, यावरून स्पष्ट होतें किं सर्वदा दोन शेवटांचे बेरिजेचें अर्धआणि गछ एकच आहे ; आणि सर्वधन आणि त्या गछाचा वर्ग (न^{२}) एकच आहे ·

गणित

गणितश्रेढीचें व्यवहारीं संगतीकरण

उदाहरणें

प्रथम , एक पळटण त्रिकोणाकृति उभें आहे ; त्याचे प्रथम ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत ३ तिसरींत ५ अशारीतीनें चढत्या तीस ओळी आहेत , तर त्या त्रिकोणाकृति पळटणांतील सर्व मनुष्यें किती होतील ·

उत्तर ९०० मनुष्यें

दुसरें , फौजेंतील एक टोळीस सर्कार आज्ञा जाली किं त्याणीं पुढें सांगतो अशा मजला करून १२ दिवसांत एक अमुक गावीं पोंचावें , त्यांत प्रथम दिवशीं ६ मैल दुसर्ये दिवशीं १०½ मैल इत्यादि प्रत्यहीं ४½ मैल अधिक या प्रमाणें , तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं किती मैल चालावें लागेल आणि सर्व मजला मिळून किती मैल होतील ·

उत्तर ५५½ मैल शेवटील मजल

आणि ३६९ मैल सर्वमिळून ·

तिसरें , एक किल्यास वेढा देउन फौज बसली होती त्यांतील इंजनेरांचे एक ब्रिंगेडा※नें तो किल्ला घेण्यास आरंभ केला, प्रथम रात्रीं त्याणें १५ यार्डे साप खणिला दुसर्ये रात्रीस १३ यार्डे, इत्यादि

※ ब्रिगेड ह्मणजे जमात, इंजनेरांचे एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्यें असतात · ज्यांचा दोन टोळ्या करितात , जेव्हां एक टोळी हातानीं काम करून साप वाढवित्ये तेव्हां दुसरी टोळी त्यांस सामान पुरवित्ये ; आणि जेव्हां प्रथम टोळी थकली तेव्हां तीस बदलून दुसरी टोळी काम करित्ये · तें अशारीतीनें किं ते सर्व आपआपल्ये पाळी प्रमाणें सापाचे शिरावर काम करितात · साप ह्मणजे खाडा, ज्याची रुंदी ३ फुट आणि ओंडी ४ फुट · या शिवाय याकामांत दुसरे खाडे करितात , ज्यांची रुंदी १० फुटपासून १५ फुटपर्यंत असल्ये त्यांस ट्रेंच ह्मणतात ·

प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केलें आणि सर्व मिळोन साप किती यार्ड खणिला तें सांग.

उत्तर { ७ रात्री काम केलें
६३ यार्ड साप खणिला

चौथें. कित्येक गेबीयंन* साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे किं प्रतिओळीचे गेबीयंनांचे संख्येचें उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत ९ गेबीयंन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेबीयंन किती आणि प्रतिओळीचे गेबीयंन संख्येंत अंतर किती तें सांग.

उत्तर { १ गेबीयंन प्रतिओळीचें अंतर.
३९ गेबीयंन साहा ओळी मिळोन.

पांचवें. दोन फौजांचा टोळ्या १११ मैलांचे अंतरानें होत्या, नंतर जें एक चांगलें स्थळ दोहों टोळ्यांपासून बराबर अंतरानें होतें, तेथे जाउन राहावें ऐसें दोहोंचे चित्तीं येउन निघाल्या, परंतु वेगळाल्ये समयांत; प्रथम टोळी प्रत्यहीं पूर्व दिवसापेक्षां ३ तीन मैल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी टोळी ६ साहा मैल अधिक; दोन टोळ्या

* गेबीयंन ह्मणजे कणग्यासारिखी शिलिंदररूपाची वेत अथवा चिंवी इत्यादिकांनीं केलेली टोपली आहे, जीचीं दोनही तोंडें उघडीं असतात; त्यांत जीचा व्यास २ फुट आणि उंची ३ फुट त्या टोपल्या श्रेंचाचे बाजूवर ठेवून त्यांत माती भरितात; आणि जीचा व्यास आणि उंची याहून अधिक आहे त्या मोरचे इत्यादि कामांत उपयोगी आहेत; तसें जीचा व्यास आणि उंची याहून उणी आहे त्या लाहान कामांत उपयोगी आहेत परंतु या जातीच्या टोपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

त्या

त्या चांगल्ये स्थळीं एकदांच येडुन पावल्या; ह्मणजे प्रथम टोळी कुच केल्ये दिवसापासून पांचव्ये दिवशीं, आणि दुसरी टोळी कुच केल्ये दिवसापासून चवथ्ये दिवशीं तेव्हां प्रतिटोळीनें प्रतिदिवशीं किती मेल मजल केली तें सांग.

उत्तर { प्रथम टोळीची श्रेढी — $२\frac{१}{२०}$, $६\frac{५}{२०}$, $११\frac{२}{२०}$, $१५\frac{५}{२०}$, $२०\frac{३}{२०}$
दुसर्ये टोळीची श्रेढी — $४\frac{१}{८}$, $१०\frac{१}{८}$, $१६\frac{१}{८}$, $२२\frac{१}{८}$

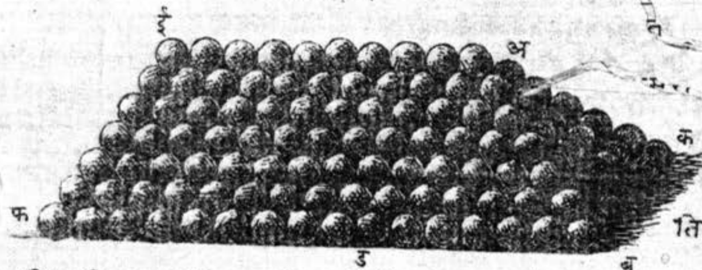
सम आकृतींत ठेविलेल्ये गोळ्यांचे राशीचें गणित.

तोफेचे गोळ्यांचा राशी बहुतकरून तीन रीतींहीं करितात, त्यांस पायांचे आकृतीं वरून वेगळालीं नामें होतात, पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि ह्मणतात; पाया चोरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काटकोन चौकोन असल्यास काटकोन चौकोन राशि.





अबकड प्रथम आकृति त्रिकोणराशि आहे.
ईफगह दुसरी आकृति चौरसराशि आहे.



अबकडईफ तिसरी आकृति काटकोन चौकोनराशि आहे.

गोळ्यांचे त्रिकोणाकृती थर एकावर एक रचिल्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होत्ये, अशारीतीनें किं प्रतिथराची एकेक बाजू आरंभापासून एकेक गोळ्यानें उणी होत आत्ये, अशी किं शेवटास त्या राशीवर एकचं गोळा असतो.

गोळ्यांचे चौरसथर एकावर एक रचिल्यापासून चौरस राशि उत्पन्न होत्ये, अशारीतीनें किं प्रतिथराचे एकेक बाजूस आरंभापासून एकेक गोळा उणा होत आतो, असा किं शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो.

त्रिकोण आणि चौरस राशींमध्यें, बाजू किंवा मुखें समबाजू त्रिकोण आहेत; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणित श्रेढी आहेत, जीचें प्रथमं पद १ शेवटील पद आणि गछ पायाचे थरांतील गोळ्यांचे संख्ये बरोबर; कारण थरांची संख्या अथवा आकृतीचे कोणत्येही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदा पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्ये बराबर आहे; त्रिकोण अथवा चौरस राशीचा बाजू किंवा मुखें यांस गणित त्रिकोण ह्मणतात; आणि त्या गणित त्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्येस त्रिकोण संख्या ह्मणतात; अबक प्रथम आकृतींतील आणि डेफग दुसर्ये आकृतींतील गणित त्रिकोण आहेत.

काटकोन चौकोन राशि कल्पनेकरून या प्रमाणें उत्पन्न होत्ये, ह्मणजे अबकड चौकोन राशीवर अड मुख किंवा बाजूवर तितके गणित त्रिकोण ठेविले, जितके पायाचे बड बाजूचे बाहेर त्याच बाजूंत गो-

ळे

ळे आहेत ; ते सर्व त्या मुखाचे बरोबर आहेत ; आणि त्या गणित त्रिकोणांची संख्या सर्वदा याचे बरोबर आहे , जे वरचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा · अथवा पायाचे लाहान आणि लोढे बाजूचे वजा बाकी बरोबर आहे ·

साहावें , अब कड प्रथम आकृती ह्मणजे त्रिकोणराशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे ·

पृथक्करण , सांगीतल्ये राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत , आणि ते प्रत्येकीं समबाजू त्रिकोण आहेत ; ह्मणोन या प्रत्येकांतील गोळे गणितश्रेढी आहेत , ज्यांचें प्रथमपद शेवटीलपद आणि गच्छ हीं कळलीं आहेत ; यापासून निघतें किं या आठ थरांची अथवा आठश्रेढींची बेरीज या त्रिकोणराशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे ; तेव्हां

त्रिकोणराशींतील प्रथम अथवा
खालचे त्रिकोण थरांतील गोळ्यांचीसंख्या = (८+१) × ४ = ३६
दसरा = (७+१) × ३½ = २८
तिसरा = (६+१) × ३ = २१
चौथा = (५+१) × २½ = १५
पांचवा = (४+१) × २ = १०
साहावा = (३+१) × १½ = [illegible]
सातवा = (२+१) × १ = ३
आठवा = (१+१) × ½ = १
बेरींज १२० गोळे सांगीतल्ये राशींतील ·

सातवे

सातवें, ईफगह दुसरी आकृति, याचौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ, जीचे ईफ खालचे थराचे ओळींत आठ गोळे आहेत.

पृथक्करण

खालचे ओळींत गोळे ८ आहेत आणि तीचे वरचींत ७ च आहेत; ह्मणोन त्या ओळी या श्रेढींत आहेत ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थराचें वर्गमूळ आहे, जा थरापासून चौरस राशि उत्पन्न जाली; यापासून निघतें कीं या मूळपदांचे वर्गांची बेरीज इछिली गोळ्यांची संख्या आहे; ह्मणजे वर्गांची बेरीज $८^२+७^२+६^२+५^२+४^२+३^२+२^२+१^२=२०४$ आहेत, हे सांगीतल्ये राशींतील इछिले गोळे जाले.

आठवें, अबकडईफ तिसरी आकृति, या काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काढ. जींत बफ=१६ आणि बक=७

पृथक्करण, इछिली काटकोन चौकोनराशि, अबकड चौरस राशि, जीचे खालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे आहेत; आणि याशिवाय ८ गुणित त्रिकोण, जांचे आदि अंत आणि गछ कळले आहेत त्यांगीं मिळोन आला आहे. याजकरितां जर चौरस राशीचे गोळ्यांची संख्या = १४०

त्यांत श्रेढींची बेरीज मिळाली = २५२

सर्व मिळोन काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या = ३९२ गोळे

प्रथम

प्रथम टीप

या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोणराशि आणि चौकोन राशि आणिखीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढितां येईल; अ कोष्टक खालचे थराचे एकओळीचे गोळ्याची संख्या १ यापासून ४० पर्यंत दाखवितो. ब कोष्टक त्रिकोणसंख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या. क कोष्टक त्रिकोणसंख्यांची बेरीज दाखवितो. म्हणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बेरीज, ज्या संख्यांस बहुतेक शंकुसंख्या म्हणतात; ड कोष्टक अ कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो, म्हणजे प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या; आणि ई कोष्टक या चौरस थरांची बेरीज अथवा चौरसराशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

क	ब	अ	ड	ई
शंकु संख्या	त्रिकोण संख्या	मूळ अंक	मूळ अंकांचे वर्ग	या वर्गांची बेरीज
१	१	१	१	१
४	३	२	४	५
१०	६	३	९	१४
२०	१०	४	१६	३०
३५	१५	५	२५	५५
५६	२१	६	३६	९१
८४	२८	७	४९	१४०
१२०	३६	८	६४	२०४
१६५	४५	९	८१	२८५
२२०	५५	१०	१००	३८५
२८६	६६	११	१२१	५०६
३६४	७८	१२	१४४	६५०
४५५	९१	१३	१६९	८१९
५६०	१०५	१४	१९६	१०१५
६८०	१२०	१५	२२५	१२४०
८१६	१३६	१६	२५६	१४९६
९६९	१५३	१७	२८९	१७८५
११४०	१७१	१८	३२४	२१०९
१३३०	१९०	१९	३६१	२४७०
१५४०	२१०	२०	४००	२८७०
१७७१	२३१	२१	४४१	३३११
२०२४	२५३	२२	४८४	३७९५
२३००	२७६	२३	५२९	४३२४
२६००	३००	२४	५७६	४९००
२९२५	३२५	२५	६२५	५५२५
३२७६	३५१	२६	६७६	६२०१
३६५४	३७८	२७	७२९	६९३०
४०६०	४०६	२८	७८४	७७१४
४४९५	४३५	२९	८४१	८५५५
४९६०	४६५	३०	९००	९४५५
५४५६	४९६	३१	९६१	१०४१६
५९८४	५२८	३२	१०२४	११४४०
६५४५	५६१	३३	१०८९	१२५२९
७१४०	५९५	३४	११५६	१३६८५
७७७०	६३०	३५	१२२५	१४९१०
८४३६	६६६	३६	१२९६	१६२०६
९१३९	७०३	३७	१३६९	१७५७५
९८८०	७४१	३८	१४४४	१९०१९
१०६६०	७८०	३९	१५२१	२०५४०
११४८०	८२०	४०	१६००	२२१४०

ह्मणोन

ह्मणोन जर त्रिकोण राशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १८ गोळे असतील,तर सर्वराशींतील गोळे १३३० होतील ; आणि तशीच चौरस राशींतील गोळे २४७० होतील ; या रीतीनेंही चौरस किंवा त्रिकोण राशींचा संख्या सांगीतल्या असतां स्वल्पानें खालचे थराचे ओळींची संख्या कळेल ·

पूर्व कोष्टकांपासून काटकोनचौकोन राशीचीही संख्या थोडक्यानें कळेल,आंत लाहान बाजूंत ४० पेक्षां अधिक गोळे नसतील , तसें लाहान आणि मोटी या बाजूंची वजाबाकी ४० पेक्षां अधिक नसेल · जसें एक काटकोनचौकोन राशीचे लाहान बाजूंत १५ आणि मोटे बाजूंत ३५ गोळे असतील , आरंभीं चौकोन राशीची ह्मणजे कल्पनेनें जीपासून काटकोन चौकोनराशि आली आहे तीची संख्या कोष्टकांतून काढावी; ह्मणजे एक चौरसराशीची संख्या काढावी , जीचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत ; ह्मणजेही कोष्टकांत १२४० आहे · नतर गणित त्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १५ आहे त्याचे समोरची त्रिकोणसंख्या १२० यांस २० नीं गुणावी , कारण चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत , नंतर यांस चौरस राशीची संख्या मिळवावी, ह्मणजे १२०×२०+१२४०=२४००+१२४०=३६४० ही सांगीतल्ये काटकोन चौकोनराशींतील गोळ्यांची इछिली संख्या आली ·

दुसरी टीप

पुढील बीजाचे सारणीकोष्टक कोणत्येही राशींतील गोळ्याची

संख्या

संख्या स्वल्पश्रमानें आणि त्वरेनें काढायास कामांत येतात.

त्रिकोणराशीचें गणित करायास हा सारणी कोष्टक आहे. $\Big\}\ \frac{(\text{न}+२)\times(\text{न}+१)\times\text{न}}{६}$

चौरसराशीचें गणित करायास हा सारणी कोष्टक आहे. $\Big\}\ \frac{(\text{न}+१)\times(२\text{न}+१)\times\text{न}}{६}$

या प्रत्येकांत न अक्षर खालचे थराचे एकओळीची संख्या दाखविते । ह्मणजे जीचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत त्या त्रिकोणराशीमध्यें सगळी संख्या हीच होईल $\frac{(३०+२)\times(३०+१)\times ३०}{६}=$ ४९६० गोळे.

चौरसराशीमध्यें जीचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत तीची संख्या हीच होईल $\frac{(३०+१)\times(६०+१)\times ३०}{६}=$ ९४५५ गोळे.

काटकोन चौकोनराशीचा सारणी कोष्टक हा आहे.

$\frac{(\text{न}+१+३\text{म})\times(\text{न}+१)\times\text{न}}{६}$ यांत न अक्षर थरांची संख्या दाखविते, आणि म अक्षर वरचे थराची एकोन संख्या दाखविते. जसें. एक काटकोन चौकोनराशीमध्यें ३० थर आहेत आणि वरचे थरांत ३१ गोळे आहेत $\frac{(६०+१+९०)\times(३०+१)\times ३०}{६}=$ २३४०५ गोळे

तिसरी टीप

एक उपयोगी रीति, सुगम आहे, जीणें तीन प्रकारच्या पुर्या राशि, ह्मणजे त्रिकोणराशि चौरसराशि आणि काटकोन चौकोनराशि, यांतील गोळ्यांची संख्या निघत्ये, ह्मणोन आरंभीं तिस-

र्ये

यें आकृतीवर लक्ष्य ठेवून कर, तेव्हां

(बड+अ+क)×⅓ बडक=त्रिकोणराशींतील गोळ्यांची संख्या·

(ईफ+ईफ+ग)×⅓ गफह=चौरसराशींतील गोळ्यांची संख्या·

(बफ+बफ+अई)×⅓ अबक=काटकोनचौकोनराशींतील गोळ्यांची संख्या·

यांतून एकसामान्यरीति निघत्ये, पायाचे बाजूचे एक ओळींत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तीशीं समांतर दुसर्येकडील बाजूचे ओळींतील संख्या (ती एक किंवा अनेक असतील ते) आणि पायाशीं समांतर राशिशिर ओळींतील संख्या, अशा या तीन संख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिर्कस बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयांशानें गुणावी, तो गुणाकार राशींतील इच्छिली संख्या होईल·

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी

भूमितिप्रमाण ह्मणजे एक पद दुसर्ये पदाचा काय भाग आहे अथवा काय गुणक आहे, अथवा एक पद दुसर्ये पदांत किती वेळ आतें असा विचार कर्ता पदसंबंधि आहे — परस्पर मिळविल्ये दोन पदांतील प्रथम पदास अग्रसर ह्मणतात, आणि दुसर्ये पदास अनुअसर· त्याचें गुणोत्तर ह्मणजे भागाकार आहे· जें एक दुसर्यानें भागून

२६

उत्पन्न

उत्पन्न होते.

चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां दोन युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे, अथवा जेव्हां प्रथम पद दुसऱ्ये पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे, तसाच तिसरें चौथ्याचा. जसें ३, ६, ४, ८, आणि अ, अर, ब, बर, हीं भूमितिप्रमाणांत आहेत.

कारण $\frac{६}{३}=\frac{८}{४}=२$ आणि $\frac{अर}{अ}=\frac{बर}{ब}=र$, आणि त्यांस या रीतीनें लिहितात. जसें ३ : ६ :: ४ : ८, इत्यादि, अंकगणितामध्यें पाहा.

भूमितिश्रेढी तीच होय, जांतील सर्व पदांचें गुणोत्तर अनुक्रमानें एकच आहे. जसें १, २, ४, ८, १६, इत्यादि. जांत गुणोत्तर २ आहे.

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे, किं कोणत्येही दोन पदांचा गुणाकार, अथवा कोणत्येही एक पदाचा वर्ग, प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारा बरोबर आहे, जीं दोन पदें त्यांपासून बराबर अंतरानें दोहोंकडून घेतलीं आहेत, ह्मणजे जसें या पदांतील,

१, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, इत्यादि. $१\times६४=२\times३२=४\times१६=८\times८=६४$

कोणत्येही भूमितिश्रेढींतील अर

अ अतिलाहान पद दारववितो

ज्ञ अतिमोटें पद ———

र गुणोत्तर ———

न

न गच्छ ———

स सर्वधन ———

तेव्हां या पदांतील कोणत्येही एक पदाची किमत दुसर्‍ये पदांचे किमतीं पासून निघेल या पुढील सामान्य समीकरणां वरून.

१, $र = \left(\frac{ज्ञ}{अ}\right)^{\frac{१}{न-१}}$

२, $ज्ञ = अ \times र^{न-१}$

३, $अ = \frac{ज्ञ}{र^{न-१}}$

४, $न = \frac{लॉ॰\frac{रज्ञ}{अ}}{लॉ॰र} = \frac{लॉ॰र + लॉ॰ज्ञ - लॉ॰अ}{लॉ॰र}$

५, $स = \frac{र^{न}-१}{र-१} \times अ = \frac{र^{न}-१}{र-१} \times \frac{ज्ञ}{र^{न-१}} = \frac{रज्ञ - अ}{र-१}$

जेव्हां श्रेणी अनंत आहे, तेव्हां अतिलाहान पद अ शून्य आहे, आणि सर्वधन $स = \frac{रज्ञ}{र-१}$ होतें.

कोणत्येही चढत्ये भूमितिश्रेणीमध्यें अथवा कोणत्येही श्रेढीमध्यें जाचा आरंभ १ पासून होतो, तर तिसरें पांचवें सातवें इत्यादि पदें वर्ग होतील; चौथें सातवें दाहावें इत्यादि पदें घन होतील; आणि सातवें वर्ग आणि घनही होईल. जसें या श्रेणींत १, र, $र^{२}$, $र^{३}$, $र^{४}$, $र^{५}$, $र^{६}$, $र^{७}$, $र^{८}$, $र^{९}$, इत्यादि, $र^{२}$, $र^{४}$, $र^{६}$, $र^{८}$, हे वर्ग आहेत; $र^{३}$, $र^{६}$, $र^{९}$, हे घन आहेत; आणि $र^{६}$ हा वर्ग आणि घनही आहे.

उतरती श्रेढीमध्यें, गुणोत्तर र अपूर्ण आहे आणि तेव्हां $स = \frac{१-र^{न}}{१-र} अ$.

जर न अनंत असेल तर $स = \frac{अ}{१-र}$ यांत अ प्रथम पद दाखवितो.

जेव्हां

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, असें अ, अर, ब, बर, अथवा २, ६, ४, १२, तेव्हां त्या पदांचीं पुढील कोणतींही रूपें परस्पर प्रमाणांत होतील.

१ समरीतीनें अ : अर : : ब : बर; अथवा २ : ६ : : ४ : १२,
२ व्यस्त —— अर : अ : : बर : ब; —— ६ : २ : : १२ : ४,
३ परावर्त —— अ : ब : : अर : बर; —— २ : ४ : : ६ : १२,
४ संयुक्त —— अ : अ+अर : : ब : ब+बर; —— २ : ८ : : ४ : १६,
५ वियुक्त —— अ : अर–अ : : ब : बर–ब; —— २ : ४ : : ४ : ८,
६ मिश्र —— अर+अ : अर–अ : : बर+ब : बर–ब; ८ : ४ : : १६ : ८,
७ गुणाकार —— अक : अरक : : बक : बरक; —— २×३ : ६×३ : : ४ : १२,
८ भागाकार —— $\frac{अ}{क}$: $\frac{अर}{क}$: : ब : बर; —— १ : ३ : : ४ : १२,

९ अ, ब, क, ड, हीं चार पदें समस्वर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां अ : ड : : अ~ब : क~ड; अथवा जेव्हां तीं व्युत्क्रम पदें $\frac{१}{अ}$, $\frac{१}{ब}$, $\frac{१}{क}$, $\frac{१}{ड}$, गणित प्रमाणांत आहेत.

उदाहरणें

प्रथम, एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद १ आहे, गुणोत्तर २, आणि गच्छ १२; ईचें सर्वधन काय होईल.

आतां $१ \times २^{११} = १ \times २०४८$ हें अति मोटें पद आहे.

तेव्हां $\frac{२०४८ \times २ - १}{२ - १} = \frac{४०९६ - १}{१} = ४०९५$ हें इछिलें सर्वधन.

दुसरें, एक भूमितिश्रेढीचें प्रथम पद $\frac{२}{३}$ आहे, गुणोत्तर $\frac{१}{२}$,

आणि

आणि गच्छ ८, तीचें सर्वधन काय होईल.

आतां $\frac{१}{३}\times(\frac{१}{२})^{७}=\frac{१}{३}\times\frac{१}{१२८}=\frac{१}{३८४}$ हें अतिस्रोटें पद.

तेव्हां $(\frac{१}{३}-\frac{१}{३८४}\times\frac{१}{२})\div(१-\frac{१}{२})=(\frac{१}{३}-\frac{१}{७६८})\div\frac{१}{२}=\frac{२५५}{७६८}\times\frac{२}{१}=$ $\frac{२५५}{३८४}$. हें इछिलें सर्वधन.

तिसरें. १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गच्छ २० याचें सर्वधनकाय.

उत्तर १०४८५७५

चवथें. $१, \frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{८}, \frac{१}{१६}, \frac{१}{३२}$, इत्यादि गच्छ ८ याचें सर्वधन काय.

उत्तर $१\frac{१२७}{१२८}$

पांचवें. $१, \frac{१}{३}, \frac{१}{९}$ $\frac{१}{२७}$ $\frac{१}{८१}$ इत्यादि गच्छ १० याचें सर्वधन काय.

उत्तर $१\frac{३२८०}{६५६१}$

साहावें. १, २, ४, ८, १६, ३२ इत्यादि गच्छ १०० याचें सर्वधन काय.

उत्तर १२६७६५०६००२२८२२९४०१४९६७०३२०५३७५

सातवें. कोणा एक मनुष्याजवळ बहुत चांगला एक घोडा होता तो कोणी होशी मनुष्यानें पाहुन विकत मागीतला. तेव्हां त्याणें आपली प्रतिज्ञा सांगीतली कि याचे चार नाल मिळोन चुका ३२ आहेत. त्यास प्रथम चुकेस रेंस ५ पुढें एकेक चुकेस त्याचे त्याचे दुपटीनें

बोल्ते

वाढले याचे रुपये जेहोतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळेल · म्हणोन त्या प्रमाणें त्या होशीस तो घोडा घेणें तर किती रुपये द्यावे लागतील ·

रु॰ पा॰ रें॰
उत्तर ५३६८७०९१ ॥ ० ॥ ७५

अनंत श्रेणी

ही अनंतश्रेणी , जांत संयुक्तपद भाजक आहे अशे भागाकारापासून आणि संयुक्त करणीपदाचें मूळ काढिल्यापासून उत्पन्न होत्ये, अथवा दुसर्ये कांहीं सामान्यरीतीनें · आणि ती कितीही वाढविली तरीं अंत पावत नाहीं · असे अपूर्णांक गणितांत दशांश ※

परंतु कित्येक पदें प्रथम उत्पन्न करून, श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल ; आणि तपशीलाचा श्रम केल्यावांचून अशा रीतीनें श्रेणी पुढें चालवितां येईल ·

प्रथम कृत्य

अपूर्ण पदांस भागाकारानें अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें

रीति ·

भागाकाररीतीनें अंश छेदानीं भागावे ; आणि हें भागाकार

※ या अनंत श्रेणीची रीति डाक्टर वालिस साहेब यांहीं प्रथम कामांत आणिली ; आणि संन १६५७ इसवी मध्यें त्याणीं गणित पुस्तकें छापिलीं त्यांत $\frac{अ}{अ-र}$ हें अपूर्णबीज चालत्ये भागाकारानें भागतां भागतां ही अनंतश्रेणीरीति उत्पन्न केली · $अ + अर + अर^2 + अर^3 + अर^4 +$ इत्यादि ·

कृत्य

रुत्य इछा आहे पर्यंत वाढवावें , ह्मणजे इछिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल ·

उदाहरणें

प्रथम $\frac{२अब}{अ+ब}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे ·

$$अ+ब)\,२अब\,(२ब-\frac{२ब^{२}}{अ}+\frac{२ब^{३}}{अ^{२}}-\frac{२ब^{४}}{अ^{३}}+ \text{इत्यादि·}$$

$$\underline{२अब+२ब^{२}}$$

$$-२ब^{२}$$

$$\underline{-२ब^{२}-\frac{२ब^{३}}{अ}}$$

$$+\frac{२ब^{३}}{अ}$$

$$\underline{+\frac{२ब^{३}}{अ}+\frac{२ब^{४}}{अ^{२}}}$$

$$-\frac{२ब^{४}}{अ^{२}}$$

$$\underline{-\frac{२ब^{४}}{अ^{२}}-\frac{२ब^{५}}{अ^{३}}}$$

$$+\frac{२ब^{५}}{अ^{३}} \text{ इत्यादि·}$$

दुसरें $\frac{१}{१-अ}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे

$१-अ)\ १\ (१+अ+अ^{२}+अ^{३}+अ^{४}+$ इत्यादि.

$$
\begin{array}{l}
१-अ \\
\hline
+अ \\
+अ-अ^{२} \\
\hline
+अ^{२} \\
+अ^{२}-अ^{३} \\
\hline
+अ^{३} \\
+अ^{३}-अ^{४} \\
\hline
+अ^{४}\ \text{इत्यादि}
\end{array}
$$

तिसरें $\frac{ब}{अ+क}$ यास अनंतश्रेणीचें रूप दे

उत्तर $\frac{ब}{अ}\times\left(१-\frac{क}{अ}+\frac{क^{२}}{अ^{२}}-\frac{क^{३}}{अ^{३}}+\right.$ इत्यादि.)

चोथें $\frac{अ}{अ-ब}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१+\frac{ब}{अ}+\frac{ब^{२}}{अ^{२}}+\frac{ब^{३}}{अ^{३}}+$ इत्यादि.

पांचवें $\frac{१-क्ष}{१+क्ष}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१-२क्ष+२क्ष^{२}-२क्ष^{३}+२क्ष^{४}-$ इत्यादि.

साहावें

साहावें , $\frac{\text{अ}^{२}}{(\text{अ}+\text{ब})^{२}}$ यास अनंतश्रेढींत वाढीव.

उत्तर $१-\frac{२\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{३\text{ब}^{२}}{\text{अ}^{२}}-\frac{४\text{ब}^{३}}{\text{अ}^{३}}+$ इत्यादि

सातवें , $\frac{१}{१+१}=\frac{१}{२}$ यास अनंतश्रेढींत वाढीव ·

दुसरें कृत्य·

संयुक्त करणीपदास अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें ·

रीति

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें , आणि हें मूळकृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें , म्हणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उत्पन्न होईल ; परंतु ही रीति वर्गमूळ काढायास उपयोगी आहे , आणि याहून मोठ्या घाताचें मूळ काढायास बहुत श्रम पडतो ·

उदाहरणें

प्रथम $\text{अ}^{२}-\text{क्ष}^{२}$ याचें अनंतश्रेणींत मूळ काढ ·

$$\text{अ}^{२}-\text{क्ष}^{२}\left(\text{अ}-\frac{\text{क्ष}^{२}}{२\text{अ}}-\frac{\text{क्ष}^{४}}{८\text{अ}^{३}}-\frac{\text{क्ष}^{६}}{१६\text{अ}^{५}}-\frac{५\text{क्ष}^{८}}{१२८\text{अ}^{७}}\right.\ \text{इत्यादि}\cdot$$

$$\text{अ}^{२}$$

$$२\text{अ}-\frac{\text{क्ष}^{२}}{२\text{अ}}\quad)-\text{क्ष}^{२}$$

$$-\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{क्ष}^{४}}{४\text{अ}^{२}}$$

$$२\text{अ}-\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{अ}}-\frac{\text{क्ष}^{४}}{८\text{अ}^{३}}\quad)-\frac{\text{क्ष}^{४}}{४\text{अ}^{२}}$$

$$-\frac{\text{क्ष}^{४}}{४\text{अ}^{२}}+\frac{\text{क्ष}^{६}}{८\text{अ}^{४}}+\frac{\text{क्ष}^{८}}{६४\text{अ}^{६}}$$

$$२\text{अ}-\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{अ}}-\frac{\text{क्ष}^{४}}{४\text{अ}^{३}}-\frac{\text{क्ष}^{६}}{१६\text{अ}^{५}}\quad)-\frac{\text{क्ष}^{६}}{८\text{अ}^{४}}-\frac{\text{क्ष}^{८}}{६४\text{अ}^{६}}$$

$$-\frac{\text{क्ष}^{६}}{८\text{अ}^{४}}+\frac{\text{क्ष}^{८}}{१६\text{अ}^{६}}+\frac{\text{क्ष}^{१०}}{६४\text{अ}^{८}}+\frac{\text{क्ष}^{१२}}{२५६\text{अ}^{१०}}$$

$$-\frac{५\text{क्ष}^{८}}{६४\text{अ}^{६}}\ \text{इत्यादि}$$

दुसरें

दुसरें $\sqrt{१+१} = \sqrt{२}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१ + \frac{१}{२} - \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

तिसरें, $\sqrt{१-१}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $१ - \frac{१}{२} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६} - \frac{५}{१२८}$ इत्यादि.

चोथें, $\sqrt{अ^{२} + क्ष}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

पांचवें, $\sqrt{अ^{२} - २बक्ष - क्ष^{२}}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

तिसरें कृत्य.

कोणत्येंही द्वियुक्पदाचें मूळ काढायाचें, अथवा द्वियुक्पद करणीस अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

हें कृत्य पुढील सारणी कोष्टकांपासून होतें, असें कि त्यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुक्पदाचीं अक्षरें ठेविल्यानें. ह्मणजे.

$$(प + पक)^{\frac{म}{न}} = प^{\frac{म}{न}} + \frac{म}{न} अक + \frac{म-न}{२न} बक + \frac{म-२न}{३न} कक + इत्यादि.$$

प, प्रथम पद दारवविते.

क; दुसरें पद प्रथमानें भागिलें तें दारवविते.

$\frac{म}{न}$, घात किंवा मूळ याचा प्रकाशक दारवविते.

अ, ब, क, ड, इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वींचीं पदें दारववितात -

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम, $अ^२+ब^२$ याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

एथे $प = अ^२$, $क = \frac{ब^२}{अ^२}$, $\frac{म}{न} = \frac{१}{२}$; याजकरितां

$प^{\frac{म}{न}} = (अ^२)^{\frac{१}{२}} = अ = अ$ हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{म}{न}\, अक = \frac{१}{२} \times अ \times \frac{ब^२}{अ^२} = \frac{ब^२}{२अ} = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद

$\frac{म-न}{२न}\, बक = \frac{१-२}{४} \times \frac{ब^२}{२अ} \times \frac{ब^२}{अ^२} - \frac{ब^४}{२\cdot४ अ^३} = क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}\, कक = \frac{१-४}{६} \times - \frac{ब^४}{२\cdot४ अ^३} \times \frac{ब^२}{अ^२} = \frac{३ब^६}{२\cdot४\cdot६ अ^५} = ड$ हें श्रेणीचें चोथें पद आहे.

याजकरितां $अ + \frac{ब^२}{२अ} - \frac{ब^४}{२\cdot४ अ^३} + \frac{३ब^६}{२\cdot४\cdot६ अ^५} -$ इत्यादि अथवा $अ + \frac{ब^२}{२अ} - \frac{ब^४}{८ अ^३} + \frac{ब^६}{१६ अ^५} - \frac{५ब^८}{१२८ अ^७} +$ इत्यादि इछिली श्रेणी हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{१}{(अ-क्ष)^२}$ अथवा त्याचे बरोबर किमतीचे $(अ-क्ष)^{-२}$ याची*

* ही रीति अपूर्ण बीजावर लावायास पुढें सांगितो त्या प्रकारें सुगम करावी, तो प्रकार: आधिं हें समजायास योग्य किं कोणतीही करणी छेदस्थळांतून अंशस्थळीं आणणें अथवा अंशस्थळांतून छेदस्थळीं नेणें हें तीचें प्रकाशक चिन्ह बदल करून शक्य आहे, असें $\frac{१}{क्ष^२} = १ \times क्ष^{-२}$ अथवा $क्ष^{-२}$, इतकें मात्र; आणि $\frac{१}{(अ+ब)^२} = १ \times (अ+ब)^{-२}$ अथवा $(अ+ब)^{-२}$ इतकें मात्र; आणि $\frac{अ^२}{(अ+क्ष)^२} = अ^२ (अ+क्ष)^{-२}$; आणि $\frac{क्ष^{\frac{१}{२}}}{क्ष^{\frac{१}{३}}} = क्ष^{\frac{१}{२}} \times क्ष^{-\frac{१}{३}}$; आणि $\frac{(अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}}}{(अ^२-क्ष^२)^{\frac{१}{२}}} = (अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}} \times (अ^२-क्ष^२)^{-\frac{१}{२}}$; इत्यादि.

अनंत

अनंतश्रेणींत किमत काढ.

एथे $प = अ$, $क = -\frac{क्ष}{अ}$, $\frac{म}{न} = \frac{-२}{१} = -२$; याजकरितां

$प^{\frac{म}{न}} = अ^{-२} = \frac{१}{अ^२} = अ$, हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{म}{न}$ $अक = -२ \times \frac{१}{अ^२} \times -\frac{क्ष}{अ} = \frac{२क्ष}{अ^३} = २अ^{-३}क्ष = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{म-न}{२न}$ $बक = -\frac{३}{२} \times \frac{२क्ष}{अ^३} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{३क्ष^२}{अ^४} = ३अ^{-४}क्ष^२ = क$ हें श्रेणीचें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ $कक = -\frac{४}{३} \times \frac{३क्ष^२}{अ^४} \times \frac{-क्ष}{अ} = \frac{४क्ष^३}{अ^५} = ४अ^{-५}क्ष^३ = ड$ हें श्रेणीचें चौथें पद.

तेव्हां $अ^{-२} + २अ^{-३}क्ष + ३अ^{-४}क्ष^२ + ४अ^{-५}क्ष^३ +$ इत्यादि.

अथवा $\frac{१}{अ^२} + \frac{२क्ष}{अ^३} + \frac{३क्ष^२}{अ^४} + \frac{४क्ष^३}{अ^५} + \frac{५क्ष^४}{अ^६}$ इत्यादि इछिली श्रेणी हें उत्तर.

तिसरें $\frac{अ^२}{अ-क्ष}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर $अ + क्ष + \frac{क्ष^२}{अ} + \frac{क्ष^३}{अ^२} + \frac{क्ष^४}{अ^३} + \frac{क्ष^५}{अ^४}$ इत्यादि.

चौथें $\frac{१}{\sqrt{(अ^२+क्ष^२)}}$ अथवा $\frac{१}{(अ^२+क्ष^२)^{\frac{१}{२}}}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर

उत्तर $\frac{\text{१}}{\text{अ}} - \frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{२अ}^{३}} + \frac{\text{३क्ष}^{४}}{\text{८अ}^{५}} - \frac{\text{५क्ष}^{६}}{\text{१६अ}^{७}}$, इत्यादि.

पांचवें, $\frac{\text{अ}^{२}}{(\text{अ}-\text{ब})^{२}}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $\text{१} + \frac{\text{२ब}}{\text{अ}} + \frac{\text{३ब}^{२}}{\text{अ}^{२}} + \frac{\text{४ब}^{३}}{\text{अ}^{३}} + \frac{\text{५ब}^{४}}{\text{अ}^{४}} +$ इत्यादि.

साहावें, $\sqrt{\text{अ}^{२}-\text{क्ष}^{२}}$ अथवा $(\text{अ}^{२}-\text{क्ष}^{२})^{\frac{१}{२}}$ यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर $\text{अ} - \frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{२अ}} - \frac{\text{क्ष}^{४}}{\text{८अ}^{३}} - \frac{\text{क्ष}^{६}}{\text{१६अ}^{५}} - \frac{\text{५क्ष}^{८}}{\text{१२८अ}^{७}}$, इत्यादि

सातवें, $\sqrt[३]{(\text{अ}^{३}-\text{ब}^{३})}$ अथवा $(\text{अ}^{३}-\text{ब}^{३})^{\frac{१}{३}}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर $\text{अ} - \frac{\text{ब}^{३}}{\text{३अ}^{२}} - \frac{\text{ब}^{६}}{\text{९अ}^{५}} - \frac{\text{५ब}^{९}}{\text{८१अ}^{८}} -$ इत्यादि.

आठवें, $\sqrt[५]{(\text{अ}^{५}+\text{क्ष}^{५})}$ अथवा $(\text{अ}^{५}+\text{क्ष}^{५})^{\frac{१}{५}}$ याची किमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर $\text{अ} + \frac{\text{क्ष}^{५}}{\text{५अ}^{४}} + \frac{\text{२क्ष}^{१०}}{\text{२५अ}^{९}} + \frac{\text{६क्ष}^{१५}}{\text{१२५अ}^{१४}} +$ इत्यादि.

नववें, $\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अ}-\text{ब}}$ याचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर $\text{१} - \frac{\text{ब}}{\text{अ}} + \frac{\text{ब}^{२}}{\text{२अ}^{२}} - \frac{\text{ब}^{३}}{\text{२अ}^{३}}$ इत्यादि.

दाहावें, $\frac{\text{अ}^{३}}{\text{अ}^{३}+\text{ब}^{३}}$ याचें घनमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर $\text{१} - \frac{\text{ब}^{३}}{\text{३अ}^{३}} + \frac{\text{२ब}^{६}}{\text{९अ}^{६}} - \frac{\text{१४ब}^{९}}{\text{८१अ}^{९}}$ इत्यादि.

अनंतश्रेणी

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथम कृत्य.※

सांगीतल्ये श्रेणींचे पदांचे वजा बाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा करायाचें.

रीति.

१ प्रथम पद दुसर्यांतून वजा करावें, तसें दुसरें तिसर्यांतून, तिसरें चौथ्यांतून, याप्रमाणें पुढेंही; या बाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल, जीस बाक्यांची प्रथम परंपरा ह्मणतात.

२ या नव्ये श्रेणींतील प्रथम पद दुसर्यांतून वजा करावें, दुसरें तिसर्यांतून, या प्रमाणें पूर्ववत् करावें, ह्मणजे या बाक्यांपासून एक दुसरीश्रेणी उत्पन्न होईल, तीस बाक्यांची दुसरी परंपरा ह्मणतात.

३ या प्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि बाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढाव्या, बाकी ० होईपर्यंत, अथवा प्रयोजन आहे पर्यंत.

उदाहरणें.

प्रथम, १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि; या श्रेणींचे वजा बाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ.

※ एकवर्ण समीकरण आणि वर्गसमीकरण हीं शिकल्यानंतर हें शिकावें हें बरें आहे.

आतां

आतां	१ , ४ , ८ , १३ , १९ , २६	इत्यादि, सांगीतली श्रेणी·
तेव्हां	३ , ४ , ५ , ६ , ७	इत्यादि, प्रथम परंपरा·
आणि	१ , १ , १ , १	इत्यादि, दुसरी परंपरा·
आणि	० , ० , ०	इत्यादि, तिसरी परंपरा·

ह्मणजे स्पष्ट आहे किं याजवर काम स्तब्ध जालें·

दुसरें, १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि, या श्रेणीचे वजाबाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ·

आतां	१ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८	इत्यादि, सांगीतली श्रेणी·
तेव्हां	३ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४	इत्यादि, प्रथम परंपरा·
आणि	१ , ४ , ८ , १६ , ३२	इत्यादि, दुसरी परंपरा·
आणि	३ , ४ , ८ , १६	इत्यादि, तिसरी परंपरा·
आणि	१ , ४ , ८	इत्यादि, चौथी परंपरा·
आणि	३ , ४	इत्यादि, पांचवी परंपरा·
आणि	१	इत्यादि, साहावी परंपरा·

तिसरें, १ , २ , ३ , ४ इत्यादि, या श्रेणीचे वजाबाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ·

उत्तर { प्रथम परंपरा १ , १ , १ , १ इत्यादि·
दुसरी परंपरा ० , ० , ० इत्यादि·

चौथें, १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि या वर्गांपासून जाल्ये श्रेणीचे वजाबाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ·

उत्तर

उत्तर	प्रथम परंपरा	३, ५, ७, ९	इत्यादि·
	दुसरी परंपरा	२, २, २	इत्यादि·
	तिसरी परंपरा	०, ०	इत्यादि·

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि, या घनांपासून जाल्ये श्रेणीचे वजाबाक्यांचा परंपरा काढ·

साहावें, १, ६, २०, ५०, १०५ इत्यादि, या श्रेणीचे वजावाक्यांचा परंपरा काढ·

दुसरें कृत्य·

सांगीतल्ये श्रेणीचें कोणतेंही पद काढायाचें -

रीति·

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि, सांगीतली श्रेणी असावी, आणि $\text{ड}'$, $\text{ड}''$, $\text{ड}'''$, $\text{ड}''''$, इत्यादि, हीं अक्षरचिन्हें पूर्व रीती प्रमाणें काढिल्ये वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें अनुक्रमें दाखवायास असावीं, आणि न अक्षर चिन्ह इछिल्ये पदाचें स्थळ दाखवायास असावें -

२ तेव्हां $\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{ड}'' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \frac{\text{न}-३}{३} \cdot \text{ड}''' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \frac{\text{न}-३}{३} \cdot \frac{\text{न}-४}{४} \cdot \text{ड}'''' +$ इत्यादि = न इछिलें पद·

उदाहरणें·

प्रथम, २, ५, ९, १४, २० इत्यादि, या श्रेणीचें दाहावें पद

पद काढ.

आतां २ , ५ , ९ , १४ , २० इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हां ३ , ४ , ५ , ६ इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि १ , १ , १ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ० , ० इत्यादि, तिसरी परंपरा-

यांत $\text{ड}' = ३$, $\text{ड}'' = १$, $\text{ड}''' = ०$ आणि $\text{अ} = २$, $\text{न} = १०$ याजकरितां
$\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{ड}'' = २ + \frac{१०-१}{१} \cdot ३ + \frac{१०-१}{१} \cdot \frac{१०-२}{२} \times १ = २ + २७$
$+ ३६ = ६५$ इच्छिलें दाहावें पद हें उत्तर-

दुसरें, २ , ६ , १२ , २० , ३० इत्यादि, या श्रेणीचें विसावें पद काढ.

आतां २ , ६ , १२ , २० , ३० इत्यादि, सांगीतली श्रेणी-

तेव्हां ४ , ६ , ८ , १० इत्यादि, प्रथम परंपरा-

आणि २ , २ , २ इत्यादि, दुसरी परंपरा-

आणि ० , ० इत्यादि, तिसरी परंपरा-

यांत $\text{ड}' = ४$, $\text{ड}'' = २$, आणि $\text{अ} = २$, $\text{न} = २०$ याजकरितां
$\text{अ} + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \text{ड}' + \frac{\text{न}-१}{१} \cdot \frac{\text{न}-२}{२} \cdot \text{ड}''$ ~~=२~~ $+ \frac{१९}{२} \cdot ४ + \frac{१९}{१} \cdot \frac{१८}{२} \cdot २ = २ + ७६ +$
$३४२ = ४२०$ इच्छिलें विसावें पद आहे हें उत्तर-

तिसरें, १ , ३ , ६ , १० इत्यादि, या श्रेणीचें पांचवें पद काय आहे.

उत्तर १५.

चौथें

चौथें, १, ४, ८, १३, १९, इत्यादि, या श्रेणीचें दाहावें पद काय आहे -

उत्तर ६४

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५, इत्यादि, या श्रेणीचें विसावें पद काढ -

उत्तर ८०००

तिसरें कृत्य -

जर सांगीतल्ये श्रेणीचीं पदें एकंमचे अंतरानें असतील तर मध्य स्थापनापासून कोणतेंही आंतलें पद काढायाचें -

रीति -

१ स्थापन करायाचें पद दाखवायाकरितां य अक्षर घ्यावें, श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदापर्यंत अंतर दाखवायास क्ष घ्यावें, आणि ड′ ड″ ड‴ ड⁗ हीं वाक्यांचे परंपरांचीं प्रथम पदें दाखवायास असावीं

२ तेव्हां $\text{अ}+\text{क्ष}\,\text{ड}'+\text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\text{ड}''+\text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-२}{३}\cdot\text{ड}'''+\text{क्ष}\cdot\frac{\text{क्ष}-१}{२}\cdot\frac{\text{क्ष}-२}{३}\cdot\frac{\text{क्ष}-३}{४}\cdot\text{ड}''''+$ इत्यादि = म इच्छिलें पद होईल -

उदाहरणें

प्रथम ३° ४′, ३° ५′, ३° ६′, ३° ७′ आणि ३° ८′ यांची लागरतंम भुजज्या सांगीतली आहे, यापासून ३° ६′ १५″ यांची लागरतंम भुजज्या काढ -

श्रेणी	लागरतंम	प्र॰परंपरा	दु॰परं॰	ति॰परं॰
३°,,४'	८·७२८३३६६			
		२३५१६		
३,,५	८·७३०६८८२		−१२६	
		२३३९०		१
३,,६	८·७३३०२७२		−१२७	
		२३२६३		−४
३,,७	८·७३५३५३५		−१२३	
		२३१४०		
३,,८	८·७३७६६७५			

एथे क्ष=(३°,,६',,१५''−३°,,४'=२',,१५'')= $\frac{१}{४}$ = य पदाचे स्थापनाचें अंतर; अ=८·७२८३३६६, ड'=२३५१६, ड''=−१२६, आणि ड'''=१, आणि य= अ+क्षड'+क्ष· $\frac{क्ष-१}{२}$ · ड''+क्ष· $\frac{क्ष-१}{२}$ · $\frac{क्ष-२}{३}$ · ड'''=

(अ+ $\frac{१}{४}$ ड'+ $\frac{३}{३२}$ ड''+ $\frac{७}{१२८}$ ड''')=८·७२८३३६६+·००५८७९१−·००००११७१८७५+·००००००००११७=८·७३३६०९९२९६ इछिली लागरतंम भुजज्या आहे-

दुसरें, $\frac{१}{५०}$, $\frac{१}{५१}$, $\frac{१}{५२}$, $\frac{१}{५३}$, $\frac{१}{५४}$ ही सांगीतली श्रेणी आहे; $\frac{१}{५२}$ आणि $\frac{१}{५३}$ या दोन पदांचे मधील पद काढ-

उत्तर $\frac{२}{१०५}$

तिसरें, १°,,०', १°,,१', १°,,२' आणि १°,,३' यांची लागरतंम भुजज्या सांगीतली आहे आणि १°,,१',,४०'' यांची लागरतंम भुजज्या इछिली आहे-

उत्तर ८·२५३७०,३३ -

चौथें

चौथें कृत्य·

मध्यस्थापनानें कोणतेंही मधील पद काढायाचें,जेव्हां बरोबर अंतराचे श्रेणीचा प्रथम वाक्या लघु आहेत·

रीति·

१ अ , ब , क , ड , ई , फ , इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगीतली श्रेणी दाखवायास घ्यावीं , आणि न = सांगीतल्ये पदाची संख्या·

२ तेव्हां $\text{अ} - \text{नब} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\text{क} - \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\text{ड} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\cdot\text{ई} - \text{इत्यादि} = ०$ या पासून स्थळांतर आणि पृथक्करकरून कोणतेंही पद उत्पन्न होईल·

उदाहरणें·

प्रथम , १० , ११ , १२ , १३ आणि १५ यांचीं वर्गमूळें सांगीतलीं आहेत· आणि इछिलें आहे किं चौदांचें वर्गमूळ काढावें·

एथे न=५ , आणि ई= इछिलें पद·

अ=($\sqrt{१०}$=)३·१६२२७७६

ब=($\sqrt{११}$=)३·३१६६२४८

क=($\sqrt{१२}$=)३·४६४१०[illegible]

ड=($\sqrt{१३}$=)३·६०५५५१२

फ=($\sqrt{१५}$=)३·८७२९८३३

आणि यास्तव न=५ आतां श्रेणी, ६ पदें पावेतों वाढविली पाहिजे·

याजकरितां·

याजकरितां अ−नब+न·$\frac{न-१}{२}$·क−न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·ड+न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·ई−न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·$\frac{न-४}{५}$·फ=० नंतर ईचि किमत कादायाकरितां स्थलांतरानें हें उत्पन्न होतें· न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·ई=−अ+नब−न·$\frac{न-१}{२}$·क+न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·ड+न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·$\frac{न-४}{५}$·फ, या समीकरणास संख्येंत हें रूप होतें· ५ ई=−३·१६२२७७६+(५×३·३१६६२४८)−(१०×३·४६४१०१६)+(१०×३·६०५५५१२)+३·८७२९८३३=५५·५११६९१३−३७·८०३२९३६=१८·७०८३२५७, आणि ई=$\frac{१८·७०८३२५७}{[illegible]}$= ३·७४१६६५१४ इछिलें मूळ अवळ अवळ, हें उत्तर·

दुसरें, ३७, ३८, ३९, ४१, आणि ४२ यांचीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इछिलें आहे किं चाळिसांचें वर्गमूळ कादावें·

उत्तर ६·३२४५५५३२.

तिसरें, ४५, ४६, ४७, ४८, आणि ४९ यांचीं घनमूळें सांगीतलीं आहेत, आणि इछिलें आहे किं ५० चें घनमूळ कादावें·

उत्तर ३·६८४०३१

पांचवें कृत्य·

सांगीतल्ये श्रेणीस फिरवायाचें·

जेव्हां कोणत्ये एक श्रेणीचे पदांमध्यें अव्यक्तपदाचे घात आहेत· या अव्यक्तपदाचे किमतीचा शोध, दुसर्ये श्रेणींतील पदांपासून होतो, ज्या श्रेणींत सांगीतल्ये श्रेणीपदांचे बरोबरीचे घात आणि व्यक्तपदें तींच असावीं·

रीति

रीति

१ अव्यक्त पदाची किमत दाखवायाकरितां एक श्रेणी घे, अशी किं तीचें रूप फिरवायाचे सांगीतल्ये श्रेणीचे रूपाचें होईल.

२ ही श्रेणी आणि ईचे घात, सांगीतल्ये श्रेणीचीं अव्यक्तपदें आणि घात यांचे स्थळीं ठेवावीं,

३ उत्पन्न जालेलीं तीं पदें सांगीतल्ये श्रेणींतील त्या त्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करावीं. ह्मणजें घेतल्ये वेळाप्रकाशकाची किमत उत्पन्न होते.

उदाहरणें.

प्रथम. अक्ष + बक्ष^2 + कक्ष^3 + डक्ष^4 + इत्यादि = ज्ञ. ही सांगीतली श्रेणी असावी. यांतील क्षची किमत ज्ञपदांत आणि व्यक्तपदांत काढावी.

आतां ज्ञ^न = क्ष घे, तेव्हां स्पष्ट आहे किं जर ज्ञ^न आणि त्याचे ही घात सांगीतल्ये श्रेणीमध्यें क्ष आणि त्याचे घात यांचे स्थळीं ठेविलेतर ज्ञचे घातप्रकाशक हे होतील, न, २न, ३न, ४न, इत्यादि, आणि १, याजकरितां न = १, आणि त्या घातप्रकाशकांचा वजाबाक्या या आहेत ; ०, १, २, ३, ४, इत्यादि. ह्मणजे या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणीचे घातप्रकाशकांचाही वजाबाक्या अशाच असाव्या; ह्मणोन घेतली श्रेणी हीच असावी, अज्ञ + बज्ञ^2 + कज्ञ^3 + डज्ञ^4 + इत्यादि = क्ष, आणि जर हीश्रेणी वर्गादिकेंकरून वाढविली आणि क्षचे वेगळा-

ल्ये

स्ये वर्गादि घातस्थळीं ठविली तर सांगीतल्ये श्रणीस हें रूप होईल :

$$\left.\begin{array}{l} \text{अ अज्ञ} + \text{अ बज्ञ}^{२} + \text{अ कज्ञ}^{३} + \text{अ डज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} \\ \quad * \quad + \text{ब अ}^{२}\text{ज्ञ}^{२} + \text{२ब अबज्ञ}^{३} + \text{२ब अकज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} \\ \quad * \quad\quad * \quad\quad * \quad + \text{ब ब}^{२}\text{ज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} \\ \quad * \quad\quad * \quad + \text{क अ}^{३}\text{ज्ञ}^{३} + \text{३क अ}^{२}\text{बज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} \\ \quad * \quad\quad * \quad\quad * \quad + \text{ड अ}^{४}\text{ज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि} \end{array}\right\} = \text{ज्ञ}$$

आतां यांत जीं पदें ज्ञातज्ञचे सारिखे घात आहेत त्यांस समकरून हीं उत्पन्न होतात.

$$(\text{अ अज्ञ} = \text{ज्ञ}) \text{ अथवा } \text{अ} = \frac{१}{\text{अ}},$$

$$(\text{अ बज्ञ}^{२} + \text{ब अ}^{२}\text{ज्ञ}^{२} = ०) \text{ अथवा } \text{ब} = \left(-\frac{\text{ब अ}^{२}}{\text{अ}}\right) = -\frac{\text{ब}}{\text{अ}^{३}},$$

$$(\text{अ कज्ञ}^{३} + \text{२ब अबज्ञ}^{३} + \text{क अ}^{३}\text{ज्ञ}^{३} = ०) \text{ अथवा } \text{क} = \left(-\frac{\text{२ब अब} + \text{क अ}^{३}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{२ब}^{२} - \text{अ}}{\text{अ}^{५}},$$

$$\text{ड} = \left(-\frac{\text{२ब अक} + \text{ब ब}^{२} + \text{३क अ}^{२}\text{ब} + \text{ड अ}^{४}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{५अबक} - \text{५ब}^{३} - \text{अ}^{२}\text{ड}}{\text{अ}^{७}} \text{ इत्यादि.}$$

आणि ह्याजकरितां $\text{क्ष} = (\text{अज्ञ} + \text{बज्ञ}^{२} + \text{कज्ञ}^{३} + \text{इत्यादि}) = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{अ}} - \frac{\text{बज्ञ}^{२}}{\text{अ}^{३}} + \frac{\text{२ब}^{२} - \text{अक}}{\text{अ}^{५}} \cdot \text{ज्ञ}^{३} - \frac{\text{५ब}^{३} - \text{५अबक} + \text{अ}^{२}\text{ड}}{\text{अ}^{७}} \cdot \text{ज्ञ}^{४} + \text{इत्यादि}$, ही इछिली श्रेणी आली.

आणि ही उत्पन्न [illegible] श्रेणी, ज्ञात सांगीतल्ये श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातांसारिखे घात आहेत त्यांस, ही साधारणसारणी कोष्टक आहे.

दुसरें. $\text{क्ष} - \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} - \text{क्ष}^{४} + \text{इत्यादि} = \text{ज्ञ}$, ही श्रेणी फिरवायास इछिली आहे.

एथे $अ=१$, $ब=-१$, $क=१$, $ड=-१$, इत्यादि, या किमती पूर्व उदाहरणाचे समीकरणांत ठेवुन हें उत्पन्न होतें. $क्ष = झ + झ^{2} + झ^{3} + झ^{4} +$ इत्यादि, हें इछिलें उत्तर.

तिसरें, $क्ष - \frac{क्ष^{2}}{२} + \frac{क्ष^{3}}{३} - \frac{क्ष^{4}}{४} +$ इत्यादि $= य$, ही श्रेणी फिरवायाची आहे.

एथे पूर्वप्रमाणेंकरून $अ=१$, $ब=-\frac{१}{२}$, $क=\frac{१}{३}$, $ड=-\frac{१}{४}$ या किमती पूर्व उदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = य + \frac{य^{2}}{२} + \frac{य^{3}}{६} + \frac{य^{4}}{२४} +$ इत्यादि.

साहावें कृत्य.

कोणत्येही अनंतश्रेढीचें नपदें पर्यंत सर्वधन काढायाचें.

रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई, इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगीतली श्रेणी दाखवायास घे. स = नपद पर्यंत सर्वधन, आणि $ड', ड'', ड''', ड''''$, इत्यादि चिन्हें प्रथमकृत्याप्रमाणें वाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा दाखवायास घे.

२ तेव्हां $नअ + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} \cdot ड'' + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} \cdot \frac{न-३}{४} \cdot ड''' + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot \frac{न-२}{३} \cdot \frac{न-३}{४} \cdot \frac{न-४}{५} \cdot ड'''' +$ इत्यादि $= स$ हें नपद पर्यंत श्रेणीचें इछिलें सर्वधन आहे.

प्रथमप्रकार. १, २, ३, ४, ५ इत्यादि, नपदपर्यंत श्रेणीचें

चें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, २, ३, ४, ५ इत्यादि सांगीतली श्रेणी.

१, १, १, १ इत्यादि प्रथम परंपरा.

१, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथे $अ=१$, $ड'=१$, $ड''=०$ तेव्हां $नअ + न \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' =$
$\frac{२नअ + \overline{न^२ - न} \cdot ड'}{२} = \left(\frac{२न + न^२ - न}{२}\right) = \frac{न \cdot \overline{न+१}}{२} = स$ इच्छिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

प्रथम, पूर्वश्रेणीचें २० पदें पर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे
एथे $न=२०$, आणि $स = \frac{न \cdot \overline{न+१}}{२} = \frac{२० \times २१}{२} = २१०$ सर्वधन हें
उत्तर.

दुसरें, पूर्वश्रेणीचें १००० पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

उत्तर ५००५००

तिसरें. पूर्वश्रेणीचें १२३४५ पदें पर्यंत सर्वधन काढ.

दुसरा प्रकार १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि न पद पर्यंत श्रेणी
चें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि सांगीतली श्रेणी.

२, २, २, २ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथे

एथे $अ=१$, $ड'=२$, $ड''=०$, तेव्हां $नअ+न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot ड'=(नअ+\frac{न^2-न}{२}\cdot ड'=$ (याजकरितां $अ=१$ आणि $ड=२$) $(न+न^2-न=)\ न^2=स$ इछिलें सर्वधन-

उदाहरणें-

प्रथम , पूर्वश्रेणीचें १० पदें पर्यंत सर्वधन काढ-

एथे $न=१०$, आणि $स=(न^2=)\ १००$ सर्वधन हें उत्तर-

तिसरा प्रकार , १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि वर्गांचे श्रेणीचें न पदें पर्यंत सर्वधन काढण्याचा-

आतां १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि सांगीतली श्रेणी-

३ , ५ , ७ , ९ इत्यादि प्रथम परंपरा-

२ , २ , २ इत्यादि दुसरी परंपरा-

० , ० इत्यादि तिसरी परंपरा-

एथे $अ=१$, $ड'=३$, $ड''=२$, $ड'''=०$, तेव्हां $नअ\cdot न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot ड'+न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\cdot ड''=(न+३न\cdot\frac{न-१}{२}+२न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}=\frac{३न^2-न}{२}+\frac{न^3-३न^2+२न}{२}=)\ \frac{न\cdot\overline{न+१\cdot२+१}}{६}=स$ इछिलें सर्वधन-

उदाहरणें-

प्रथम , पूर्वश्रेणीचें ३० पदें पर्यंत सर्वधन काढ-

एथे $न=३०$ याजकरितां $\frac{न(न+१)(२न+१)}{६}=\frac{३०\times३१\times६१}{६}=९४५५$ सर्वधन हें उत्तर-

कोष्टक पृ० १०१ पाहा

सातवें

सातवें कृत्य·

वजाबाकीचे रीतीनें श्रेणीचें सर्वधन काढायाचें·

ही रीति दोन अथवा तीन सोप्ये उदाहरणांपासून प्रकट होईल -

प्रथम उदाहरण·

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि पदें अनंत = स ही सांगीतली श्रेणी, ईचें सर्वधन काढ -

तर $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+$ इत्यादि अनंत = स − १,

वजाबाकीनें $\frac{१}{१\cdot२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+\frac{१}{४\cdot५}+$ इत्यादि अनंत = १ सर्वधन हें उत्तर -

दुसरें·

$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि पदें अनंत = स, ही सांगीतली श्रेणी, ईचें सर्वधन काढ -

तेव्हां $\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+\frac{१}{६}+$ इत्यादि पदें अनंत = स − $\frac{३}{२}$

वजाबाकीनें $\frac{२}{१\cdot३}+\frac{२}{२\cdot४}+\frac{२}{३\cdot५}+\frac{२}{४\cdot६}+$ इत्यादि = $\frac{३}{२}$

अथवा २ यानीं भागून $\frac{१}{१\cdot३}+\frac{१}{२\cdot४}+\frac{१}{३\cdot५}+\frac{१}{४\cdot६}+$ इत्यादि = $\frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर·

तिसरें·

$\frac{१}{१\cdot२}+\frac{१}{२\cdot३}+\frac{१}{३\cdot४}+$ इत्यादि पदें अनंत = स, ही सांगीतली श्रेणी, ईचें सर्वधन काढ -

तेव्हां

तेव्हां $\frac{१}{२·३}+\frac{१}{३·४}+\frac{१}{४·५}+$ इत्यादि पदें अनंत $=$ स $-\frac{१}{२}$

वजाबाकीनें $\frac{२}{१·२·३}+\frac{२}{२·३·४}+\frac{२}{३·४·५}+$ इत्यादि $=\frac{१}{२}$

अथवा

२ याणीं भागून $\frac{१}{१·२·३}+\frac{१}{२·३·४}+\frac{१}{३·४·५}+$ इत्यादि $=\frac{१}{४}$

चवथें-

$\frac{१}{२·४·६}+\frac{१}{४·६·८}+\frac{१}{६·८·१०}+$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेढीचें सर्वधन काढ-

आतां प्रत्येक छेदांचे शेवटील गुणक सोड· आणि,

$\frac{१}{२·४}+\frac{१}{४·६}+\frac{१}{६·८}+$ इत्यादि $=$ स, घे·

तर $\frac{१}{४·६}+\frac{१}{६·८}+\frac{१}{८·१०}+$ इत्यादि $=$ स $-\frac{१}{८}$

वजाबाकीनें $\frac{४}{२·४·६}+\frac{४}{४·६·८}+\frac{४}{६·८·१०}+$ इत्यादि $=\frac{१}{८}$

अथवा

४ याणीं भागून $\frac{१}{२·४·६}+\frac{१}{४·६·८}+\frac{१}{६·८·१०}+$ इत्यादि $=\frac{१}{३२}$ सर्वधन हें उत्तर-

पाचवें-

$\frac{१}{२·४·६·८}+\frac{१}{४·६·८·१०}+\frac{१}{६·८·१०·१२}+\frac{१}{८·१०·१२·१४}+$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ-

उत्तर $\frac{१}{२८८}$

साहावें-

$\frac{१}{३·५·७·९}+\frac{१}{५·७·९·११}+\frac{१}{७·९·११·१३}+\frac{१}{९·११·१३·१५}+$ इत्यादि पदें अनंत आहेत, या श्रेणीचें सर्वधन काढ-

उत्तर $\frac{१}{६३०}$

आठवें

आठवें कृत्य.

अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढायाचें, ती अनंतश्रेणी कोणतेंही अपूर्णपद वाढविल्यापासून उत्पन्न आली असें कल्पून.

रीति-

सांगीतली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी, जा अपूर्णपदाचे छेदांहीं ती श्रेणी गुणिली तर गुणाकार सांत होईल। हा गुणाकार घेतल्ये अपूर्णपदाचे अंशांबरोबर असून त्याची किमत निघेल.

उदाहरणें.

प्रथम, $\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि अनंत पदें आहेत, य श्रेणीचें सर्वधन काढ.

आतां सांगीतली श्रेणी $=\frac{\text{श}}{१-\text{क्ष}}$, घे,

तेव्हां $\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि.

गुणिली $१-\text{क्ष}$

$\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि.

$-\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि.

$\text{श}=\text{क्ष}$ ※ ※

याअकरितां $\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+$ इत्यादि $=\frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}}$

असें जर $\text{क्ष}=\frac{१}{२}$ तर $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+$ इत्यादि $=\frac{१}{२}\div\frac{१}{२}=१$

जर $\text{क्ष}=\frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३}+\frac{१}{९}+\frac{१}{२७}+$ इत्यादि $=\frac{१}{३}\div\frac{२}{३}=\frac{१}{२}$ सर्वधन हें उ०

दुसरें

दुसरें , $क्ष + २क्ष^{२} + ३क्ष^{३} +$ इत्यादि अनंत पदें , या श्रेणींचें सर्वधन काढ-

आतां सांगीतली श्रेणी $= \frac{श}{(१-क्ष)^{२}} = \frac{श}{१-२क्ष+क्ष^{२}}$

तेव्हां $क्ष + २क्ष^{२} + ३क्ष^{३} +$ इत्यादि-

गुणिली $१ - २क्ष + क्ष^{२}$

$क्ष + २क्ष^{२} + ३क्ष^{३} +$ इत्यादि-

$-२क्ष^{२}$ [illegible] $क्ष^{३} -$ इत्यादि-

$+क्ष^{३} +$ इत्यादि-

$श = क्ष$ ※ ※

याजकरितां $क्ष + २क्ष^{२} + ३क्ष^{३} +$ इत्यादि $= \frac{क्ष}{(१-क्ष)^{२}}$

जर $क्ष = \frac{१}{२}$, तर , $\frac{१}{२} + \frac{२}{४} + \frac{३}{८} + \frac{४}{१६} +$ इत्यादि $= \frac{१}{२} \div \frac{१}{४} = २$

जर $क्ष = \frac{१}{३}$, तर , $\frac{१}{३} + \frac{२}{९} + \frac{३}{२७} + \frac{४}{८१} +$ इत्यादि $= \frac{१}{३} \div \frac{४}{९} = \frac{३}{४}$ सर्वधन हें उत्तर-

आणि या प्रमाणें पुढेंही आणखी प्रकार-

तिसरें $क्ष + ४क्ष^{२} + ९क्ष^{३} + १६क्ष^{४} +$ इत्यादि , या अनंत श्रेणीचें सर्वधन काढ-

उत्तर $\frac{क्ष(१+क्ष)}{(१-क्ष)^{३}}$

समीकरण

समीकरण ह्मणजे बीज गणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्तपदांचा किंमती त्या पदांचा दुसर्या व्यक्तपदांशीं जो संबंध आहे त्याचे साहाय्यानें काढायाचा वेगळाल्या रीति दाखवितो.

कित्येक बीजगणित संबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; या बरोबर केल्ये उद्देशकांस समीकरण ह्मणतात नंतर याचे रीतींप्रमाणें गणित करीत चालावें [illegible] अव्यक्तपद त्या समीकरणाचे बाजूस एकाकी राहीपर्यंत, ह्मणजे तें दुसर्ये बाजूंतील सांगीतल्ये व्यक्तपदांचे बरोबर होईल.

ज्यां पदांपासून समीकरण सुसंपन्न जालें त्यांपदांस समीकरणाचीं पदें ह्मणतात; आणि बरोबरीचा = या चिन्हाचे दोहीकडे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू ह्मणतात.

असें जर क्ष = अ + ब यांत क्ष, अ, आणि ब, हीं तीन पदें आहेत; आणि या उद्देशकाचा अर्थ हाच किं कोणतेंही पद क्ष समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू अ आणि ब हीं दोन पदें आहेत त्यांचे बेरिजे बरोबर आहे.

एकवर्ण समीकरण ह्मणजे तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

असें क्ष + अ = ३ब अथवा अक्ष = बक अथवा २क्ष + ३अ^2

३अ^{२}=५ब^{२}. यांत क्ष अव्यक्तपद दाखवितो ; आणि दुसरीं अक्षर चिन्हें आणि अंक व्यक्तपदें दाखवितात.

अनेकवर्णसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

असें क्ष^{२}+अक्ष=ब अथवा क्ष^{३}−४क्ष^{२}+३क्ष=२५

या समीकरणाचा जाती अथवा नावें त्यांतील अव्यक्तपदांचे सर्वांहून मोठे घात येतात, त्यांवरून तशीं तशीं होतात अशीं वर्गसमीकरण घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण इत्यादि

वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपद दोन घातांचें आहे; अथवा दुसरा घातपर्यंत चढतें आहे.

असें क्ष^{२}=२ अथवा क्ष^{२}+अक्ष=ब अथवा ३क्ष^{२}+१०क्ष=१००

घनसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपद तीन घातांचें आहें, अथवा तिसरा घातपर्यंत चढतें आहे

असें क्ष^{३}=२७ अथवा २क्ष^{३}−३क्ष=३५ अथवा क्ष^{३}−अक्ष^{२}+बक्ष=क

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे, अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे

असें क्ष^{४}=२५ अथवा ५क्ष^{४}−४क्ष=६ अथवा क्ष^{४}− अक्ष^{३}+बक्ष^{२}−कक्ष=ड, इत्यादि समीकरणांस पंचघात, षड्घात, आणि यांहून अधिक महत्व जातीचीं उपपदें लागतात. या सर्वांस अव्यक्त

पदांत

पदांत सर्वांहून मोठा घात येतो तशी नावें होतात.

समीकरणाचें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अव्यक्त पदाचे स्थानीं ठेविलें असतां समीकरणाचा दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें, परंतु अनेकवर्णसमीकरणास तितकीं मूळें होतात; त्याचे अव्यक्तपदांत जितके घात आहेत, अथवा त्यांतील पदांत सर्वांहून मोठा घात प्रकाशक आहे, त्याचें संख्ये इतकीं मूळें होतात ह्मणोन तें दाखवितो.

जसें $क्ष^2+२क्ष=१५$ या वर्गसमीकरणांत मूळ किंवा ह्या अव्यक्तपदाची किंमत +३ आहे, किंवा −५, आणि $क्ष^3-९क्ष^2+२६क्ष=२४$ या घनसमीकरणाचीं मूळें २, ३, आणि ४ हीं आहेत, ह्मणजे या तिहींतून कोणतेंही एक क्षचे स्थळीं ठेविलें असतां या समीकरणाचा दोनही बाजू उडतील, अथवा बराबर होतील.

एकवर्ण समीकरणें ह्मणजे ते करणाची रीति ज्यांत एकच अव्यक्त पद आहे.

एकवर्णसमीकरण, तशीं सर्व समीकरणें यांची कृति ही आहे, कि सर्व समीकरणांचा उदाहरणांत अव्यक्त पदाची किमत काढिल्येसमयीं तें कोणत्येही दुसर्ये व्यक्तपदाशीं संबद्ध

असेल

असेल त्यास तेथून सोडवून एक बाजूस लिहावें आणि बाकी व्यक्त पदें दुसऱ्ये बाजूस लिहावीं हेंच करायाकरितां वेगळाली प्रत्यक्ष प्रमाणें आणि कृती घेतली पाहिजे ह्मणोन या दोहोंतील सर्वांहून उपयोगी जीं आहेत तीं सांगतो ※

प्रथम प्रकार

समीकरणाचे कोणत्येही पदाचें स्थळांतर त्या पदाचें चिन्ह बदल करून एक बाजूंतून काढून दुसऱ्ये बाजूंत कर्तां येईल असें केलें असतांही दोनी बाजू किमतींत बराबरच राहातील -

जसें जर क्ष+३=७ तर क्ष=७-३ ह्मणजे क्ष=४

आणि जर क्ष-४+६=८ तर क्ष=८+४-६ ह्मणजे क्ष=६

आणि जर क्ष-अ+ब=क-ड तर क्ष=क-ड+अ-ब -

आणि जर ४क्ष-८=३क्ष+२० तर ४क्ष-३क्ष=२०+८ ह्मणजे क्ष=२८

※ हें काम करायाची कृति यापुढील प्रत्यक्ष प्रमाणांपासून प्रकट होत्ये -

१ दोन समपदांत एकच पद प्रत्येकांत मेळविलें अथवा वजा केलें तर दोन बेरिजा अथवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र० प्र०) बरोबर होतील ह्मणोनच एक बाजूचें पद दुसऱ्ये बाजूस आणिलें तर त्याचें धन ऋणचिन्ह असेल तें बदल होतें हेंही तसेंच आहे -

२ कोणतींही दोन समपदें एकच पदानें प्रत्येकीं गुणिलीं अथवा भागिलीं तर त्यांचे दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (७० आणि ७१ सि० प्र०) बराबर होतील -

३ कोणतींही एकाकी पदें किंवा संयुक्तपदें परस्पर बराबर असतील तर त्या पदांचे कोणतेही सारखे घात अथवा मूळें हीं (७४ सि० प्र०) बराबर होतील -

आणि पुढील साहा प्रकारांचे उदाहरणांतील वेगळाल्ये कृतीं वरून हीं सर्व प्रत्यक्षें उघड होतील -

या रीतीपासून हें निघतें कीं जर दोनही बाजूंस पदें एकरूप आणि एकच चिन्हानें युक्त आहेत तर तीं त्या दोनही बाजूंतून टाकितां येतील आणि कोणत्याही समीकरणाचे सर्वपदांचीं चिन्हें बदल करितां येतील किंमत आहेतीच राहील.

असें जर क्ष+५=७+५ तर रदकरण्याचे रीतीनें क्ष=७

आणिजर अ−क्ष=ब−क तर क्ष−अ=क−ब ह्मणजे क्ष=अ+क−ब

दुसरा प्रकार.

कोणत्येही समीकरणांत जर अव्यक्तपद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह या गुणकानें गुणिलें जोडिलें आहे तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदें भागून तो गुणक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल आणि जर अव्यक्तपद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरचिन्ह या भाजकानें भागायाचें जोडिलें आहे तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदें गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल.

असें जर अक्ष=३अब−क तर क्ष=३ब−$\frac{क}{अ}$

आणिजर २क्ष+४=१६ तर क्ष+२=८ ह्मणजे क्ष=८−२=६

आणि जर $\frac{क्ष}{२}$=५+३ तर क्ष=१०+६=१६

आणि

आणि जर $\frac{२क्ष}{३}-२=४$ तर $२क्ष-६=१२$ तर भागाकारानें $क्ष-३=६$ अथवा $क्ष=६+३=९$

तिसरा प्रकार

जर कोणत्येही समीकरणांत काहीं अपूर्णबीजपदें असतील तर त्या अपूर्णबीजपदांचे छेद उडवितां येतील जे प्रतिपदाचे छेदानीं अनुक्रमें त्या त्या पदावांचून राहिलीं सर्वपदें गुणिल्यापासून अथवा अपूर्णबीजपदांचे सर्वछेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्वपदें गुणिल्यापासून किंवा दोनही बाजूंतील सर्वपदें सर्वछेदांचे ※लघुतम साधारण ※गुणाकारानें गुणिल्यापासून

असें

※ साधारण गुणाकार म्हणजे एक संख्या आहे जांत दुसरी कोणतीहि संख्या कित्येक वेळा बरोबर आल्ये

असें ६ ही संख्या २ यां संख्येचा साधारण गुणाकार आहे कारण ६ यांतून २ बरोबर ३ वेळा जातात ·

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३, या प्रत्येक संख्यांचा साधारण गुणाकार आहे कारण १२ यांत प्रथम संख्या ६ बराबर २ वेळा आतात · तसें दुसरी संख्या ४ बराबर ३ वेळा आतात · आणि तिसरी संख्या ३ बराबर ४ वेळा आतात ·

कित्येक संख्यापदांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायाची रीति-

कित्येक संख्यापदें आहेत त्यांत बहुतपदें कोणत्या संख्येनें बराबर भागलीं आतील तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजकस्थळीं लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खालीं लिहावे · आणि जीं न भागत तीं तशींच त्यांचे खालीं लिहावीं नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेंच दुसरा भाजक कल्पून त्या दुसर्ये ओळींत पूर्ववत करावें, या प्रमाणें करितां कदाचित् शेवटास दोन पदें पर्यंत नच भागलीं आत तर ते सर्व भाजक आणि शिर्मी राहिलीं पदें परस्पर गुणून तो गुणाकार साधारण लघुतम गुणाकार आला · असें आणावें-

उदाहरण

जसें जर $\frac{क्ष}{३} + \frac{क्ष}{४} = ५$ तर प्रथम पदाचे छेद ३ याणीं रीतीप्रमाणें गुणिल्यानें $क्ष + \frac{३क्ष}{४} = १५$ पुनः राहिल्ये पदाचे छेद ४ याणीं गुणिल्या नें ४ क्ष + ३ क्ष = ६० नंतर मिळवणीनें ७ क्ष = ६० आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{६०}{७} = ८\frac{४}{७}$

आणि जर $\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{६} = १०$ तर ४ × ६ = २४ ह्मणजे या सर्व छेदांचे गुणाकारानें समीकरणाचा दोनी बाजू गुणिल्यानें $\frac{२४ क्ष}{४} + \frac{२४ क्ष}{६} = २४०$ अथवा ६ क्ष + ४ क्ष = २४० नंतर मिळवणीनें १० क्ष = २४० आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{२४०}{१०} = २४$

आणि जर $\frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{६} = १०$ तर ४ आणि ६ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार १२ याणीं समीकरणाचा दोनी बाजू गुणिल्यानें $\frac{१२ क्ष}{४} + \frac{१२ क्ष}{६} = १२०$ अथवा ३ क्ष + २ क्ष = १२० नंतर मिळवणीनें ५ क्ष = १२० आतां भागाकारानें $क्ष = \frac{१२०}{५} = २४$

या रीती वरून कळतें कीं जर एकच संख्या अथवा अक्षर चिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाजक अशा रीतीनें

उदाहरण.

७, ३५, ४२, २०, २४ या संख्यापदांचा साधारण लघुतम गुणाकार कर.

÷ ७	७, ३५, ४२, २०, २४
÷ ५	१, ५, ६, २०, २४
÷ ६	१, १, ६, ४, २४
÷ ४	१, १, १, ४, ४
	१, १, १, १, १

तर ७ × ५ × ६ × ४ = ८४० हा त्या वर्ल्ये पदांचा लघुतम साधारण गुणाकार होय.

दुसर्‍ये

दुसऱ्ये पदाशीं संयुक्त होउन असेल तर ती साधारण संख्या अथवा तें अक्षर चिन्ह त्या दोनही बाजूंतून उडवितां येईल परंतु किंमत आहे तीच आहे.

असें जर अक्ष = अब + अक तर रद केल्यानें क्ष = ब + क

आणि जर $\frac{क्ष}{अ} + \frac{ब}{अ} = \frac{क}{अ}$ तर रद केल्यानें क्ष + ब = क ह्मणजे क्ष = क − ब

चवथा प्रकार.

जर कोणत्येही समीकरणांत अव्यक्तपद करणीरूप आहे तर (१ प्रकाराप्र०) सर्व पदांस स्थळांतर करावें असें किं अव्यक्तपद समीकरणाचे एक बाजूस एकलें येईल आणि राहिलीं सर्व पदें दुसऱ्ये बाजूस येतील नंतर समीकरणाचा दोनही बाजू करणीचा घातापर्यंत वाढवाव्या ह्मणजे उद्देशक समीकरण खंडपदापासून मुक्त होईल

असें जर √क्ष − २ = ३ तर स्थळांतरानें √क्ष = ३ + २ = ५ नंतर वर्ग केल्यानें क्ष = २५

आणि जर $\sqrt{३क्ष + ४} = ५$ तर वर्ग केल्यानें ३क्ष + ४ = २५ नंतर स्थळांतरानें ३ क्ष = २५ − ४ = २१ आणि भागाकारानें क्ष = $\frac{२१}{३}$ = ७

आणि जर $\sqrt[३]{२क्ष + ३} + ४ = ८$ तर स्थळांतरानें

$\sqrt[३]{२क्ष + ३}$

$\sqrt[3]{२क्ष+३}$ = ८ − ४ = ४ नंतर घन केल्यानें २क्ष + ३ = ४^3 = ६४ पुनः स्थळांतरानें २क्ष = ६४ − ३ = ६१ आतां भागाकारानें क्ष = $\frac{६१}{२}$ = ३० $\frac{१}{२}$

पांचवा प्रकार·

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणताही एक पूर्ण घात असेल तर त्या समीकरणाच्या या रीतीनें संक्षेप केला जातो जे समीकरणाचे दोनही बाजूंचे पदांचें त्या पूर्ण घाताचें मूळ काढावें

जसें जर $क्ष^2$ = ८१ तर क्ष = $\sqrt{८१}$ = ९

आणि जर $क्ष^3$ = २७ तर क्ष = $\sqrt[3]{२७}$ = ३

आणि जर ३$क्ष^2$ − ९ = २४ तर स्थळांतरानें ३$क्ष^2$ = २४ + ९ = ३३ नंतर भागाकारानें $क्ष^2$ = $\frac{३३}{३}$ = ११ नंतर वर्गमूळ काढिल्यानें क्ष = $\sqrt{११}$

आणि जर $क्ष^2$ + ६क्ष + ९ = २७ तर विचारें पाहातां करणीचे डाव्ये बाजूंत एक पूर्ण घात ह्मणजे वर्ग आहे तेव्हां वर्गमूळ काढिल्यानें क्ष + ३ = $\sqrt{२७}$ = $\sqrt{९ \times ३}$ = ३$\sqrt{३}$ तर स्थळांतरानें क्ष = ३$\sqrt{३}$ − ३

साहावा प्रकार·

कोणत्येही प्रमाणास त्याचे दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकाराबराबर आहे तो केल्यानें समीकरणाचें रूप देतां येईल·

जसें जर ३क्ष : १६ :: ५ : ६ तर ३क्ष × ६ = १६ × ५

अथवा

अथवा १८ क्ष = ८० तर भागाकारानें क्ष = $\frac{८०}{१८} = \frac{४०}{९} = ४\frac{४}{९}$

आणि जर $\frac{२क्ष}{३}$: अ : : ब : क तर $\frac{२क्ष}{३}$ × क = अ × ब अथवा $\frac{२क्षक}{३}$ = अब गुणाकारानें २ क्षक = ३ अब भागाकारानें क्ष = $\frac{३अब}{२क}$

आणि जर १२ − क्ष : $\frac{क्ष}{२}$: : ४ : १ तर १२ − क्ष = २ क्ष तर स्थळांतरानें १२ = २ क्ष + क्ष = ३ क्ष भागाकारानें क्ष = $\frac{१२}{३}$ = ४

पूर्व प्रकारांचीं वेगळालीं उदाहरणें

प्रथम ७ क्ष − १८ = ४ क्ष + ६ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय

आतां ७ क्ष − १८ = ४ क्ष + ६

स्थळांतरानें ७ क्ष − ४ क्ष = ६ + १८

तर . . . ३ क्ष = २४

भागाकारानें . . . . क्ष = $\frac{२४}{३}$ = ८ हें उत्तर.

दुसरें २० − ४ क्ष − १२ = ९२ − १० क्ष या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे याची किमत काय

आतां २० − ४ क्ष − १२ = ९२ − १० क्ष

स्थळांतरानें १० क्ष − ४ क्ष = ९२ − २० + १२

तर . . . . ६ क्ष = ८४

भागाकारानें . . . . . क्ष = $\frac{८४}{६}$ = १४ हें उत्तर.

तिसरें ४ अक्ष − ५ ब = ३ डक्ष + २ क या समीकरणांत क्ष

अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय ·

आतां ४ अक्ष−५ ब = ३ डक्ष + २क

स्थळांतरानें ४ अक्ष−३डक्ष = ५ ब + २क

तर ४ अ−३ड याणीं भागून क्ष = $\frac{५ब + २क}{४अ - ३ड}$ हें उत्तर ·

चवथें ५क्ष^२−१२क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^२ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय ·

आतां ५ क्ष^२−१२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^२ यांत सर्वपदांचा साधारण गुणक क्ष

त्याणें तीं भागून ५ क्ष−१२ = ९ + २ क्ष

स्थळांतरानें ५ क्ष−२ क्ष = १२ + ९

तर ३ क्ष = २१

भागाकारानें क्ष = $\frac{२१}{३}$ = ७ हें उत्तर ·

पांचवें ९ अक्ष^२−१५ अबक्ष^२ = ६ अक्ष^२ + १२ अक्ष^२ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय ·

आतां ९ अक्ष^२−१५ अबक्ष^२ = ६ अक्ष^२ + १२ अक्ष^२ यांत सर्व पदांचा साधारण गुणक ३ अक्ष^२

याणें तीं भागल्यानें ३ क्ष−५ ब = २ क्ष + ४

स्थळांतरानें ३ क्ष − २ क्ष = ५ ब + ४

तर क्ष = ५ ब + ४ हें उत्तर ·

साहावें $\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५}$ = २ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त

पद

पद आहे त्याची किमत काय.

आतां $\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$

प्रथम छेद ३ याणीं गुणून $क्ष - \frac{३क्ष}{४} + \frac{३क्ष}{५} = ६$

दुसरे छेद ४ याणीं गुणून $४क्ष - ३क्ष + \frac{१२क्ष}{५} = २४$

राहिले छेद ५ याणीं गुणून $२०क्ष - १५क्ष + १२क्ष = १२०$

तर . . . . . $१७क्ष = १२०$

भागाकारानें . . . . $क्ष = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७}$ हें उत्तर.

दुसर्‍ये रीतीनें

$\frac{क्ष}{३} - \frac{क्ष}{४} + \frac{क्ष}{५} = २$

३ . ४ . ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून

६० याणीं सर्व पदें गुणिल्यानें $\frac{६०क्ष}{३} - \frac{६०क्ष}{४} + \frac{६०क्ष}{५} = १२०$

तर $२०क्ष - १५क्ष + १२क्ष = १२०$

तर . . . . . . $१७क्ष = १२०$

भागाकारानें . . . . $क्ष = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१}{१७}$ हें पूर्ववत् उत्तर.

सातवें $\frac{क्ष-५}{३} + \frac{क्ष}{२} = १२ - \frac{क्ष-१०}{३}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय.

आतां $\frac{क्ष-५}{३} + \frac{क्ष}{२} = १२ - \frac{क्ष-१०}{३}$

प्रथम छेद ३ याणीं गुणिल्यानें $क्ष - ५ + \frac{३क्ष}{२} = ३६ - क्ष + १०$

दुसरे छेद २ याणीं गुणिल्यानें $२क्ष - १० + ३क्ष = ७२ - २क्ष + २०$

स्थळांतरानें

स्थळांतरानें . . . . $२क्ष + ३क्ष + २क्ष = ७२ + २० + १०$

तर . . . . . . $७क्ष = १०२$

भागाकारानें . . . . . . $क्ष = \frac{१०२}{७} = १४\frac{४}{७}$ हें उत्तर.

आठवें $\sqrt{\frac{३क्ष}{४}} + ७ = १०$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

आतां . . . $\sqrt{\frac{३क्ष}{४}} + ७ = १०$

स्थळांतरानें . . . $\sqrt{\frac{३क्ष}{४}} = १० - ७ = ३$

वर्गकेल्यानें . . . . $\frac{३क्ष}{४} = ३^२ = ९$

गुणाकारानें . . . . $३क्ष = ३६$

भागाकारानें . . . . $क्ष = \frac{३६}{३} = १२$ हें उत्तर.

नववें $२क्ष + २\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ^२ + क्ष^२}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

आतां $२क्ष + २\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = \frac{५अ^२}{\sqrt{अ^२ + क्ष^२}}$

आतां $\sqrt{अ^२ + क्ष^२}$ याणें गुणिल्यानें $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} + २(अ^२ + क्ष^२) = ५अ^२$

तर . . . . $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} + २अ^२ + २क्ष^२ = ५अ^२$

स्थळांतरानें . . . . $२क्ष\sqrt{अ^२ + क्ष^२} = ३अ^२ - २क्ष^२$.

वर्गकेल्यानें . . . . $४क्ष^२ \times \overline{अ^२ + क्ष^२} = \overline{३अ^२ - २क्ष^२}^२$

तर . . . . $४अ^२क्ष^२ + ४क्ष^४ = ९अ^४ - १२अ^२क्ष^२ + ४क्ष^४$

दोनही बाजूंचीं $४क्ष^४$ हीं दोन पदें

टाकिल्यानें $४अ^२क्ष^२ = ९अ^४ - १२अ^२क्ष^२$

स्थळांतरानें

स्थळांतरानें . . . . . $४अ^{२}क्ष^{२} + १२अ^{२}क्ष^{२} = ९अ^{४}$

तर . . . . $१६अ^{२}क्ष^{२} = ९अ^{४}$

भागाकारानें . . . . . . $क्ष^{२} = \frac{९अ^{४}}{१६अ^{२}} = \frac{९अ^{२}}{१६}$

वर्गमूळकेल्यानें . . . . . $क्ष = \sqrt{\frac{९अ^{२}}{१६}} = \frac{३}{४}अ$ हेंउत्तर.

दाहावें $२क्ष-५+१६=२१$ यासमीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमतकाय.

उत्तर $क्ष=५$

अकरावें $६क्ष-१५=क्ष+६$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर $क्ष=४\frac{१}{५}$

बारावें $८-३क्ष+१२=३०-५क्ष+४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर $क्ष=७$

तेरावें $क्ष+\frac{१}{३}क्ष-\frac{१}{४}क्ष=१३$, या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर $क्ष=१२$

चौदावें $३क्ष+\frac{१}{२}क्ष+२=५क्ष-४$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर $क्ष=४$

पंधरावें $४अक्ष+\frac{१}{३}अ-२=अक्ष-बक्ष$ या समीकरणां

त

त क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर क्ष = $\frac{६ - अ}{२अ + ३ब}$

सोळावें $\frac{१}{३}$ क्ष − $\frac{१}{४}$ क्ष + $\frac{१}{५}$ क्ष = $\frac{१}{२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमतकाय -

उत्तर क्ष = $\frac{३०}{१७}$

सत्रावें $\sqrt{४ + क्ष} = ४ - \sqrt{क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर क्ष = २ $\frac{१}{४}$

अठरावें ४ अ + क्ष = $\frac{क्ष^२}{४अ + क्ष}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय -

उत्तर क्ष = − २ अ

एकुणिसावें $\sqrt{४अ^२ + क्ष^२} = \sqrt{४ब^२ + क्ष^२}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर क्ष = $\sqrt{\frac{ब^२ - ४अ^२}{२अ}}$

विसावें $\sqrt{क्ष} + \sqrt{२अ + क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ + क्ष}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय -

उत्तर क्ष = $\frac{२}{३}$ अ

एकविसावें $\frac{अ}{१ + २क्ष} + \frac{अ}{१ - २क्ष}$ = २ब या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय.

उत्तर क्ष = $\frac{१}{२}\sqrt{\frac{ब - अ}{ब}}$

बाविसावें

बाविसावें $अ + क्ष = \sqrt{अ^2 + क्ष\sqrt{४ब^2 + क्ष^2}}$ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पद आहे त्याची किमत काय -

उत्तर $क्ष = \frac{ब^2}{अ} - अ$

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति-

जेव्हां दोन अव्यक्त पदें आहेत तीं वेगळाल्ये दोन समीकरणांत येतात तेव्हां पुढील तीन रीतींतून एकेरीतीनें त्या दोन समीकरणांस एकत्र करून त्यांचें एकच समीकरण करितां येईल ·

प्रथमरीति-

प्रत्येक समीकरणांत पूर्वीं सांगीतल्ये रीतीकरून एक अव्यक्तपदाची किमत राहिल्ये दुसर्ये पदांचे किमती करून काढावी · नंतर या दोन बराबर किमतींपासून एक नवें समीकरण होईल · ज्यांत अव्यक्त पद एकच येईल · त्याची किमत पूर्वरीतीप्रमाणें निघेल* ·

टीप · यांत उघड दिसतें किं ज्या अव्यक्तपदाची किमत काढायास सुगम आहे त्यापासून सांगीतल्ये समीकरणांत किमत काढायास आरंभ करावा -

उदाहरणें ·

प्रथम $\begin{cases} २क्ष + ३य = १७ \\ ५क्ष - २य = १४ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आ-

---

* या रीतीस तें प्रत्यक्ष आश्रय होय · ज्या वस्तू एकवस्तूशीं बराबर त्या सर्व परस्पर बराबर · तसें पुढील दोन रीतींसही आश्रय उघड प्रकटार्थच आहेत ·

णि

णि य या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ.
प्रथमसमीकरणांत २क्ष+३ य=१७ क्षची किमत काढायाकरितां ३य यांस स्थळांतर करून २ याणीं भागिल्यानें क्ष= $\frac{१७-३य}{२}$
दुसऱ्ये समीकरणांत ५क्ष-२य=१४ क्षची किमत काढायाकरितां २य यास स्थळांतर करून ५ याणीं भागिल्यानें क्ष= $\frac{१४+२य}{५}$
नंतर क्षचा दोन किमती परस्पर बराबर करून $\frac{१७-३य}{२}=\frac{१४+२य}{५}$
आतां पूर्वरीतीनें २ आणि ५ या छेदानीं गुणिल्यानें ८५-१५य=२८+४य
स्थळांतरानें . . . . . ८५-२८=४य+१५य
तर . . . . . . १९य=५७
भागाकारानें . . . . . य = $\frac{५७}{१९}$=३

नंतर यची किमत पूर्व कोणत्येही समीकरणांत उघड मांडिल्यानें प्रथमांत क्ष= $\frac{१७-९}{२}$=४ आणि दुसऱ्यांत क्ष= $\frac{१४+६}{५}$=४ हें उत्तर.

दुसरें $\left\{\begin{matrix}क्ष+य=अ\\ क्ष-य=ब\end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील क्ष=अ-य
आणि दुसऱ्यांतील . . क्ष=ब+य
याजकरितां . . अ-य=ब+य
नंतर स्थळांतरानें . . . २य=अ-ब
भागाकारानें . . . . य= $\frac{अ-ब}{२}$

प्रथमांत

प्रथमांत यची ही किमत उघड लिहिल्यानें $क्ष = अ - \frac{अ - ब}{२} = \frac{अ + ब}{२}$
दुसऱ्यांत यची ही किमत उघड लिहिल्यानें $क्ष = ब + \frac{अ - ब}{२} = \frac{अ + ब}{२}$

हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

तिसरें $\begin{cases} \frac{१}{२}क्ष + \frac{१}{३}य = ७ \\ \frac{१}{३}क्ष + \frac{१}{२}य = ८ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील . . . $\frac{क्ष}{२} = ७ - \frac{य}{३}$
गुणाकारानें . . . $क्ष = १४ - \frac{२य}{३}$
दुसऱ्यांतील . . . $\frac{क्ष}{३} = ८ - \frac{य}{२}$
गुणाकारानें . . . $क्ष = २४ - \frac{३य}{२}$
याजकरितां . . . $२४ - \frac{३य}{२} = १४ - \frac{२य}{३}$
प्रथम छेद २ यांणीं गुणिल्यानें $४८ - ३य = २८ - \frac{४य}{३}$
दुसरे छेद ३ यांणी गुणिल्यानें $१४४ - ९य = ८४ - ४य$
स्थळांतरानें . . . $१४४ - ८४ = ९य - ४य$
तर . . . $६० = ५य$
अथवा . . . $५य = ६०$
भागाकारानें . . . $य = \frac{६०}{५} = १२$

प्रथमांत यची किमत १२ ती लिहिल्यानें $क्ष = १४ - \frac{२ \times १२}{३} = १४ - ८ = ६$
दुसऱ्यांत यची किमत १२ ती लिहिल्यानें $क्ष = २४ - \frac{३ \times १२}{२} = २४ - १८ = ६$

हीं दोनही बराबर हें उत्तर.

चवथें $\begin{cases} \frac{१}{२}क्ष + २य = अ \\ \frac{१}{२}क्ष - २य = ब \end{cases}$ या दोन समीकरणांत क्ष आणि

य

य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ ·

उत्तर क्ष = अ + ब आणि य = $\frac{१}{२}$अ − $\frac{१}{२}$ब

पांचवें $\left\{\begin{matrix} ३क्ष + य = २२ \\ ३य + क्ष = १८ \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ -

उत्तर क्ष = ६ आणि य = ४

साहावें $\left\{\begin{matrix} \frac{१}{२}क्ष + \frac{१}{३}य = ४ \\ \frac{१}{३}क्ष + \frac{१}{२}य = ३\frac{१}{२} \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ ·

उत्तर क्ष = ६ आणि य = ३

सातवें $\frac{२क्ष}{३} + \frac{३य}{५} = \frac{२२}{५}$ आणि $\frac{३क्ष}{५} + \frac{२य}{३} = \frac{६७}{१५}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ ·

उत्तर क्ष = ३ आणि य = ४

आठवें क्ष + २य = स आणि $क्ष^{२} - ४य^{२} = ड^{२}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ ·

उत्तर क्ष = $\frac{स^{२} + ड^{२}}{२स}$ आणि य = $\frac{स^{२} - ड^{२}}{४स}$

नववें क्ष − २य = ड आणि क्ष : य : : अ : ब या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ ·

उत्तर क्ष = $\frac{अड}{अ - २ब}$ आणि य = $\frac{बड}{अ - २ब}$

दुसरी रीति.

दोन समीकरणांत अतिसोईचें जें अव्यक्तपद असेल त्याची किंमत प्रथम काढ. नंतर दुसर्या समीकरणांत ती किंमत त्या अव्यक्ताचे स्थळीं लिहिल्यानें दुसरें नवें समीकरण होईल असें किं जांत एकच अव्यक्तपद राहील नंतर त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणें काढितां येइल.

उदाहरणें.

प्रथम $\begin{cases} क्ष+२य=१७ \\ ३क्ष-य=२ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे याजकरितां तेथून आरंभ करावा. क्ष=१७-२य ह्मणोन ही किंमत दुसर्यांत क्षचे स्थळीं लिहून . . . ३(१७-२य)-य=२

तर . . . . . ५१-६य - य=२

स्थळांतरानें . . . . -६य - य=२-५१

सर्व चिन्हें बदल करून . . ६य + य=५१-२

तर . . . . ७य=४९

भागाकारानें . . . . . य=$\frac{४९}{७}$=७

तर . . . क्ष=१७-२य

ह्मणजे . . . क्ष=१७-२×७=१७-१४=३ हें उत्तर.

दुसरें $\begin{cases} क्ष+य=१३ \\ क्ष-य=३ \end{cases}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य

या

या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे याजकरितां तेथून आरंभ करावा. $क्ष = १३ - य$ ह्मणोन ही किमत दुसर्यांत क्षचे स्थळीं लिहून . . . . . $१३ - य - य = ३$

स्थळांतरानें व चिन्हें बदल करून . . . $२य = १३ - ३ = १०$

भागाकारानें . . . . . . $य = \frac{१०}{२} = ५$

तर . . . . . $क्ष = १३ - य$

ह्मणजे . . . . $क्ष = १३ - ५ = ८$ हें उत्तर.

तिसरें $\left\{\begin{matrix} क्ष : य :: अ : ब \\ क्ष^२ + य^२ = क \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांत क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

आतां प्रमाणास समीकरण रूप दिल्यानें . $बक्ष = अय$

भागाकारानें . . . . $क्ष = \frac{अय}{ब}$

ही किमत दुसर्यांत क्षचे स्थळीं लिहिल्यानें $\left(\frac{अय}{ब}\right)^२ + य = क$

अथवा . . . . $\frac{अ^२य^२}{ब^२} + य^२ = क$

छेद काढिल्यानें . . . $अ^२य^२ + ब^२य^२ = ब^२क$

$अ^२ + ब^२$ याणें भागिल्यानें . . . . $य^२ = \frac{ब^२क}{अ^२ + ब^२}$

वर्गमूळानें . . . . . $य = \sqrt{\frac{ब^२क}{अ^२ + ब^२}} = ब\sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}}$

ही किमत दुसर्यांत क्षचे स्थळीं लिहिल्यानें $क्ष = \frac{अ \times ब\sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}}}{ब} = अ\sqrt{\frac{क}{अ^२ + ब^२}}$ हें उत्तर.

चवथें $२क्ष + ३य = २९$ आणि $३क्ष - २य = ११$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

उत्तर

उत्तर क्ष=७ आणि य=५

पांचवें क्ष+य=१४ आणि क्ष−य=२ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ-

उत्तर क्ष=८ आणि य=६

साहावें $\left\{\begin{matrix} क्ष : य :: ३ : २ \\ क्ष^{२} - य^{२} = २० \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ-

उत्तर क्ष=६ आणि य=४

सातवें $\frac{क्ष}{३} + ३य = २१$ आणि $\frac{य}{३} + ३क्ष = २९$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ-

उत्तर क्ष=९ आणि य=६

आठवें $१० - \frac{क्ष}{२} = \frac{य}{३} + ४$ आणि $\frac{क्ष - य}{२} + \frac{क्ष}{४} - २ = \frac{३य - क्ष}{५} - १$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांची किमत काढ-

उत्तर क्ष=८ आणि य=६

नववें क्ष : य :: ४ : ३ आणि $क्ष^{३} - य^{३} = ३७$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ-

उत्तर क्ष=४ आणि य=३

तिसरी रीति.

सांगीतलीं दोन समीकरणें तशी संख्येनें किंवा अक्षर

चिन्हानें

चिन्हानें गुणावीं किंवा भागावीं किं जेणेंकरून दोहोंतही एक अव्यक्त पद बरोबर होईल.

नंतर त्यांतील धन ऋण चिन्हें असें दाखवितात तसें त्या दोन समीकरणाची बेरीज किंवा वजा बाकी केल्यानें एक नवें समीकरण होईल. असें किं ज्यांत एकच अव्यक्तपद राहील. त्याची किमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल. ह्मणजे जेव्हां त्या दोन बराबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हें विरूप आहेत तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी. आणि जेव्हां तीं सरूप आहेत तेव्हां वजा बाकी करावी.

टीप. विषमवेळाप्रकाशक पदें समवेळाप्रकाशक करणें तर परस्परांस परस्परांचे वेळाप्रकानीं गुणावीं.

उदाहरणें.

प्रथम $\left\{\begin{matrix} ३क्ष+५य=४० \\ क्ष+२य=१४ \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

आतां दुसर्‍यें समीकरणास ३ याणीं गुणून $\begin{matrix} ३क्ष+६य=४२ \\ ३क्ष+५य=४० \end{matrix}$ नंतर यांतून प्रथम समीकरण वजाकरून . . . . . ∴ य=२ ही यची किमत दुसर्‍यें समीकरणांत लिहून . . . . क्ष=१४−२य

ह्मणजे . . . . क्ष=१४−२×२=१४−४=१०

उत्तर क्ष=१० आणि य=२

दुसरें $\left\{\begin{matrix} ५क्ष-३य=१ \\ २क्ष+५य=१६ \end{matrix}\right\}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि

णि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

आतां या समीकरणांतील प्रथम पदें ज्यांत क्ष अव्यक्त पद आहे तीं इछिल्या प्रमाणें बरोबर करितां येतील. अथवा दुसरीं पदें ज्यांत य अव्यक्तपद आहे तीं बरोबर करितां येतील. दोन प्रथम पदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ याणीं आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें. आणि दुसरीं पदें बराबर करणें तर प्रथम ५ याणीं आणि दुसरें ३ याणीं गुणावें जसें पुढें सांगतो.

१ प्रथम पदें बराबरकरायास प्रथम समीकरण २ याणीं गुणावें.

म्हणजे $१०क्ष - ६य = १८$

आणि दुसरें ५ याणीं गुणावें म्हणजे $१०क्ष + २५य = ८०$

नंतर वरचें खालच्यांत वजाकरून $३१य = ६२$

भागाकारानें $य = \frac{६२}{३१} = २$ याजकरितां

ही किमत प्रथमांत यचे स्थळीं लिहून $क्ष = \frac{९ + ३य}{५} = \frac{९ + ६}{५} = \frac{१५}{५} = ३$

२ दुसरीं पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण ५ याणीं गुणावें.

म्हणजे $२५क्ष - १५य = ४५$

आणि दुसरें ३ याणीं गुणावें म्हणजे $६क्ष + १५य = ४८$

नंतर दोहोंची मिळवणी करून $३१क्ष . \times = ९३$.

भागाकारानें $क्ष = \frac{९३}{३१} = ३$ ही किमत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहावी $-य = \frac{९ - ५क्ष}{३}$.

अथवा

अथवा $\text{य} = \frac{\text{५क्ष} - \text{९}}{\text{३}} = \frac{\text{५} \times \text{३} - \text{९}}{\text{३}} = \frac{\text{१५} - \text{९}}{\text{३}} = \frac{\text{६}}{\text{३}} = \text{२}$

उत्तर क्ष=३ आणि य=२

तिसरें $\frac{\text{क्ष} + \text{८}}{\text{४}} + \text{६य} = \text{२१}$ आणि $\frac{\text{य} + \text{६}}{\text{३}} + \text{५क्ष} = \text{२३}$ या दोंन समीकरणांतील क्ष आणि य या अव्यक्तपदांची किमत काढ.

उत्तर क्ष=४ आणि य=३

चवथें $\frac{\text{३क्ष} - \text{य}}{\text{४}} + \text{१०} = \text{१३}$ आणि $\frac{\text{३य} + \text{क्ष}}{\text{२}} + \text{५} = \text{१२}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

उत्तर क्ष=५ आणि य=३

पांचवें $\frac{\text{३क्ष} + \text{४य}}{\text{५}} + \frac{\text{क्ष}}{\text{४}} = \text{१०}$ आणि $\frac{\text{६क्ष} - \text{२य}}{\text{३}} + \frac{\text{य}}{\text{६}} = \text{१४}$ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

उत्तर क्ष=८ आणि य=४

साहावें ३क्ष+४य=३८ आणि ४क्ष−३य=९ या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य या दोन अव्यक्तपदांची किमत काढ.

उत्तर क्ष=६ आणि य=५

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति.

जेव्हां तीन आदिकरून अव्यक्त पदें आहेत.

जेव्हां तीन अव्यक्तपदें वेगळाल्ये समीकरणांत येतात. तेव्हां या पुढील रीतीकरून त्यांचें एकच समीकरण होईल.

रीति :

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किमत काढावी ती अशी कि राहिल्ये दोन अव्यक्त पदांची किमत ठाउक आहे च असें मानून · नंतर या किमतींत प्रथम दुसरीचे बरोबर करावी · आणि प्रथम किंवा दुसरी तिसरीचे बराबर करावी ह्मणजे दोन नवीं समीकरणें होतील · जांत दोनमात्र अव्यक्त पदें राहातील · जांची किमत पूर्वरीतीकरून निघेल · यापासूनच तिसर्याची किमत साफ कळेल ·

२ अथवा एक समीकरणांतील एक अव्यक्त पदाची किमत काढून ती राहिल्ये दोन समीकरणांत त्या अव्यक्त पदाचे स्थळीं लिहून दोन नवीं समीकरणें होतील · जांत दोन मात्र अव्यक्त पदे येतील · नंतर पूर्वरीती करून त्यांची किमत निघेल ·

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षरचिन्ह याणें गुणावें अथवा भागावें · जापासून त्या सर्व समीकरणांत एकपद बराबर होईल · नंतर या तीन समीकरणांतून कोणतींही दोन समीकरणें तिसर्यांतून वजा केलीं अथवा कोणत्येही दोहोंची तिसर्याशीं बेरीज घेतली · जसें त्यांचे चिन्हापासून कळेल तसें करावें · तर दोन नवीं समीकरणें होतील · अशींकिं जांतील अव्यक्तपदांची किमत पूर्वरीतीकरून काढितां येईल ·

आणि या रीतीनें ४, ५ किंवा याहून अधिक अव्यक्तपदें

असतील

असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येतील. परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किमत काढायाची रीति याहून थोडक्यांत आणि अति सोपी आहे ती बीजगणिताचा अतिअभ्यास केला असतां प्रकट होईल.

उदाहरणें

प्रथम $\left\{\begin{array}{l} क्ष+य+ज्ञ=९ \\ क्ष+२य+३ज्ञ=१६ \\ क्ष+३य+४ज्ञ=२१ \end{array}\right\}$ या तीन समीकरणांतील क्ष य आणि ज्ञ या तीन अव्यक्त पदांची किमत काढ.

१ रीतीनें.

या प्रत्येक समीकरणांत य आणि ज्ञ यांस स्थळांतर करून लिहि.

$$क्ष=९-य-ज्ञ$$

$$क्ष=१६-२य-३ज्ञ$$

$$क्ष=२१-३य-४ज्ञ$$

नंतर प्रथम किमत दुसरीशीं बराबर करून $९-य-ज्ञ=१६-२य-३ज्ञ$ } हीं दोन नवीं स-
तसेंच दुसरी तिसरीशीं बराबर करून $१६-२य-३ज्ञ=२१-३य-४ज्ञ$ } मीकरणें

यांतील प्रथमांत ९ आणि ज्ञ आणि २य यांस
स्थळांतर करून $य=७-२ज्ञ$ } यचा दोन कि-
दुसऱ्यांत १६ आणि ३ज्ञ आणि ३य यांस० $य=५-ज्ञ$ }
मती बराबर करून $५-ज्ञ=७-२ज्ञ$

५आणि

५ आणि २ज्ञ ह्यांस स्थलांतर करून   ज्ञ=२

तेव्हां य=५−ज्ञ ह्मणजे य=५−२=३

आणि क्ष=९−य−ज्ञ ह्मणजे क्ष=९−३−२=४

उत्तर क्ष=४ य=३ ज्ञ=२.

२ रीतीनें.

प्रथम समीकरणांत क्ष=९−य−ज्ञ ही क्षची किंमत दुसर्‍यांस स-मीकरणांत लिहून ९+य+२ज्ञ=१६ }
आणि तिसर्‍यांत ९+२य+३ज्ञ=२१ } हीं दोन नवीं समीकरणें आ०

प्रथमांत ९ आणि २ज्ञ यांस स्थलांतर करून य=७−२ज्ञ ही य-ची किंमत शेवटील समीकरणांत लिहून ९+१४−४ज्ञ+३ज्ञ=२१

स्थलांतरानें २=ज्ञ

याजकरितां य=७−२ज्ञ

ह्मणजे य=७−४=३

आणि क्ष=९−य−ज्ञ

ह्मणजे क्ष=९−३−२=४

उत्तर क्ष=४, य=३, ज्ञ=२ पूर्ववत् आहे.

३ रीतीनें.

प्रथम समीकरण दुसर्‍यांतून वजा करून य+२ज्ञ=७ } हीं दोन नवीं समी-
आणि दुसरें तिसर्‍यांतून वजा करून य+ज्ञ=५ } करणें झालीं यांतील
प्रथमांतून दुसरें वजा करून ज्ञ=२

याजकरितां

याजकरितां $\quad$ य = ५ − ज्ञ

ह्मणजे $\quad$ य = ५ − २ = ३

आणि $\quad$ क्ष = ९ − य − ज्ञ

ह्मणजे $\quad$ क्ष = ९ − ३ − २ = ४

उत्तर क्ष = ४ , य = ३ , ज्ञ = २ पूर्व दोन उत्तरांबरोबर आहे.

दुसरें $\begin{cases} \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = १८ \\ \text{क्ष} + ३\text{य} + २\text{ज्ञ} = ३८ \\ \text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} + \frac{१}{२}\text{ज्ञ} = १० \end{cases}$ या तीन समीकरणांत क्ष य ज्ञ

यांची किमत काय.

उत्तर क्ष = ४ , य = ६ , ज्ञ = ८

तिसरें $\begin{cases} \text{क्ष} + \frac{१}{२}\text{य} + \frac{१}{३}\text{ज्ञ} = २७ \\ \text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} + \frac{१}{४}\text{ज्ञ} = २० \\ \text{क्ष} + \frac{१}{४}\text{य} + \frac{१}{५}\text{ज्ञ} = १६ \end{cases}$ या तीन समीकरणांत क्ष

य ज्ञ यांची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = १ , य = १२ , ज्ञ = ६०

चवथें क्ष − य = २ आणि क्ष − ज्ञ = ३ आणि य + ज्ञ = ९ या तीन समीकरणांत क्ष य ज्ञ यांची किमत काय.

उत्तर क्ष = ७ , य = ५ , ज्ञ = ४

पांचवें $\begin{cases} २\text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = ३४ \\ ३\text{क्ष} + ४\text{य} + ५\text{ज्ञ} = ४६ \\ ४\text{क्ष} + ६\text{य} + ८\text{ज्ञ} = ६८ \end{cases}$ या तीन समीकरणांत

क्ष

क्ष य ज्ञ या तीन अव्यक्त पदांची किंमत काय आहे.

प्रश्न समुदाय.

प्रश्नसमुदाय ह्मणजे कितिएक प्रश्न ज्यांपासून एकवर्णसमीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम प्रश्न, दोन संख्या शोधायाचा. ज्या दोन संख्यांची बेरीज १० होतात आणि वजा बाकी ६ होतात.

मोठी संख्या दाखवायाकरितां क्ष आणि लाहान संख्या दाखवायास य घे*.

तर प्रथम संकेतापासून क्ष + य = १०

दुसर्‍यापासून क्ष − य = ६

प्रति समीकरणांतील य यास स्थलांतरानें क्ष = १० − य } या दोन किं-

आणि क्ष = ६ + य } मती परस्पर

बरोबर करून ६ + य = १० − य

स्थलांतरानें २ य = ४

---

* या सर्व उदाहरणांत जितक्या अव्यक्तसंख्या आहेत त्यांचे स्थळीं तितकीं क्ष, य, ज्ञ इत्यादिक मूळ अक्षरलिपीचे शेवटील अक्षरें घेतात. तर याहून संक्षेप करून अव्यक्त संख्यांचे प्रतिस्थळीं वेगळालें अक्षरचिन्ह न घेणें कार्य होईल. परंतु शिकणारांस चांगला समज पडोन पक्कें व्हावें ह्मणोन असें लिहिलें.

भागाकारानें

भागाकारानें . . . . $य = \frac{४}{२} = २$

याजकरितां क्ष = ६ + य

म्हणजे क्ष = ६ + २ = ८

उत्तर ८ आणि २

दुसरा. समाजीक रुपये १००० आहेत ते अ ब क या तीनजणांस वांटून द्यावे असेकिं अला बपेक्षां २०० अधिक आणि बला कपेक्षां १०० अधिक होतील.

क्ष = अचाभाग. य = बचाभाग. आणि ज्ञ = कचाभाग. असें असो.

आतां क्ष + य + ज्ञ = १०००

क्ष = य + २००

य = ज्ञ + १००

प्रथम समीकरणांत क्षची किमत य + २०० लिहिलीतर त्या प्रथम समीकरणाचें रूप २य + २०० + ज्ञ = १००० असें होईल नंतर यांत यची किमत ज्ञ + १०० यचेस्थ० ३ज्ञ + ४०० = १०००

स्थलांतरानें . . . . ३ज्ञ = १००० − ४०० = ६००

भागांकारानें . . . . $ज्ञ = \frac{६००}{३} = २००$

आतां य = ज्ञ + १००

म्हणजे य = २०० + १०० = ३००

आणि क्ष = य + २००

म्हणजे

ह्मणजे क्ष=३००+२००=५००

उत्तर अ ५०० , ब ३०० , क २००

तिसरा. ५००० रुपये २ आसामीस वांटून देणें आहेत असे किं त्यांचे भाग परस्प प्रमाणांत होतील . असे ७ : ८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल .

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें दोन अव्यक्त भाग दाखवायास घे .

तर प्रश्नाप्रमाणें ७ : ८ :: क्ष : य .

यास समीकरणरूप देउन ७ य = ८ क्ष

आणि क्ष + य = ५०००

दुसऱ्ये समीकरणांत यला स्थ॰ क्ष = ५००० – य ही क्षची किमत प्रथमांत क्षचे स्थळीं लिहून ७ य = ४०००० – ८ य

८ य यांस स्थळांतर करून १५ य = ४००००

भागाकारानें य = $\frac{४००००}{१५}$ = २६६६ $\frac{२}{३}$

वरचें समीकरण क्ष = ५००० – य

यांत यची किमत लिहून क्ष = ५००० – २६६६ $\frac{२}{३}$ = २३३३ $\frac{१}{३}$

उत्तर क्षचा भाग २३३३ $\frac{१}{३}$ रुपये आणि यचा २६६६ $\frac{२}{३}$

चवथा. ती संख्या काय आहे . किं जीचा चौथा भाग पांचव्ये भागाहून १० यानीं अधिक आहे .

इछिली अव्यक्तसंख्या दाखवायास क्ष अक्षर चिन्ह घे .

आतां

आतां . . . . $\frac{१}{४}$ क्ष − $\frac{१}{५}$ क्ष = १०

प्रथम छेद ४ याणीं गुणून . . $\text{क्ष} - \frac{४}{५}\text{क्ष} = ४०$

दुसरे छेद ५ याणीं गुणून . . ५ क्ष − ४ क्ष = २००

तर . . . . क्ष = २०० इछिली संख्या हें उ-

त्तर·

पांचवा · ते अपूर्णांक काय होत जांचे अंशांत १ मिळविला असतां त्यांची किमत $\frac{१}{२}$ आणि छेदांत १ मेळविला तर त्यांची किमत $\frac{१}{३}$ होत्ये · तें सांग ·

एथे अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायास $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$ हीं अक्षर चिन्हें घे -

तर प्रश्नाप्रमाणें . . . $\frac{\text{क्ष}+१}{\text{य}} = \frac{१}{२}$

आणि . . . . $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}+१} = \frac{१}{३}$

प्रथमांत य आणि २ याणीं गुणून २क्ष + २ = य

दुसर्यांत य + १ आणि ३ याणीं गुणून ३ क्ष = य + १

प्रथम दुसर्यांतून वजा करून क्ष − २ = १

स्थळांतरानें . . . क्ष = १ + २ = ३

आतां . . . . य = २ क्ष + २

ह्मणजे . . . . य = ६ + २ = ८

उत्तर $\frac{३}{८}$ हे इछिले अपूर्णांक ·

साहावा · एक बिगारी याणें ३० दिवस चाकरी कबूल केली पुढील करारा प्रमाणें जा दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पे-

से

से २० आणि जा दिवशीं खेळेल किंवा गैर हजीर असेल त्या दिवसाचा उलटा दंड १० पैसे पुढें ३० दिवस पुरे आल्यानंतर करारा प्रमाणें त्याचे २४० पैसे निघाले तेव्हां खेळणें व गैर हजीरी यांत किती दिवस गेले ते सांग.

अव्यक्त कामाचे दिवसस्थळीं क्ष आणि खेळणें गैर हजीर या दिवसांचे स्थळीं य हीं दोन अक्षर चिन्हें घे.

आतां . . . . . क्ष+य=३०

आणि . . . . २०क्ष−१०य=२४० } या दोहोंची

प्रथम समीकरण १० याणीं गुणून १०क्ष+१०य=३०० }

मिळवणी करून . . . . ३०क्ष=५४०

भागाकारानें . . . . . क्ष=५४०/३० =१८ ही क्षची

किमत दुसर्‍ये समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहू॰ य = ३० − क्ष

ह्मणजे . . . . . य = ३० − १८ = १२

उत्तर कामाचे दिवस १८ खेळ व गैरहजीरी दि॰ १२

सातवा. एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें त्यांतून चतुर्थांश पाणीं गळोन गेलें आणि कांहीं कार्यार्थ ३० मण पाणीं काढिलें नंतर त्या पिंपांत काठी उभी करून सुमार पाहातां अर्धे पिंप पाणी बाकी आहे. तेव्हां त्या सगळ्ये पिंपांत किती मण पाणी राहील सांग.

सगळ्ये पिंपाचें पाणीं अव्यक्त त्याचे स्थळीं क्ष मण घे.

आतां

आतां . . . . $\frac{१}{४}$ क्ष इतकें पाणीं गळोन गेलें · याजक-
करितां . . . . $\frac{१}{४}$ क्ष+ ३० मण इतकें पाणीं गेलें ·
तेव्हां . . . . . $\frac{१}{२}$ क्ष = $\frac{१}{४}$ क्ष+ ३० मण
४ या छेदानीं गुणून . . २ क्ष = क्ष+ १२०
क्ष यास स्थळांतर करून . . क्ष = १२० मण हें उत्तर ·

आठवा · २० या संख्येचे दोन भाग कर ते असे किं त्यांतील एक भागाची तिपट आणि दुसऱ्ये भागाची पांचपट यांची बेरीज ७६ होईल ·

एथे दोन अव्यक्त भागांचे स्थळीं क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे-
आतां . . . . क्ष+ य = २०
आणि . . . . . ३ क्ष+५य = ७६ } या दोहोंची व-
प्रथम समीकरण ३ याणीं गुणून ३ क्ष+ ३ य = ६० }
जा बाकी करून . . . . २य = १६
भागाकारानें . . . . . य = $\frac{१६}{२}$ = ८
प्रथम समीकरण . . . . क्ष = २० − य यांत यचीं
किमत यचे स्थळीं लिहून . . . क्ष = २० − ८ = १२
उत्तर १२ आणि ८

नववा · एक मनुष्यानें १ पैशाचे २ प्रमाणें कांहीं आंबे खरेदी करून पुन: तितकेच आंबे १ पैशाचे ३ प्रमाणें खरेदी केले नंतर ते सर्व आंबे काहीं नफा व्हावा या आशेनें २ पैशांचे ५ आंबे या प्रमाणें

प्रमाणें विकले तों शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते सांग-

आंब्यांची संख्या प्रत्येक अव्यक्त ती दाखवायास क्ष अक्षर घे-

आतां . . . . $\frac{१}{२}$ क्ष ही पहिल्ये खरेदीची किमत

आणि . . . . $\frac{१}{३}$ क्ष ही दुसर्ये खरेदीची किंमत-

जर ५ आंबे : २ पैशांस : : २ क्ष (सर्व आंबे) : $\frac{४}{५}$ क्ष ह्मणोन ही दोन खरेद्यांची किमत आहे - दर ५ आंबे २ पैशांस -

तर प्रश्नाप्रमाणें . . $\frac{१}{२}$ क्ष + $\frac{१}{३}$ क्ष − $\frac{४}{५}$ क्ष = ३

प्रथम छेद २ याणीं गुणून . क्ष + $\frac{२}{३}$ क्ष − $\frac{८}{५}$ क्ष = ६

दुसरे छेद ३ याणीं गुणून . ३ क्ष + २ क्ष − $\frac{२४}{५}$ क्ष = १८

तिसरे छेद ५ याणीं गुणून . १५ क्ष + १० क्ष − २४ क्ष = ९०

ह्मणजे . . . . क्ष = ९० प्रति खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर -

दाहावा - अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळायास बसले त्यांत अचे जवळ ८०० रुपये आणि बचे जवळ ६०० हे खेळाचे आरंभीं होते पुढें खेळांत परस्परांची हार जिंक बहुत वेळा होउन शेवटास उठोन गेले ते समयीं अचेजवळ रुपये बजवळ राहिल्याचे तिपट राहिले तेव्हां अ बजवळून किती रुपये जिंकला तें सांग -

एथे अचे जिंकीचे रुपये अव्यक्त त्यांचे स्थळीं क्ष अक्षर घे -

आतां

आतां . . . . . . ८००+ क्ष इतकें अचें मुद्दल व जिंक

आणि . . . . . ६००− क्ष इतकें बचें मुद्दल व हार

तर प्रश्नाप्रमाणे . . . $८००+क्ष = १८००−३क्ष$

८०० आणि ३ क्ष यांस स्थळांतर करून . $४ क्ष = १०००$

भागाकारानें . . . . . $क्ष = \frac{१०००}{४} = २५०$

इतके रुपये ब पासून अ जिंकला हें उत्तर.

अकरावा. दोन संख्या काढ. अशा किं जांची वजा बाकी ४ आणि जांचे वर्गांची वजा बाकी ६४ होतील.

उत्तर ६ आणि १०

बारावा. दोन संख्या काढ. अशा किं प्रथम संख्येचें अर्ध आणि दुसर्ये संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि प्रथम संख्येचा एक चतुर्थांश आणि दुसर्ये संख्येचा एक पंचमांश मिळून ५ होतील.

उत्तर ८ आणि १५

तेरावा. २० या संख्येचे दोन भाग कर असे किं एक भागाचा एक तृतीयांश आणि दुसर्ये भागाचा एक पंचमांश मिळून ६ होतील.

उत्तर १५ आणि ५

चोदावा. तीन संख्या काढ. अशा किं प्रथम आणि दुसरी यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी यांची बेरीज ८ आणि

णि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज ९ होतील ·

उत्तर ३ आणि ४ आणि ५

पंधरावा · कोणी एक गृहस्थ होता त्याजवळ रुपये २८००० हजार होते त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या ऐशीं दोन अपत्यें होतीं पुढें तो मरण पावला · त्याणें पूर्वींच लिहून ठेविलें होतें किं पुत्रास १ रुपया१ पावला आणि कन्येस २ पावले या प्रमाणें वांटून द्यावे · तेव्हां ते रुपये त्याचे लेखाप्रमाणें वांटून देतां कोणास किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग ·

उत्तर पुत्रास २०००० कन्येस ८००० .

सोळावा · अ ब क या त्रियगांनीं सर्कत केली त्यांत सगळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत बचे अचे दुपट आणि वर २००आणि कचे अ आणि ब यांचे बेरिजे बराबर तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग ·

उत्तर अचे ६०० बचे १४ आणि कचे २०००

सत्रावा · कोणी एक मनुष्यानें १००० रुपये कर्ज देणें होतें तें चुकविल्ये समयीं त्याणें कांहीं मोहोरा व कांहीं रुपये ऐशी खिचडी मिळून नग २०२ देउन तें बराबर चुकविलें तेव्हां त्यांत मोहोरा किती व रुपये किती तें सांग·

उत्तर ५७ मोहारा आणि १४५ रुपये

अठरावा · अ आणि ब हे दोघे मित्र होते त्यांत अ बला सांगे

सांगे किं तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजवळ तुझे बाकीचे दुप-
पट रुपये होतील . तसें ब अला सांगे किं तूं मजला रुपये १० दिले-
स तर मजवळ तुझे बाकीचे तिपट रुपये होतील तेंव्हां एकेकाज-
वळ रुपये किती किती होते ते सांग -

उत्तर अ२२ ब २६

एकुणिसावा - कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेउन बाजा-
रांत गेला तेथें एक दुकानीं सामानाबद्दल २ रुपये खर्च करून पुढें
चालिला नंतर जवळ रुपये अधिक असावे ह्मणोन जे बाकी राहि-
लें होते त्यांचे बराबर रुपये दुसर्यापासून कर्ज घेतले नंतर दुसर्या
दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपयां ब-
राबर पूर्ववत् कर्ज घेउन तिसर्ये दुकानीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करू-
न पुनः जवळचे बाकी बराबर पूर्ववत् कर्ज घेउन चोथ्ये दुकानीं गेला
तेथें २ रुपये खर्च केले तों जवळ बाकी कांहीं नाहीं असें आलें तेंव्हां
तो गृहस्थ मुळीं किती रुपये घेउन बाजारांत गेला सांग -

उत्तर ३ रुपये आणि ३ पावले

विसावा - कोणी एक मनुष्य त्याची स्त्री आणि पुत्र यांस-
ह वर्तमान प्रवासास गेला होता तेथें मार्गीं कोणा एकाचे घरीं तीं ति-
घेंजणें भोजनास गेलीं तेंव्हां त्याणें भोजन खर्च सांगीतला किं मु-
लास रुपया ⅓ आणि बायकोस मुलाबराबर आणि पुरुषाचा ⅓
अधिक आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री यांचे बराबर इतके रुपये
पडतील

पडतील ऐसें बोलणें ठरवून भोजन दिलें पुढे त्याणीं काय काय द्या-
वें सांग·

उत्तर बायकोस पा॰ ३ · · रे॰ ३३ ⅔ पुरुषास रु॰ १ · · पा॰ १ · · रे॰ ३३ ⅔

एकविसावा · एक कोठार आहे· त्यांत ६० खंडी धान्य रा-
हातें त्यांत त्रेवटी डाळ या रीतीनें भर्ली होती (त्रेवटी ह्मणजे चणे तु-
री आणि उडीद यांचा डाळी एकत्र मिश्रित) उडदांची डाळ चण्यांचे डा-
ळीपेक्षां ६ खंडी अधिक आणि तुरींची डाळ उडदांची डाळ आणि च-
ण्यांचे डाळीचा ⅓ इतक्याचे बराबर होती तेह्मां त्या तीन डाळी प्रत्ये-
कीं किती किती खंडी होत्या सांग-

उत्तर चण्यांची खं॰ १५ उडदांची खं॰ २१ तुरींची खं॰ २४

बाविसावा · कोणे एके सर्दाराजवळ फौज होती ती चौरस
आकृती उभी केली तर २८४ मनुष्यें बाकी राहातात आणि त्या चौरस
आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एकेक मनुष्य वाढविलें तर २५ म-
नुष्यें कमी येतात तेह्मां ती सर्व फौज किती होती सांग-

उत्तर २४०००

तेविसावा · ती संख्या काय आहे किं जीस ३, ५, ८ हे
पर्यायानें मेळविले असतां तीन बेरिजा भूमिति प्रमाणांत होतील·

उत्तर १

चौविसावा · कोणी तिघांजणानीं सर्कती व्यापार केला ते-
थें भांडवल रुपये ७६०० त्यांत प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळ-

ने

न तिसर्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात· तसें दुसरा आणिति- सरा यांचे भाग मिळून प्रथमापेक्षां ३६०० रुपये अधिक होतात तेह्मां एकेकाचे किती किती रुपये सांग·

उत्तर प्रथमाचे २००० दुसर्यांचे ३००० तिसर्यांचे २६००

पंचविसावा · त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत किं आप- रस्परांस आहेत जसे ३ : ४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बेरिजेचे बारापट आहे

उत्तर २१ , २८

सव्विसावा · कितिएक मनुष्यें खाणाबद्दल कबूल करून को- णाएकाचे घरीं जेवायास गेलीं होतीं त्यांत ४ मनुष्यें अधिक असतीं तर सर्वांस प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता आणि त्यांत तीन उ- णीं असतीं तर एकेकास अर्धअर्ध रुपया अधिक पडता तेह्मां सर्व म- नुष्यें किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्व मिळून किती रुपये ते सांग·

उत्तर २४ मनुष्यें · प्रत्येकास रुपये ३· · २ पा॰ आणि सर्व बेरीज रुपये ८४

सत्ताविसावा · कोणे एके शिलेदाराजवळ २ तट्टू आणि २ जिन होते त्यांत एक जिन बहुमोल त्याची किमत रुपये १८० आ- णि दुसरा जिन अल्पमोल त्याची किमत रुपये ३० जेह्मां प्रथम तट्टू- वर बहुमोल जिन आणि दुसर्ये तट्टूवर अल्पमोल जिन घालतो तें- ह्मां प्रथमाची किमत दुसर्याचे दुपट होत्ये · आणि जेह्मां प्रथमा-

वर

वर अल्पमोल जिन आणि दुसर्यावर बहुमोल जिन असें घालतो तेव्हां दुसर्याची किमत प्रथमाचे तिप्पट होत्ये. तेव्हां त्या दोन तट्टूंची जिनां वांचून वेगळाली किमत काय आहे ती सांग -

उत्तर प्रथमाची ६० रुपये दुसर्याची ९० रुपये.

अठ्ठाविसावा. त्या दोन संख्या काय आहेत ज्या परस्परां स आहेत जसे २ : ३ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६ मिळविले असतां त्या दोन बेरजा परस्परांस होतील - जसे ४ : ५

उत्तर ६ आणि ९

एकुणतिसावा. त्या दोन संख्या काय आहेत ज्यांत मोटी लाहानीस आहे अशी त्यांची बेरीज २० या संख्येस आहे आणि त्यांची वजा बाकी १० या संख्येस आहे -

उत्तर १५ आणि ४५.

तिसावा. त्या दोन संख्या काय आहेत. ज्यांची वजा बाकी. बेरीज आणि गुणाकार यांस होत्ये अशी २ ही संख्या ३ आणि ५ यांस आहे -

उत्तर २ आणि १०

एकतिसावा. गणित श्रेढीचा त्या तीन संख्या काय आहेत ज्यांत प्रथम तिसरीस आहे जसे ५ : ९ आणि त्या तिहीं ची बेरीज ६३ होतील -

उत्तर १५ २१ आणि २७

बत्तिसावा

बत्तिसावा · २४ या संख्येचे दोन भाग कर · असे किं मोटा भाग ल्हान भागानें भागिला आणि ल्हान भाग मोठ्ये भागानें भागिलातर ते दोन भागाकार परस्परांसहोतील असे ४:१

उत्तर १६ आणि ८

त्रेतिसावा · दोन ग्रहस्थ परस्पर अनेक गोष्टी बोलत होतें त्यांत एकानें दुसर्यास विचारिलें किं तुह्मास पुत्र २ त्यांचीं वयें काय आहेत तेह्वां त्याणें सांगीतलें जे त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बेरिजेंत १८ मिळविले असतां वडील पुत्राचे वयाचे दुपट होतात आणि दोघांचे वयांचे वजा बाकींत ६ वजा केले तर धाकट्याचे वया बरोबर होतात·

उत्तर ३० आणि १२ वर्षें·

चौतिसावा · त्या चार संख्या काय आहेत जांत प्रथम आणि दुसरी आणि तिसरी यांची बेरीज १३ होतील आणि प्रथम दुसरी आणि चौथी यांची बेरीज १५ होतील तसें प्रथम तिसरी आणि चौथी यांची बेरीज १८ तसें दुसरी तिसरी आणि चवथी यांची बेरीज २० होतील·

उत्तर २, ४, ७ आणि ९

पंत्तिसावा · ४८ या संख्येचे चार भाग कर असे किं प्रथमांत ३ मिळविले ती बेरीज दुसर्यांतून ३ वजा केले ती बाकी तिसरा तिहींनि गुणिला तो गुणाकार आणि चवथा तिहींनी

तिहीनीं भागिला तो भागाकार हे सर्व परस्पर बराबर होतील -

उत्तर ६, १२, ३ आणि २७

छत्तिसावा - कोणी एक फडिया सावकार आंबेमोहोर आणि पटण या दोन आतींचे तांदुळ १०० मण एकत्र करून विकायास इछितो त्यांत आंबेमोहोर २ रुपये मण आणि पटण १ रुपया २ पावल्यानी मण पडले आणि हाली सकट भाव १ रुपया २ पावले ५० रेसानीं मण असा आहें तेव्हां त्याणें कोण आतीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करावे ह्मणजे पडल्ये भावांत तोटा नयेईल तें सांग -

उत्तर आंबेमोहोर २५ मण - पटण ७५ मण -

वर्गसमीकरण -

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे -

एकाकी वर्गसमीकरण तेंच होय जांत अव्यक्तपदाचा वर्गमात्र येतो असें अक्ष^2=ब आणि या आतीचे वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पूर्वी एकवर्णसमीकरणांत सांगीतली आहे -

संयुक्तवर्गसमीकरण तेंच होय जाचे एक पदांत अव्यक्तपदाचा वर्गयेतो आणि दुसर्ये पदांत त्याच अव्यक्त पदाचा प्रथमघात येतो असें अक्ष^2+बक्ष=क -

सर्व संयुक्त वर्ग समीकरणांची पूर्वी सांगीतल्ये रीती करू

न

न पृथक्करणें केल्यानंतर तीं समीकरणें पुढील तीन सारणी कोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाचीं होतील असें रूप अव्यक्त पदाची किंमत काढायाकरितां त्यांस दिलें पाहिजे -

१ $क्ष^2$ + अक्ष = ब

२ $क्ष^2$ − अक्ष = ब

३ $क्ष^2$ − अक्ष = − ब

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगतो याप्रमाणें आहे जास वर्गपूरणीकरण म्हणतात -

१ सांगीतल्ये वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीनें सरळ करावें असें किं वरच्ये तीन कोष्टकांतून एक कोष्टकासारिखें रूप होईल याची रीति पदांस स्थळांतर करावें असेंकिं अव्यक्त पदें समीकरणाचे एक बाजूस होतील आणि व्यक्त पदें दुसऱ्ये बाजूस आणि जांत वर्ग आहे तें पद प्रथम स्थळीं तसें जांत प्रथम घात आहे तें पद दुसऱ्ये स्थळीं या प्रमाणें करावें नंतर अव्यक्त वर्गपदास अंक अथवा अक्षरचिन्ह वेळाप्रकाशक असेल तर त्याणें समीकरणाचीं सर्व पदें भागावीं .आणि जर तें अव्यक्त वर्गपद ऋण(−) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्व पदांचीं धन (+) ऋण (−) चिन्हें बदल करावीं कारण अव्यक्तवर्गपद धन (+) असल्यावांचून पृथक्करण होत नाहीं तेव्हां समीकरणाचें पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें - या रीतीनें -

२ वर्गसमीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग करावा या रीतीनें दुसर्ये पदाचे वेळाप्रकाशकाचें अर्ध घेउन त्याचा वर्ग करावा आणि हा वर्गसमीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा तेव्हां समीकरणाचे ज्या बाजूंत अव्यक्तपद आहे त्या बाजूचा पुरा वर्ग होईल.

३ नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचें वर्गमूळ काढावें ह्मणजे अव्यक्त पदाची किमत प्रकट होईल समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (±) अशी करावी ह्मणजे समीकरणाचीं दोन मूळें निघतील अथवा अव्यक्त पदाचा दोन किमती निघतील※.

१ टीप-

※ कोणत्येही पदाचें वर्गमूळ धन + किंवा ऋण - असेल याजकरितां सर्व वर्गसमीकरणाचें पृथक्करण दोन प्रकारचें होतें असें $+ न^२$ याचें वर्गमूळ + न किंवा - न आहे. कारण + न × + न आणि - न × - न हे दोनही $+ न^२$ होतात. परंतु $- न^२$ अथवा $\sqrt{- न^२}$ हें सर्व मिथ्याभासवत् किंवा अशक्य. कारण + न किंवा - न या दोहोंचाही वर्ग $- न^२$ होत नाहीं.

असें प्रथम सारणी कोष्टकांत $क्ष^२ + अक्ष = ब$ यांतून निघतें कि $क्ष + \frac{१}{२} अ = \sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२}$ ह्मणजे हें मूळ $+\sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२}$ अथवा $-\sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२}$ असेल कारण यांतून कोणत्येही एकानें त्याचें तेंच गुणिलें असतां $ब + \frac{१}{४} अ^२$ हा वर्ग होतो याजकरितां याप्रमाणें मूळांत भ्रम राहातो तो दारवावयाकरितां मूळाचे मागें ± हीं दोन चिन्हें लिहितात. असें $क्ष = \pm \sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२} - \frac{१}{२} अ$

या सारणी कोष्टकांत $क्ष = \pm \sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२} - \frac{१}{२} अ$. क्ष अव्यक्त पदाची प्रथम किमत ह्मणजे $क्ष = + \sqrt{ब + \frac{१}{४} अ^२} - \frac{१}{२} अ$ ही सर्वदा धन + आहे. कारण $\frac{१}{४} अ^२ + ब$ हें $\frac{१}{४} अ^२$ याहून अधिक आहे. तेव्हां मोठे वर्गाचें निश्चय मोठें मूळ

असावें

१ टीप- समीकरणाचे प्रथम बाजूचें मूळ सर्वदा बराबर आहे जें प्रथम पदाचें मूळ दुसर्यें पदाचे वेळाप्रकाशकाचे अर्धानें युक्त दुसरें पद धन+ किंवा ऋण− असेल तशा चिन्हानेंही -

२−सर्व

असावें याजकरितां $\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ हें वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ ह्मणजे $\frac{१}{२}अ$ याहून मोठें आहे याजकरितां $+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा धन+ होईल·

दुसरी किमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा ऋण− होईल· कारण याची दोनही पदें ऋण−आहेत· याजकरितां जेव्हां $क्ष^{२}+अक्ष=ब$ तेव्हां क्षची धन+ किमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$ आणि क्षची ऋण− किमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}-\frac{१}{२}अ$·

दुसर्यें सरणि कोष्टकांत ह्मणजे $क्ष=\pm\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ यांत क्षची प्रथम किमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा धन आहे कारण दोनही पदें धन+ आहेत· परंतु दुसरी किमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ ही सर्वदा ऋण− होईल· कारण $ब+\frac{१}{४}अ^{२}$ हें $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे· याजकरितां $\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ ह्मणजे $\frac{१}{२}अ$ याहून मोठें आहे ह्मणोन $-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा ऋण आहे·

याजकरितां जेव्हां $क्ष^{२}-अक्ष=ब$ तेव्हां क्षची धन+ किमत ह्मणजे $क्ष=+\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$ आणि क्षची ऋण− किमत ह्मणजे $क्ष=-\sqrt{ब+\frac{१}{४}अ^{२}}+\frac{१}{२}अ$

यापासून कळतें किं दोन प्रथम सरणि कोष्टकांत सर्वदा अव्यक्त पदाचा दोन किमती निघतात त्यांत एक धन+ आणि दुसरी ऋण− आहे·

परंतु तिसर्यें सरणि कोष्टकांत जेव्हां $क्ष=\pm\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}-ब}+\frac{१}{२}अ$ यांत क्षचा दोन किमती धन होतील जेव्हां $\frac{१}{४}अ^{२}$ हा बहुत अधिक आहे आतां

क्षची

२ सर्व समीकरणें आंत अव्यक्त पदांचीं दोन पदें येतात आणि प्रथम पदाच्या घात प्रकाशक दुसर्ये पदाचे घात प्रकाचे दुपट आहे · तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वप्रमाणें वर्गसमीकरणरीतीनेंच वर्ग पुरा केल्यानें होतें -

असें $क्ष^{४} + अक्ष^{२} = ब$ अथवा $क्ष^{२न} + अक्ष^{न} = ब$ किंवा $क्ष + अक्ष^{\frac{१}{२}} = ब$ हीं सर्व वर्गसमीकरणासारिखीं आहेत · आणि यांचें पृथक्करण त्या वर्ग पृथक्करणा प्रमाणें होतें -

---

क्षची प्रथम किमत ह्मणजे $क्ष = +\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब} + \frac{१}{२}अ$ ही धन होईल · कारण दोनही पदें धन+ आहेत ·

दुसरी किमत ह्मणजे $क्ष = -\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब} + \frac{१}{२}अ$ ही हि धन+ आहे कारण · $\frac{१}{४}अ^{२}$ हें $\frac{१}{४}अ^{२} - ब$ याहून अधिक आहे · याअकरितां $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२}}$ ह्मणजे $\frac{१}{२}अ$ हें $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब}$ याहून अधिक आहे ह्मणोन $-\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब} + \frac{१}{२}अ$ हें सर्वदा धन+ होईल · अशापासून जेव्हां $क्ष^{२} - अक्ष = -ब$ तेव्हां क्षची प्रथम किम्मत $क्ष = +\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} ब} + \frac{१}{२}अ$ आणि दुसरी ह्मणजे $क्ष = -\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब} + \frac{१}{२}अ$ या दोनही किमती धन आहेत ·

परंतु या तिसर्ये सरणि कोष्टकांत जर बची किमत $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक असेल तर अशो प्रश्नाचें पृथक्करण करायास अशक्य आहे कारण कोणतेंही पद धन+ किंवा − ऋण असो परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा धन आहे · याअ करितां ऋण पदाचें वर्गमूळ अशक्य · आणि जेव्हां ब हा $\frac{१}{४}अ^{२}$ याहून अधिक आहे तेव्हां $\frac{१}{४}अ^{२} - ब$ हें ऋण पद होईल · आणि याअकरितां त्याचें वर्गमूळ ह्मणजे $\sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब}$ हा मिथ्याभास किंवा अशक्य आहे याअ करितां या प्रकारांत $क्ष = \frac{१}{२}अ \pm \sqrt{\frac{१}{४}अ^{२} - ब}$ ह्मणजे क्षच्या दोन किमती अशक्य किंवा मिथ्याभास पदें आहेत -

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम. $क्ष^2$ + ४ क्ष = ६० या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

आतां . . . $क्ष^2$ + ४ क्ष = ६०

वर्ग पुरा करून . . $क्ष^2$ + ४ क्ष + ४ = ६० + ४ = ६४

नंतर मूळ काढून . . . क्ष + २ = ± ८

२ यांस स्थळांतर करून . . क्ष = ६ किंवा −१० हीं दोन मूळें हें उत्तर.

दुसरें. $क्ष^2$ − ६ क्ष + १० = ६५ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे.

आतां . . . $क्ष^2$ − ६ क्ष + १० = ६५

१० यांस स्थळांतर करून . $क्ष^2$ − ६ क्ष = ५५

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^2$ − ६ क्ष + ९ = ६४

नंतर मूळ काढून . . . क्ष − ३ = ± ८

पुनः ३ यांस स्थळांतर करून . . क्ष = ११ किंवा −५ हें उत्तर.

तिसरें. २ $क्ष^2$ + ८ क्ष − ३० = ६० या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे.

आतां . . . २ $क्ष^2$ + ८ क्ष − ३० = ६०

३० यांस स्थळांतर करून . २ $क्ष^2$ + ८ क्ष = ९०

२ याणीं भागून . . . $क्ष^2$ + ४ क्ष = ४५

वर्ग

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^२ + ४ क्ष + ४ = ४९$

नंतर मूळ काढून . . . $क्ष + २ = \pm ७$

पुनः २ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = ५$ किंवा -९ हें उत्तर.

चवथें . $३ क्ष^२ - ३ क्ष + ९ = ८ \frac{२}{३}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे -

आतां . . . $३ क्ष^२ - ३ क्ष + ९ = ८ \frac{२}{३}$

३ याणें भागून . . . $क्ष^२ - क्ष + ३ = २ \frac{८}{९}$

३ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष^२ - क्ष = -\frac{१}{९}$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^२ - क्ष + \frac{१}{४} = \frac{५}{३६}$

नंतर मूळ काढून . . . $क्ष - \frac{१}{२} = \pm \frac{१}{६}$

पुनः $\frac{१}{२}$ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = \frac{२}{३}$ किंवा $-\frac{१}{३}$ हें उत्तर.

पांचवें . $\frac{१}{२} क्ष^२ - \frac{२}{३} क्ष + ३० \frac{१}{२} = ५२ \frac{२}{३}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे -

आतां . . . $\frac{१}{२} क्ष^२ - \frac{२}{३} क्ष + ३० \frac{१}{२} = ५२ \frac{२}{३}$

$३० \frac{१}{२}$ यास स्थळांतर करून . . . $\frac{१}{२} क्ष^२ - \frac{२}{३} क्ष = २२ \frac{१}{६}$

२ याणीं गुणून . . . $क्ष^२ - \frac{४}{३} क्ष = ४४ \frac{१}{३}$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^२ - \frac{४}{३} क्ष + \frac{४}{९} = ४४ \frac{७}{९}$

मूळ काढून . . . $क्ष - \frac{२}{३} = \pm ६ \frac{२}{३}$

पुनः $\frac{२}{३}$ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष = ७$ किंवा $-६ \frac{२}{३}$

हें

हें उत्तर -

साहावें . $अक्ष^२ - बक्ष = क$ या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे -

आतां . . . . $अक्ष^२ - बक्ष = क$

अ याणें भागून . . . . $क्ष^२ - \frac{ब}{अ} क्ष = \frac{क}{अ}$

वर्ग पुराकरून . . . $क्ष^२ - \frac{ब}{अ} क्ष + \frac{ब^२}{४अ^२} = \frac{क}{अ} + \frac{ब^२}{४अ^२}$

नंतर मूळ काढून . . . $क्ष - \frac{ब}{२अ} = \pm \sqrt{\frac{४अक + ब^२}{४अ^२}}$

$\frac{ब}{२अ}$ यांस स्थळांतर करून . . . $क्ष = \pm \sqrt{\frac{४अक + ब^२}{४अ^२}} + \frac{ब}{२अ}$ हें उत्तर .

सातवें . $क्ष^४ - २अक्ष^२ = ब$ या वर्ग समीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किमत काय आहे .

आतां . . . . $क्ष^४ - २अक्ष^२ = ब$

वर्ग पुराकरून . . . $क्ष^४ - २अक्ष^२ + अ^२ = अ^२ + ब$

मूळ काढून . . . $क्ष^२ - अ = \pm \sqrt{अ^२ + ब}$

अ यास स्थळांतर करून . . . $क्ष^२ = \pm \sqrt{अ^२ + ब} + अ$

नंतर वर्गमूळ काढून . . . $क्ष = \pm \sqrt{अ + \sqrt{अ^२ + ब}}$

या रीतीनें सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेघांस लिहून शिकणारे चांगलें समजदार होउन पुढील उदाहरणांचीं पृथक्करणें लौकर करितील असें त्यांस शिकवावें

आठवें . $क्ष^२ - ६ क्ष - ७ = ३३$ या वर्गसमीकरणांतील

क्ष

क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=१०

नववें. क्ष^{२}−५ क्ष−१०=१४ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=८

दाहावें. ५ क्ष^{२}+४ क्ष−९०=११४ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=६

अकरावें. $\frac{१}{२}$ क्ष^{२}−$\frac{१}{४}$ क्ष+२=९ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=४

बारावें. ३ क्ष^{४}−२ क्ष^{२}=४० या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=२

तेरावें. $\frac{१}{३}$ क्ष−$\frac{१}{२}$ $\sqrt{}$क्ष=१$\frac{१}{२}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=९

चौदावें. $\frac{१}{२}$ क्ष^{२}+$\frac{२}{३}$ क्ष=$\frac{३}{४}$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष=·७२७७६६

पंधरावें.

पंधरावें · $क्ष^{६}+४क्ष^{३}=१२$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे ·

उत्तर $क्ष=\sqrt[३]{२}=१·२५९९२१$

सोळावें · $क्ष^{२}+४क्ष=अ^{२}+२$ या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्त पदाची किमत काय आहे·

उत्तर $क्ष=\sqrt{अ^{२}+६}-२$

प्रश्न·

ज्यांपासून वर्गसमीकरणें उत्पन्न होतात·

प्रथम · त्या दोन संख्या काढ · ज्यांची वजाबाकी २ आणि ज्यांचा गुणाकार ८० होतो·

इच्छिल्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षर चिन्हें घे·*

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें · $क्ष-य=२$

दुसर्या प्रमाणें · $क्ष\,य=८०$

प्रथमांतील य यास स्थळांतर करून $क्ष=य+२$

क्षची किमत दुसर्यांत लिहून $य^{२}+२य=८०$

वर्ग पुरा करून $य^{२}+२य+१=८१$

---

* या प्रश्नांत जसें एकवर्णसमीकरणांत आहे· किं जितकिं अव्यक्त पदें आहेत· तितकीं अक्षरचिन्हें घेतात· पृथक्करण करायास तसेंच आहे परंतु याहून संक्षेप रीति आहे पण अभ्यास करण्यास आरंभीं ती उपयोगी नव्हे· कारण प्रथंमच कठिण लागलें तर पुढें समज होणें दुर्घट·

मूळ

मूळ काढून . . . . $य + १ = ९$

१ यास स्थळांतर करून . . . $य = ८$

वरप्रमाणें क्षची किमत . . . $क्ष = य + २ = १०$

उत्तर १० आणि ८

दुसरा . १४ या संख्येचे दोन भाग कर असे कि त्यांचा गुणाकार ४८ होतील .

दोन अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरचिन्हें घे .

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें . . . $क्ष + य = १४$

आणि दुसर्ये संकेताप्रमाणें . . . $क्षय = ४८$

प्रथम समीकरणांतील य यास स्थळां० $क्ष = १४ - य$ ही क्षची किमत दुसर्ये समीकरणांतील क्षचे स्थळीं लि० $१४य - य^{२} = ४८$ वर्ग धन करावयाकरितां सर्व चिन्हें बदल करून . . $य^{२} - १४य = -४८$

नंतर वर्ग पुरा करून . . . $य^{२} - १४य + ४९ = १$

वर्गमूळ काढून . . . . . $य - ७ = \pm १$

७ यास स्थळांतर करून . . . $य = ८$ आणि ६ हे इछिले दोन भाग हें उत्तर .

तिसरा . ज्या दोन संख्यांची बेरीज ९ होतात आणि ज्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ त्या दोन संख्या काय आहेत .

या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरें घे .

आतां

आतां प्रथम संकेता प्रमाणें . . . $क्ष + य = ९$

आणि दुसर्ये संकेता प्रमाणें . . . $क्ष^{२} + य^{२} = ४५$

प्रथम समीकरणांतील य यास स्थळां० . $क्ष = ९ - य$ ही क्षची किमत दुसर्ये समीकरणांत लिहून . $८१ - १८ य + २ य^{२} = ४५$

८१ यांस स्थळांतर करून . $२ य^{२} - १८ य = -३६$

२ याणीं भागून . . . . $य^{२} - ९ य = -१८$

नंतर वर्ग पुरा करून . . $य^{२} - ९ य + \frac{८१}{४} = \frac{९}{४}$

वर्गमूळ काढून . . . . $य - \frac{९}{२} = \pm \frac{३}{२}$

आतां $\frac{९}{२}$ यांस स्थळांतर करून . . $य = \pm \frac{३}{२} + \frac{९}{२} = ६$ आणि ३ या इछिल्या दोन संख्या हें उत्तर.

चवथा . त्या दोन संख्या काय आहेत जांची बेरीज गुणाकार आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी हीं तीनही बराबर आहेत.

अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे.

प्रथम आणि दुसर्ये संकेता प्रमाणें . $क्ष + य = क्षय$

प्रथम आणि तिसर्ये संकेता प्रमाणें . $क्ष + य = क्ष^{२} - य^{२}$

दुसर्याचा दोन बाजू क्ष + य याणीं भागून . $१ = क्ष - य$

य यास स्थळांतर करून . . . $य + १ = क्ष$ ही क्षची किमत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहून . $२ य + १ = य^{२} + य$

२ य यांस स्थळांतर करून . . . $१ = य^{२} - य$

वर्ग

वर्ग पुरा करून . . . $\frac{५}{४} = य^{२} - य + \frac{१}{४}$

मूळ काढून . . . . $\frac{१}{२}\sqrt{५} = य - \frac{१}{२}$

$\frac{१}{२}$ यास स्थळांतर करून . $\frac{१}{२}\sqrt{५} + \frac{१}{२} = य$

आणि वरचे समीकरणाप्रमाणे . $क्ष = \frac{१}{२}\sqrt{५} + \frac{३}{२}$

या कोष्टकांतील $\sqrt{५}$ यांची किमत दशांशांत काढून क्ष=+२.६१८० इत्यादिक निघेल . आणि य=+१.६१८० इत्यादिक .

पांचवा . गणित श्रढींत त्या चार संख्या काय आहेत . किं ज्यांचे दोन शेवटांचा गुणाकार २२ आहे . आणि दोन मध्य पदांचा गुणाकार ४० होतो .

अतिलाहान अव्यक्त पद दाखवायास क्ष अक्षर घे . आणि अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे .

तर क्ष , क्ष+य , क्ष+२य , क्ष+३य हीं चार पदें त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात .

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें . $क्ष^{२} + ३क्षय = २२$

दुसर्ये संकेताप्रमाणें . . $क्ष^{२} + ३क्षय + २य^{२} = ४०$

दुसर्यांतून प्रथम वजा करून . . . . $२य^{२} = १८$

२ याणीं भागून . . . . . $य^{२} = ९$

वर्गमूळ काढून . . . . . . $य = ३$ हें उत्तर आहे .

यची किमत प्रथमांत लिहून . . $क्ष^{२} + ९क्ष = २२$

वर्ग पुराकरून . . . $क्ष^{२} + ९क्ष + \frac{८१}{४} = \frac{१६९}{४}$

मूळ

मूळ काढून . . . $क्ष + \frac{३}{२} = \frac{७}{२}$

$\frac{३}{२}$ यांस स्थळांतर करून . . . $क्ष = २$ हें अति लाहान पद

याअकरितां २, ५, ८, ११ या इछिल्या चार संख्या हें उत्तर.

साहावा. भूमिति श्रेढींत त्या तीन संख्या काय आहेत. किं. ज्यांची बेरीज ७ होत्ये आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होत्ये.

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायास क्ष, य, आणि ज्ञ हीं तीन अक्षर चिन्हें घे

तर प्रथम संकेता प्रमाणें . . . $क्षज्ञ = य^२$

आणि दुसर्‍ये संकेता प्रमाणें . . $क्ष + य + ज्ञ = ७$

आतां तिसर्‍ये संकेता प्रमाणें . . $क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२ = २१$

दुसर्‍यांतील य यास स्थळांतर करून $क्ष + ज्ञ = ७ - य$ याच समीकरणाचे

दोनही बाजूंचे वर्ग करून . $क्ष^२ + २क्षज्ञ + ज्ञ^२ = ४९ - १४य + य^२$

२क्षज्ञ यांचे स्थळीं प्रथमांतील.

त्यांची किमत $य^२$ ती लिहून . $क्ष^२ + २य^२ + ज्ञ^२ = ४९ - १४य + य^२$

दोन बाजूंचे $य^२$ वजा करून . $क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२ = ४९ - १४य$

आतां $क्ष^२ + य^२ + ज्ञ^२$ यांचा दोन

किमतींची बराबरी करून . . . $२१ = ४९ - १४य$

२१ आणि १४य० स्थळांतर करून . $१४य = २८$

१४ याणीं भागून . . . $य = २$ हें दुसरें पद ही

यची किमत प्रथमांत लिहून . . $क्षज्ञ = ४$

चोथ्या

चौथ्या समीकरणांतील लिहून . . क्ष + ज्ञ = ५. या शेवटील समीकरणांतील ज्ञ यास स्थळांतर करून . . क्ष = ५ − ज्ञ ही क्षची किमत त्या शेवटीलाचे वरचे समीकरणांत लि० ५ज्ञ − ज्ञ^{२} = ४

वर्ग धन करायास सर्व चिन्हें बदल

करून . . . . ज्ञ^{२} − ५ज्ञ = −४

वर्ग पुरा करून . . . ज्ञ^{२} − ५ज्ञ + $\frac{२५}{४}$ = $\frac{९}{४}$.

मूळ काढून . . . . . ज्ञ − $\frac{५}{२}$ = ± $\frac{३}{२}$

$\frac{५}{२}$ यांस स्थळांतर करून . . . . ज्ञ = ४ अथवा १ ही क्षची किमत -

याजकरितां १, २, ४ या इछिल्या तीन संख्या हें उत्तर.

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न.

पूर्वीं सांगीतलें किं अव्यक्त पदें आहेत तितकीं अक्षर चिन्हें घ्यावीं ह्मणोन. परंतु त्याशिवाय दुसरी रीति आहे तिचीं उदाहरणें लिहितो

उदाहरणें.

प्रथम . . दोन संख्या काढ. अशा किं त्यांची वजा बाकी ८ आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल.

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर

तर . . . . क्ष+८ = मोठी संख्या.

आणि प्रश्नाप्रमाणें . क्ष (क्ष+८) म्हणजे क्ष^{२}+८ क्ष = २४०

वर्ग पुरा करून . . क्ष^{२}+८ क्ष+१६ = २५६

वर्गमूळ काढून . . . . क्ष+४ = १६

४ यास स्थलांतर करून . . . क्ष = १२ ही लाहान संख्या.

तेव्हां क्ष+८ = १२+८ = २० ही मोठी संख्या. हें उत्तर.

दुसरा. ६० या संख्येचे दोन भाग कर. असे किं त्यांचा गुणाकार ८६४ होईल.

आतां मोठा अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष अक्षर घे.

तर . . . . ६०-क्ष = लाहान भाग.

आणि प्रश्नाप्रमाणें . . . क्ष (६०-क्ष) म्हणजे ६०क्ष-क्ष^{२}=८६४

दोन बाजूंची सर्व चिन्हें बदल करून . क्ष^{२}-६० = -८६४

वर्ग पुरा करून . . . . क्ष^{२}-६० क्ष+९०० = ३६

वर्गमूळ काढून . . . . . क्ष-३० = ±६

३० यास स्थलांतर करून . . . क्ष = ±६+३०

याज करितां क्ष = ६+३० = ३६ अथवा ३०-६ = २४ म्हणजे ३६ आणि २४ हे दोन इछिले भाग. हें उत्तर

तिसरा. दोन संख्या असाव्या. त्या अशाकिं. त्यांची बेरीज १० (अ) असेल. आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज ५८ (ब) असेल.

आतां

आतां झोटी संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे·

तर · · · · · $\text{अ} - \text{क्ष} =$ लाहान संख्या·

आणि प्रश्नाप्रमाणें $\text{क्ष}^२ + (\text{अ} - \text{क्ष})^२$ ह्मणजे $२\text{क्ष}^२ - २\text{अक्ष} + \text{अ}^२ = \text{ब}$

आतां $\text{अ}^२$ यास स्थळांतर करून $२\text{क्ष}^२ - २\text{अक्ष} = \text{ब} - \text{अ}^२$

२ याणें भागून · · · · · $\text{क्ष}^२ - \text{अक्ष} = \frac{\text{ब} - \text{अ}^२}{२}$

वर्ग पुरा करून · · · · $\text{क्ष}^२ - \text{अक्ष} + \frac{\text{अ}^२}{४} = \frac{\text{अ}^२}{४} + \frac{\text{ब} - \text{अ}^२}{२}$

वर्गमूळ काढून · · · · $\text{क्ष} - \frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{\frac{\text{अ}^२}{४} + \frac{\text{ब} - \text{अ}^२}{२}} = \pm\frac{१}{२}\sqrt{२\text{ब} - \text{अ}^२}$

$\frac{\text{अ}}{२}$ यास स्थळांतर करून · · $\text{क्ष} = \frac{\text{अ}}{२} \pm \frac{१}{२}\sqrt{२\text{ब} - \text{अ}^२}$

अचे स्थळीं १० आणि बचे स्थळीं ५८ ही त्यांची किमत लिहून·

$\text{क्ष} = \frac{१०}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{११६ - १००} = ५ + २ = ७$ ही झोटी संख्या·

तेव्हां $१० - \text{क्ष} = \frac{१०}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{११६ - १००} = ५ - २ = ३$ ही लाहान संख्या·

चौथा - एक ताका २४ रुपयांस विकला त्यांत अशी १०० रुपयांस मूळ किमत तशे प्रमाणानें मूळ किमतीस नफा तेव्हां मूळ किमत काय ती सांग·

आतां मूळ किमत अव्यक्त· ती दाखवायास क्ष अक्षर घे·

तर · · · · · · $२४ - \text{क्ष} =$ सर्व नफा·

प्रश्नाप्रमाणें · · · · $१०० : \text{क्ष} :: \text{क्ष} : २४ - \text{क्ष}$·

तर · · · · · · $\text{क्ष}^२ = १००(२४ - \text{क्ष}) = २४०० - १००\text{क्ष}$·

१०० क्ष यास स्थळांतर करून · $\text{क्ष}^२ + १००\text{क्ष} = २४००$

वर्ग

वर्ग पुरा करून . . $क्ष^2 + १०० क्ष + २५०० = २४०० + २५०० = ४९००$

वर्गमूळ काढून . . . $क्ष + ५० = \sqrt{४९००} = ७०$

५० यांस स्थळांतर करून . . $क्ष = ७० - ५० = २०$ मूळ किमत हें उत्तर

पांचवा . एक मेंढक्यानें ८० रुपयांस कांहीं मेंढे विकत घेतले . त्यांत चार मेंढे अधिक आले असते तर दर मेंढ्यास एकेक रुपया कमी पडला तेव्हां सर्व मेंढे किती घेतले ते सांग .

अव्यक्त मेंढ्यांची संख्या दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर . . . $\frac{८०}{क्ष}$ हें एकेकाचें मोल होईल .

आणि जर $क्ष + ४$ मेंढे ८० रुपयांस येते तर प्रत्येकाचें मोल $\frac{८०}{क्ष + ४}$

प्रश्नाप्रमाणें . . . . . $\frac{८०}{क्ष} = \frac{८०}{क्ष + ४} + १$

क्षनें गुणून . . . . . $८० = \frac{८० क्ष}{क्ष + ४} + क्ष$

$क्ष + ४$ याणीं गुणून . . $८० क्ष + ३२० = ८० क्ष + क्ष^2 + ४ क्ष$

८० क्ष दोन बाजूंतून टाकून . $क्ष^2 + ४ क्ष = ३२०$

वर्ग पुरा करून . . . $क्ष^2 + ४ क्ष + ४ = ३२४$

वर्गमूळ काढून . . . . . $क्ष + २ = १८$

२ यास स्थळांतर करून . . $क्ष = १८ - २ = १६$ मेंढ्यांची संख्या हें उत्तर .

साहावा . दोन संख्या काढ . अशाकिं त्यांची बेरीज १३ (अ) आणि त्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ४७२१ (ब) होईल .

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर

तर $\frac{१}{२}\text{अ}+\frac{१}{२}\text{क्ष}$ ह्मणजे $\frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{२}$ ही मोठी संख्या·

आणि $\frac{१}{२}\text{अ}-\frac{१}{२}\text{क्ष}$ ह्मणजे $\frac{\text{अ}-\text{क्ष}}{२}$ ही लाहान संख्या आहे·

आतां प्रश्नाप्रमाणें · · $\frac{(\text{अ}+\text{क्ष})^{४}}{१६}+\frac{(\text{अ}-\text{क्ष})^{४}}{१६}=\text{ब}$

१६ याणीं गुण्णून · · $(\text{अ}+\text{क्ष})^{४}+(\text{अ}-\text{क्ष})^{४}=१६\text{ब}$

घन करून त्यांची बेरीज · $२\text{अ}^{४}+१२\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{२}+२\text{क्ष}^{४}=१६\text{ब}$

स्थ० आणि २ याणीं भागून · · $\text{क्ष}^{४}+६\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{२}=८\text{ब}-\text{अ}^{४}$

वर्ग पुरा करून · · $\text{क्ष}^{४}+६\text{अ}^{२}\text{क्ष}^{२}+९\text{अ}^{४}=८\text{ब}+८\text{अ}^{४}=८(\text{ब}+\text{अ}^{४})$

मूळ काढून · · $\text{क्ष}^{२}+३\text{अ}^{२}=\sqrt{८(\text{ब}+\text{अ}^{४})}$

३अ² यांस स्थळांतर करून · · $\text{क्ष}^{२}=\sqrt{८(\text{ब}+\text{अ}^{४})}-३\text{अ}^{२}$

पुनः वर्ग मूळ काढून · · $\text{क्ष}=\sqrt{\sqrt{८(\text{ब}+\text{अ}^{४})}-३\text{अ}^{२}}$

आतां यांत अची किमत १३ आणि बची ४७२१ ही लिहून·

$$\text{क्ष}=\sqrt{\sqrt{८(४७२१+२८५६१)}-५०७}$$

$$=\sqrt{५१६-५०७}$$

$$=\sqrt{९}$$

$=३$ ही क्षची किमत ह्मणजे दोन संख्यांची वजाबाकी·

तर · $\frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{२}=\frac{१३+३}{२}=\frac{१६}{२}=८$ ही मोठी संख्या·

आणि : $\frac{\text{अ}-\text{क्ष}}{२}=\frac{१३-३}{२}=\frac{१०}{२}=५$ ही लाहान संख्या·

यांची बेरीज $८+५=१३$ आणि $८^{४}+५^{४}=४७२१$ हें उत्तर·

सातवा · ती संख्या काय आहे · किं · जीचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होतात·

उत्तर ६

आठवा · दोन संख्या काढ अशाकिं· त्यांतील लाहान संख्या मोव्ये संख्येस होईल · अशी मोठी संख्या बारांस होईल · आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गाची बेरीज ४५ होत्ये ·

उत्तर ३ आणि ६

नववा · त्या दोन संख्या काय आहेत · किं· जांची बजाबाकी २ आहेत · आणि जांचे घनांची वजाबाकी ९८ आहेत·

उत्तर ३ आणि ५

दाहावा · त्या दोन संख्या काय आहेत · किं जांची बेरीज ६ होतात· आणि जांचे घनांची बेरीज ७२ होतात·

उत्तर २ आणि ४

अकरावा · त्या दोन संख्या काय आहेत · किं जांचा गुणाकार २० आणि जांचे घनांची वजाबाकी ६१ आहेत·

उत्तर ४ आणि ५

बारावा · ११ या संख्येचे दोन भागकर · असे किं · त्या दोन भागांचे वर्गाचा गुणाकार ७८४ होतील ·

उत्तर ४ आणि ७

तेरावा · ५ या संख्येचे दोन भाग कर · असेकिं · ते दोन भाग परस्परानें वेगळाले भागिले असतां त्या दोन भागाकारांची बेरीज ४ $\frac{1}{4}$ होईल ·

उत्तर १ आणि ४

चौदावा

चौदावा. १२ या संख्येचे दोन भाग कर. असे कि त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजाबाकीचे आठपट होईल.

उत्तर ४ आणि ८

पंधरावा. १० या संख्येचे दोन भागकर. असे कि. लाहान भागाचे चौपटीचा वर्ग मोठ्ये भागाचे दुपटीचे वर्गाहून ११२याणीं अधिक होईल.

उत्तर ४ आणि ६

सोळावा. त्या दोन संख्या काय आहेत. कि. ज्यांचे वर्गांची बेरीज ८९ आणि ज्यांची बेरीज त्यांतील मोठ्ये संख्येनें गुणिली असतां १०४ होतात.

उत्तर ५ आणि ८

सत्रावा. ती संख्या काय आहे. कि. ज्या संख्येचे अंकरूप आकृतींतील दोनमूळ अंकांचे गुणाकाराने जी भागिली असतां भागाकार ५⅓ येतो. आणि त्या संख्येंतून ९ वजा केले तर बाकींत त्या संख्येंतील मूळ अंकांची व्युत्क्रम स्थिती होत्ये.

उत्तर ३२

अठरावा. २० या संख्येचे तीन भाग कर. असेकिं त्या तीन भागांचा गुणाकार २७० होईल. तसें प्रथम आणि दुसरा या दोन भागांची वजाबाकी दुसरा आणि तिसरा यांचे वजाबाकीहून २ या संख्येनें उणी असेल

उत्तर ५, ६ आणि ९

एकुणिसावा · गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ · किं जांचे वर्गांची बेरीज ५६ आणि प्रथम संख्येची तिपट दुसर्ये संख्येची दुपट आणि तिसर्ये संख्येची तिपट यांची बेरीज ३२ होतील ·

उत्तर २, ४ आणि ६

विसावा · १३ या संख्येचे तीन भाग कर · असेकिं · जांचे वर्गांचें उत्तर बराबर असेल · आणि त्या वर्गांची बेरीज ७५ होतील ·

उत्तर १, ५ आणि ७

एकविसावा · गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ · अशाकिं · जांचें उत्तर बराबर · तसें जांची बेरीज १२ आणि जांचे चतुर्घातांची बेरीज ९६२ होतील ·

उत्तर ३, ४ आणि ५

बाविसावा · गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ · अशाकिं · जांचें उत्तर बराबर · आणि त्यांतील लाहान संख्येचा वर्ग मोठ्ये दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां २८ होतील · आणि अति मोठ्ये संख्येचा वर्ग लाहान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला तर ४४ होतील ·

उत्तर २, ४ आणि ६

तेविसावा · अ, ब, क या तिघांजणांनी व्यापारांत १४४४ रुपये नफा मेळविला · त्यांत जर ब्याचा नफा अ-

च्ये

चे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९२० रुपये होतात· परंतु कचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९१२ रुपये होतात· तेव्हां त्या त्रिवर्गांत एकेकाच्या नफा किती किती रुपये सांग·

उत्तर अचा ४०० बचा ९०० कचा १४४

चौविसावा· गणित प्रमाणांत तीन संख्या काढ· अशा किं जांचे वर्गाची बेरीज ९३ आणि त्या संख्या ३, ४, ५ यांणीं अनुक्रमें गुणिल्या असतां त्या तीन गुणाकारांची बेरीज ६६ होतील·

उत्तर २, ५ आणि ८.

पंचविसावा· दोन संख्या काढ· अशा किं· जांचा गुणाकार आणि जांची बेरीज हीं मिळून ४७ होतात· आणि जांची बेरीज जांचे वर्गाचे बेरिजेंतून वजा केली तर ६२ बाकी राहातील·

उत्तर ५ आणि ७

घनादि समीकरण पृथक्करण·

घन समीकरण अथवा तिसर्ये घाताचें समीकरण तेंच होय· किं· जांत अव्यक्तपदाच्या तिसरा घात येतो·

जसें $क्ष^{3} - अक्ष^{2} + बक्ष = क$

चतुर्घात समीकरण तेंच होय· किं जांत अव्यक्त पदाच्या चतुर्घात

चतुर्घात येतो · असें $\text{क्ष}^{४} - \text{अक्ष}^{३} + \text{बक्ष}^{२} - \text{कक्ष} = \text{ड}$

पंचघात समीकरण तेंच होय · किं · जांत अव्यक्त पदाचा पंच घात येतो · असें $\text{क्ष}^{५} - \text{अक्ष}^{४} + \text{बक्ष}^{३} - \text{कक्ष}^{२} + \text{डक्ष} = \text{ई}$

इत्यादि · पुढें या प्रमाणें षड्घातादि समीकरणें जाणावीं· परंतु सर्वांत सर्व घात किंवा पदें जीं समीकरणांत येतात · तीं करणी वांचून असावीं ·

घनादि समीकरण पृथक्करणाचा सामान्य रीति बहुत आहेत · परंतु · त्या अतिलांबट म्हणोन ही सोपी थोडक्यांत करायाची रीति पुढें सांगतो · या रीतीवरून घनादि समीकरण पृथक्करण स्वल्पांत आणि सत्वर होईल ·

रीति·

१ गणिताचा तपशील करून दोन संख्या काढाव्या · जा मूळाचे अवळ अवळ येतील · आणि त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्त पदस्थळीं वेगळाल्या ठेवाव्या · नंतर हीं संख्या पदें त्यांचे वेगळाल्ये चिन्हानीं एकत्र करावीं · आणि समीकरणाची सांगितली किमत व्यक्तपद तें त्याहून अधिक किंवा उणें अंतर आहे त्या प्रमाणें धन (+) किंवा ऋण (−) चिन्हानें तें अंतर युक्त करावें ·

२ वर प्रमाणें काढिलेल्ये दोन संख्यांची वजाबाकी वरचा दोन अंतरांतून एकानें गुणावी · आणि गुणाकार येईल तो · जर दोन अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत तर त्यांचे वजाबाकीनें भागावा·

आणि

आणि जरतीं विरूप आहेत तर त्यांचे बेरिजेनें भागावा · किंवा · या रीतीनें प्रमाण राशी कराव्या · जशी दोन अंतरांची वजाबाकी किंवा बेरीज काढिल्ये दोन संख्यांचे वजाबाकीस आहे · तसें कोणतेंही अंतर त्याचे संख्येचे शुद्धीस होईल ·

३ जा अंतरानें गुणून शेवटील भागाकार आला · तो त्या अंतराचे संख्येंत मेळवावा · जरती संख्या समीकरणाचे सांगीतल्ये संख्येहून उणी आहे · आणि अधिक आहे तर तो भागाकार त्यांतून वजा करावा · ह्मणजे या दोन रीतीं करून इच्छिल्ये मूळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल ·

४ हें मूळ आणि पूर्वीं मूळाजवळ जवळ दोन संख्या काढिल्या आहेत त्यांतून अथवा दुसरी कोणती ही संख्या जी याहून मूळाजवळ आहे ती घेउन पूर्वप्रमाणें पुनः करावें · ह्मणजे दुसरें मूळ निघेल · तें असें किं पूर्वापेक्षां अधिक जवळ · या प्रमाणें पुनः पुनः करित जावें · ह्मणजे अतिच मूळाजवळ जवळ संख्या निघत जाईल ·

प्रथम टीप· दोन संख्या घेणें त्या अशा घ्याव्या किं · जांची वजाबाकी उजव्येकडे शेवटीं १ राहील · कारण ही बाकी वर सांगीतल्या प्रमाणें गुणक १ हा अंक होईल · आणि पृथक्करण करित्ये समयीं लाहान अंतर कामांत घ्यावयास योग्य आहे ·

दुसरी टीप·. गणताचा तपशील करित्ये समयीं मूळांक तपा·

सावे

सावे · दोन संख्या घेणें त्यांत एक किमतीहून उणी आणि एक अधिक · या रीतीनें दोन मूळांक घेउन त्यां पासून शुद्ध करायास एकच अंक काढावा · नंतर तें शुद्ध पद अव्यक्त स्थळीं ठेवून काम चालवावें · सांगीतल्ये संख्येहून उणे अंक जाले तर पुनः याहून अधिक दुसरी संख्या घेउन पूर्ववत् करावें · कदाचित् सांगीतल्ये संख्येहून अधिक आले तर याचे उलट दुसरी संख्या याहून उणी घेउन पूर्ववत् करावें · या दोन संख्या घेउन गणित कर्त्ये समयीं भागाकार असा घ्यावा किं शुद्ध पद संख्येंत चार अंक येतील · नंतर ही चार अंकस्थानांची संख्या घेउन त्यांत १ अधिक किंवा उणा वर सांगीतल्या प्रमाणें करून पूर्ववत् करावें · आणि या गणितांत शुद्ध संख्येंत अंकस्थानें आठ पर्यंत काढावीं · कारण प्रतिगणित पर्यायांत पूर्वपूर्वापेक्षां उत्तरोत्तर अंकस्थानें दुपट होतात · तेव्हां दुपटी पेक्षां अधिकांचा भरवंसा नाहीं - आणि या प्रमाणे पुनःपुनः गणित पर्याय केल्यानें उत्तरोत्तर खर्ये मूळाजवळ जवळ येईल -

उदाहरणें

प्रथम - $क्ष^3 + क्ष^2 + क्ष = १००$ या घनसमीकरणाचें मूळ किंवा क्षची किंमत काढ -

आतां

आतां सत्वर कळतें कि क्ष-ची किमत ४ अथवा ५ यांचे मध्यें आहे·

याजकरितां यादोन संख्या खर्या आणोन घे · तर पृथक्करण याप्रमाणें होतें·

प्रथमसंख्या	अव्यक्त	दु०सख्या
४	क्ष	५
१६	$क्ष^2$	२५
६४	$क्ष^3$	१२५
८४	बेरीज	१५५
१००	सांगीतलीकिंमत	१००
−१६	अंतरें	+५५

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज

जसें ७१ : १ :: १६ : ·२ -

याजकरितां क्ष = ४·२ हें जवळजवळ

पुन: ४·२ आणि ४·३ या दोन संख्या खरीं मूळें आणोन घे·

प्र० सं०	अव्यक्त	दु०संख्या
४·२	क्ष	४·३
१७·६४	$क्ष^2$	१८·४९
७४·०८८	$क्ष^3$	७९·५०७
९५·९२८	बेरीज	१०२·२९७
१००	सांगीतली किमत	१००
−४·०७२	अंतरें	+२·२९७

६·३६९ ही दोन अंतरांची बेरी०

जशी ६·३६९ : १ :: २·२९७ : ०·०३६ ही ४·३ यांतून वजा करून क्ष = ४·२६४ हें जवळ जवळ आहे·

पुन:

अव्यक्त पदाचा सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक जितक्या किमतीचा आहे. ह्मणजे एकवर्णसमीकरणांत मूळ किंवा मूळाची किमत एकच आहे. परंतु वर्गसमीकरणांत मूळें किंवा त्यांचा किमती दोन आहेत. घनसमीकरणांत तीन. चतुर्घातसमीकरणांत चार इत्यादि.

आणि जेव्हां कोणत्येही समीकरणाचें एक मूळ संनिध रीती प्रमाणें निघालें तेव्हां राहिलीं मूळें किंवा त्यांचा किमती या पुढील रीतीकरून काढितां येतात. आतां भाज्य भाजक असावे. त्यांत भाज्याकरितां व्यक्तसंख्येस चिन्ह बदल करून अव्यक्त बाजूस स्थळांतर करावें. ह्मणजे तो भाज्य आला. आणि भाजकाकरितां क्ष– उणें पूर्वीं काढिलेलें जवळजवळचें मूळ. ह्मणजे हा भाजक आला. नंतर या भाजकानें तो भाज्य भागून जो भागाकार येईल तो एक नवें दुसरें समीकरण होईल. जांत सांगीतल्ये समीकरणाहून एक घात कमी येईल.

या नव्ये समीकरणाचें मूळ पूर्वसंनिध रीतीनें काढावें. ह्मणजे सांगीतल्ये समीकरणाचें दुसरें मूळ निघेल. नंतर या दुसर्ये मूळानें पूर्वप्रमाणें दुसर्ये समीकरणांहून एक घात कमी असें तिसरें नवें समीकरण करावें. नंतर या तिसर्ये नव्ये समीकरणाचें मूळ पूर्वजवळचे रीतीनें काढावें. ती सांगीतल्ये समीकरण मूळाची तिसरी किमत होईल. या प्रमाणें वर्गसमीकरण होई पर्यंत नवें नवें

समीकरण

समीकरण करित आवें · तें आल्यानंतर वर्गसमीकरणरीतीनें व- र्ग पुरा करून त्याचीं पूर्ववत् दोन मूळें निघतील - या रीती करून सर्व मूळें कळतील -

जसें वरचे उदाहरणाचे समीकरणांत एक मूळ काढिलें तें १·०२८०४ आहे - तर त्यास ऋण चिन्ह आणि क्ष जोडून भाज

भाजक	भाज्य ·	भागाकार

कजाला क्ष−१·०२८०४) क्ष^3−१५क्ष^2+६३क्ष−५० (क्ष^2−१३·९७१९६क्ष+४८·६३६

हें दुसरें नवें समीकरण आलें · आतां वर सांगीतल्या प्रमाणें कळतें किं · हें वर्गसमीकरण या रूपाचें आहे ·

$$\text{क्ष}^2 - \text{१३·९७१९६ क्ष} = - \text{४८·६३६२७}$$

यांत वर्ग पुरा करून क्षचा दोन किमती या आहेत ·

जे ६·५७६५३ आणि ७·३९५४३ आतां या दोन सांगीतल्ये घनाचे मूळाचा राहिल्या दोन किमती आहेत · ह्मणजे

क्ष^3−१५क्ष^2+६३क्ष=५० या समीकरणाचीं तीन मूळें हीं आहेत·

प्रथम मूळ	१·०२८०४	आणि सर्व मूळांची बेरीज बराबर
दुसरें मूळ	६·५७६५३	१५ ह्मणजे ही बेरीज सांगीतल्ये घ-
तिसरें मूळ	७·३९५४३	न समीकरणांतील दुसर्ये पदाचे वें-
बेरीज	१५·०००००	ळा प्रकाशकाचे बराबर आहे आणि

ह्मणोनच हीं तीन मूळें शुद्ध आहेत - नाहींतर अशुद्ध होतीं -

चौथी टीप - या वरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे - जे इतर री- तीं

ती करून पृथक्करण करून किमत काढायास त्या समीकरणास एक रूप द्यावें लागतें तसें या रीतीत नाहीं· कारण कीं ही रीति समीकरणाचें जें रूप आहे त्याजवरच लागत्ये· त्या समीकरणांत कशी-ही करणी पदें किंवा संयुक्त पदें असोत असें या पुढील उदाहरणांत·

तिसरें · $\sqrt{१४४क्ष^२ - (क्ष^२ + २०)^२} + \sqrt{१९६क्ष^२ - (क्ष^२ + २४)^२} = ११४$ या समीकरणाचें मूळ किंवा क्षची किमत काढ·

काहीं तपाशिल्यावर सत्वर कळतें किं क्षची किमत ७ याहून काहीं अधिक आहे· तर प्रथम संख्या क्ष=७ आणि दुसरी संख्या क्ष=८ या दोन संख्या स्वर्या जाणून घे·

प्रथम संख्या क्ष=७		दुसरी संख्या क्ष=८
४७·९०६	$\sqrt{१४४क्ष^२ - (क्ष^२ + २०)^२}$	४६·४७६
६५·३८४	$\sqrt{१९६क्ष^२ - (क्ष^२ + २४)^२}$	६९·२८३
११३·२९०	बेरीज	११५·७५९
११४	सांगितली किमत	११४
−·७१०	अंतरें	+१·७५९
+१·७५९		

असें २·४६९ : १ :: ०·७१० : ०·२ हें जवळ जवळ

याज करितां · क्ष = $\frac{७·०}{७·२}$ हें जवळ जवळ

ही

ही संख्या अधिक आहे याजकरितां याहून उणी ७·१ ही घेऊ·

न पुनः : क्ष = ७·२ क्ष = ७·१

४७·९९०	$\sqrt{१४४क्ष^{२} - (क्ष^{२}+२०)^{२}}$	४७·९७३
६६·४०२	$\sqrt{१९६क्ष^{२} - (क्ष^{२}+२४)^{२}}$	६५·९०४
११४·३९२	बेरीज	११३·८७७
११४	सांगीतली किमत	११४
+·३९२	अंतरें	−·१२३
−·१२३		

असे ·५१५ : ·१ :: ·१२३ : ·०२४

७·१

याजकरितां क्ष = ७·१२४ हें ज·

वळ अवळ·

पांचवी टीप· ही रीति समीकरणाचें कसेंही विकट रूप असेल तरी त्याजवर लागत्ये· आणि ही रीति प्रकाशक समीकरण पृथक्करणावरही लागत्ये·

प्रकाशक समीकरण म्हणजे अव्यक्ताचा घातप्रकाशकही अव्यक्त आहे तें होय· जसें या पुढील उदाहरणांत·

चौथें उदाहरण· $क्ष^{क्ष} = १००$ या समीकरणांत क्षची किमत काय·

या जातीचे समीकरणाचें पृथक्करण सत्वर करायास हें उप-

योगी

योगी आहे कि समीकरणांचें लागरतंम काढून लागरतंम कोष्टकांचे साहाय्यानें पदांचा वेगळाल्या किमती लिहाव्या.

जसें या समीकरणांत दोन बाजूंचें लागरतंम हें आहे -

क्ष × क्ष लाग = २ हें १०० चें लागरतंम आहे.

नंतर तपासिल्यापासून लवकर समजतें कि क्षची किंमत ३ आणि ४ या दोन संख्यांचे आंत मध्याचे जवळ परंतु ३ या संख्येपासून दूर आणि ४ या संख्येचे जवळ याजकरितां क्ष = ३.५ आणि क्ष = ३.६ यां दोन संख्या घे. आणि लागरतंमानें तपशील करितां या प्रमाणे होईल -

प्रथम - क्ष = ३.५	दुसरी - क्ष = ३.६
३.५ याचा लाग = ०.५४४०६८	३.६ याचा लाग = ०.५५६३०३
नंतर ३.५×३.५ चा लाग = १.९०४२३८	नंतर ३.६×३.६ चा लाग = २.००२६९१
खरा लाग = २.००००००	खरा लाग = २.००००००
−.०९५७६२ अंतरें	+.००२६९१

.००२६९१

.०९८४५१ अंतरांची बेरीज.

जसें .०९८४५१ : .१ : : .००२६९१ : .००२७३ ही दुसऱ्ये संख्येची शुद्धि:

बाकी $\frac{३.६}{३.५९९७२७}$ = क्ष हें जवळ जवळ -

पुनः तपासून कळतें कि हें थोडें कमी आहे याजकरितां

क्ष=

क्ष= ३.५९७२७ आणि क्ष= ३.५९७२८ या दोन संख्या घे आणि त्या- गस्तं मानें तपशील करितां याप्रमाणें होईल.

प्रथम क्ष= ३.५९७२७

३.५९७२७ याचा लाग = ०.५५५१७३ हें

३.५९७२७ ×
३.५९७२७ चा लाग } = १.९९९९८५४

खरा ला० = २.००००००
———
+०.००००१४६

दुसरी क्ष= ३.५९७२८

३.५९७२८ याचा लाग = ०.५५५१७४

३.५९७२८ ×
३.५९७२८ चा लाग } = १.९९९९९५३

खरा लाग = २.००००००
———
अंतरें —०.००००० ४७

+०.००००१४६
—०.००००० ४७
———
०.००००१९९ ही अंतरांची वजाबाकी - तर

जसें ०.००००१९९ : .००००१ :: .०००००४७ : ०.००००० ४७४७४७ दुसऱ्या संख्ये- चे शुद्धीस - $\frac{३.५९७२८ \ ००००००}{३.५९७२८ ४७४७४७}$ ही बे- रीज क्षचे किमतीचे जवळ जवळ -

पांचवें - $क्ष^{३}$ + १० $क्ष^{२}$ + ५ क्ष = २६० या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे -

उत्तर क्ष = ४.११७१८५७

साहावें - $क्ष^{३}$ − २ क्ष = ५० या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे -

उत्तर क्ष = ३.८६४८८५४

सातवें - $क्ष^{३}$ + २ $क्ष^{२}$ − २३ क्ष = ७० या समीकरणांत क्षची किमत

किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = ५·१३४५७

आठवें - क्ष^{३} − १७ क्ष^{२} + ५४ क्ष = ३५० या समीकरणांत क्ष-ची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = १४·९५४०७

नववें - क्ष^{४} − ३ क्ष^{३} − ७५ क्ष = १०००० या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = १०·२६०९

दाहावें - २ क्ष^{४} − १६ क्ष^{३} + ४० क्ष^{२} − ३० क्ष = −१ या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = १·२८४७२४

अकरावें - क्ष^{५} + २ क्ष^{४} + ३ क्ष^{३} + ४ क्ष^{२} + ५ क्ष = ५४३२१ या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = ८·४१४४५५

बारावें - क्ष$^{क्ष}$ = १२३४५६७८९ या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे.

उत्तर क्ष = ८·६४००२६८

तेरावें - २ क्ष^{४} − ७ क्ष^{३} + ११ क्ष^{२} − ३ क्ष = ११ या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे.

उत्तर

चौदावें

चौदावें - $(३क्ष^२ - २\sqrt{क्ष} + १)^{\frac{३}{२}} - (क्ष^२ - ४क्ष\sqrt{क्ष} + ३\sqrt{क्ष})^{\frac{५}{२}} = ५६$ या समीकरणांत क्षची किमत काय आहे -

उत्तर $क्ष = १८\cdot३६०८७७$

घन समीकरण पृथक्करण करायाची कार्डानची-रीति-

इष्टराशि साधनाचे साहाय्यानें घनादि समीकरणाचें मूळ संख्येंत काढायास पूर्वसामान्य रीति फार उपयोगी आणि सोपी आहे - परंतु घनसमीकरणाचेंच मूळ काढायास कार्डाननें विशेष रीति दुसरी केली आहे - ती यास्थळीं लिहितो - कारण - कदाचित् कोणी या रीतीवरून काम करायास इच्छील तरीं चिंता नाहीं-

या रीतीनें पृथक्करण करणें तर घन समीकरणास अगत्य जें रूप पाहिजे तें हें होय - ह्मणजे - $ज^३ * अज = ब$ ह्मणजे दुसरें पद किंवा दुसर्‍ये घाताचें पद त्यांत नसावें - याजकरितां कोणत्येंही घन समीकरणास त्याचें रूप दिल्यानंतर - जसें $क्ष^३ + पक्ष^२ + कक्ष = र$ - ह्मणजे ज्याचे प्रथम पदास वेळाप्रकाशक नाहीं असें तर दुसरें पद $पक्ष^२$ हें तेथून घालविलें पाहिजे - त्याची रीति - $\frac{१}{३}प$ अथवा दुसर्‍ये पदाचे वेळाप्रकाशकाचा $\frac{१}{३}$ घेउन त्यास चिन्ह बदल करावें - आणि कोणत्येंही दुसर्‍ये अव्यक्ताशीं जोडावें - जसें ज, तर याप्रमाणें होईल - $ज - \frac{१}{३}प$ नंतर सांगीतल्ये समीकरणांत अव्यक्त

त्त क्षचे स्थळीं ठेवावें · ह्मणजे एक नवें या पुढील संक्षेप रूपाचें समीकरण उत्पन्न होईल · $ज्ञ^{३} * अज्ञ = ब$ हें रूप कार्डानचे रीतीनें पृथक्करण करायास अगत्य पाहिजे · आतां यांत $क = \frac{१}{३} अ$ आणि $ड = \frac{१}{२} ब$ असे असतील तर संक्षेप समीकरणास हें पूर्वींचें रूप होईल · $ज्ञ^{३} * ३ कज्ञ = २ ड$ ·

नंतर क आणि ड यांचा दोन किमती या पुढील सारणी कोष्टकांत ठेवाव्या ·

$$\left.\begin{array}{c} ज्ञ = \sqrt[३]{ड + \sqrt{(ड^{२} + क^{३})}} + \sqrt[३]{ड - \sqrt{(ड^{२} + क^{३})}} \\ \text{अथवा} \\ ज्ञ = \sqrt[३]{ड + \sqrt{(ड^{२} + क^{३})}} - \frac{क}{\sqrt[३]{ड + \sqrt{(ड^{२} + क^{३})}}} \end{array}\right\} ※$$

ह्मणजे

※ मनांत आण किं कोणतेंही मूळ दोन भागांचें आहे · ह्मणजे क्ष आणि य · आतां $क्ष + य = ज्ञ$ · ही बेरीज सांगीतल्ये समीकरणांत ज्ञचे स्थळीं ठेवावी · ह्मणजे त्याचें हें रूप होईल -

$क्ष^{३} + य^{३} + ३ क्षय (क्ष + य) + अ (क्ष + य) = ब$ -

पुनः मनांत आण किं $३ क्षय = - अ$ · आतां पूर्व समीकरणांत ३ क्षय यांचे स्थळीं $- अ$ ठेविल्यानें त्या समीकरणाचें हें रूप होईल · $क्ष^{३} + य^{३} = ब$ · आतां या समीकरणाचे वर्गांतून हें समीकरण ह्मणजे · $क्षय = - \frac{१}{३} अ$ याची चौपट वजा केली ह्मणजे ही बाकी राहात्ये · $क्ष^{६} - २ क्ष^{३}य^{३} + य^{६} = ब^{२} + \frac{४}{२७} अ^{३}$ · नंतर याचें वर्गमूळ हें आहे - $क्ष^{३} - य^{३} = \sqrt{ब^{२} + \frac{४}{२७} अ^{३}}$ · हें समीकरण $क्ष^{३} + य^{३} = ब$ या पूर्व समीकरणांत मिळवून आणि परस्परांची वजाबाकी करून हीं दोन समीकरणें उत्पन्न होतात -

$$\left\{\begin{array}{l} २ क्ष^{३} = ब + \sqrt{ब^{२} + \frac{४}{२७} अ^{३}} = ब + २ \sqrt{(\frac{१}{२} ब)^{२} + (\frac{१}{३} अ)^{३}} \\ २ य^{३} = ब - \sqrt{ब^{२} + \frac{४}{२७} अ^{३}} = ब - २ \sqrt{(\frac{१}{२} ब)^{२} + (\frac{१}{३} अ)^{३}} \end{array}\right. \text{ अथवा}$$

२क्ष³

· ह्मणजे ज्ञ मूळाची किमत $ज्ञ^3 + अज्ञ = ब$ या संक्षेप समीकरणांत निघेल · शेवटीं $क्ष = ज्ञ - \frac{प}{३}$ घे· तर ही क्षची किमत $क्ष^3 + पक्ष^2 + कक्ष = र$ या समीकरणांत इछिलें मूळ होईल ·

या प्रमाणें सांगीतल्ये समीकरणाचें एक मूळ निघाल्यानंतर सांगितलें समीकरण पूर्वरीतीनें एक घात कमीकरून वर्गसमीकरण उत्पन्न होईल · त्याचे वर्गपूरण रीतीनें राहिलीं दोन मूळें उत्पन्न होतील · २०६ पृ०

टीप· जेह्वां अ किंवा क हा वेळाप्रकाशक ऋण आहे · आणि $क^3$ घन $ड^2$ वर्गाहून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढायास प्रायशः अशक्त आहे ·

उदाहरण· $क्ष - ६ क्ष + १० क्ष = ८$ या समीकरणाची वेगळालीं मूळें काय आहेत ·

प्रथम· दुसरें पद घालवावयाकरितां त्याचा वेळाप्रकाशक

$$\left\{\begin{array}{l} २क्ष^3 = २ड + २\sqrt{(ड^2 + क^3)} \\ २य^3 = २ड - २\sqrt{(ड^2 + क^3)} \end{array}\right\}$$ २ दोनयाणीं भागून घनमूळ घेउन

$$\left\{\begin{array}{l} क्ष = \sqrt[3]{ड + \sqrt{ड^2 + क^3}} \\ य = \sqrt[3]{ड - \sqrt{ड^2 + क^3}} \end{array}\right\}$$ या दोहोंची बेरीज वरचे सारणी कोष्टक आहेत ह्मणजे ज्ञची किमत ·

आतां वरचे समीकरणांतील दोन दुसरीं पदें समछेद केल्यापासून कळतें किं दुसरे सारणी कोष्टक प्रथम सारणी कोष्टकांचे किमती बराबर आहेत·

−६ आहे · याचा तृतीय भाग −२ हा आहे · याजकरितां क्ष=ज्ञ+२ हें घेतर

$$\text{क्ष}^{३}=\text{ज्ञ}^{३}+६\,\text{ज्ञ}^{२}+१२\,\text{ज्ञ}+८$$

$$-६\,\text{क्ष}^{२}=\quad -६\,\text{ज्ञ}^{२}-२४\,\text{ज्ञ}-२४$$

$$+१०\,\text{क्ष}=\qquad +१०\,\text{ज्ञ}+२०$$

$$\text{ज्ञ}^{३}\ *\ -२\,\text{ज्ञ}+४=८$$

अथवा $\text{ज्ञ}^{३}\ *\ -२\,\text{ज्ञ}=४$

यांत अ=−२ आणि ब=४ य जकरितां क=$-\frac{२}{३}$ आणि ड=२ याजकरितां

$$\sqrt[३]{\text{ड}+\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}}=\sqrt[३]{२+\sqrt{(४-\ \ )}}=\sqrt[३]{२+\sqrt{\tfrac{१००}{२७}}}=\sqrt[३]{२+\tfrac{१०}{९}\sqrt{३}}=१·५७७३५$$

आणि $\sqrt[३]{\text{ड}-\sqrt{(\text{ड}^{२}+\text{क}^{३})}}=\sqrt[३]{२-\sqrt{(४-\ \ )}}=\sqrt[३]{२-\sqrt{\tfrac{१००}{२७}}}=\sqrt[३]{२-\tfrac{१०}{९}\sqrt{३}}=०·४२२६५$

नंतर या दोहोंची बेरीज ज्ञची किमत आहे · ह्मणजे ज्ञ=२ याज करितां क्ष=ज्ञ+२=४ हें $\text{क्ष}^{३}-६\ \ ^{२}+१०\,\text{क्ष}=८$ या समीकरणांत क्षचें मूळ आहे ·

दुसरीं दोन मूळें काढायाकरितां २०७ व्ये पृष्ठावरील रीतीनें भागाकार करावा · जसें

$$
\begin{array}{l}
\text{क्ष}-४)\ \text{क्ष}^{३}-६\,\text{क्ष}^{२}+१०\,\text{क्ष}-८\ (\text{क्ष}^{२}-२\,\text{क्ष}+२=०\\
\qquad\quad \underline{\text{क्ष}^{३}-४\,\text{क्ष}^{२}}\\
\qquad\quad *\ -२\,\text{क्ष}^{२}+१०\,\text{क्ष}\\
\qquad\qquad \underline{-२\,\text{क्ष}^{२}+\ ८\,\text{क्ष}}\\
\qquad\qquad\ \ *\quad +२\,\text{क्ष}-८\\
\qquad\qquad\qquad \underline{+२\,\text{क्ष}-८}\\
\qquad\qquad\qquad\ \ *\quad *
\end{array}
$$

आतां

आतां स्थळांतरानें $क्ष^2 - २ क्ष = -२$

वर्गपुराकरून- $क्ष^2 - २ क्ष + १ = -१$

मूळ काढून $क्ष - १ = \pm\sqrt{-१}$

स्थळांतरानें $क्ष = १ \pm \sqrt{-१}$

म्हणजे $क्ष = १ + \sqrt{-१}$ आणि $क्ष = १ - \sqrt{-१}$ हीं क्षचीं इछिलीं दोन मूळें होत.

दुसरें. $क्ष^3 - ९ क्ष^2 + २८ क्ष = ३०$ या समीकरणांत वेगळालीं मूळें काय आहेत.

उत्तर $क्ष = ३$ अथवा $= ३ + \sqrt{-१}$ अथवा $= ३ - \sqrt{-१}$

तिसरें. $क्ष^3 - ७ क्ष^2 + १४ क्ष = २०$ या समीकरणांत वेगळालीं मूळें काय आहेत.

उत्तर $क्ष = ५$ अथवा $= १ + \sqrt{-३}$ अथवा $= १ - \sqrt{-३}$

सरळ व्याज.

कोणत्येही मुद्दलाचें कितीही मुदतीनें व्याज मुद्दल आणि मुदती यांशीं समप्रमाणांत आहे. याजकरितां एकवर्षाचें एक रुपयाचें व्याज कोणतेंही मुद्दल आणि त्याचा मुदती वर्ष आणि वर्षांचे अवयव हीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्या मुद्दलाचें त्या मुदतीचें व्याज होईल. म्हणजे जर

र =

र= एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याजाचा दर असेल -

प= मुद्दल कर्ज असेल -

त= मुदतींची संख्या असेल -

अ= व्याज मुद्दल ह्मणजे व्याज आणि मुद्दल मिळोन राशि असेल -

परत= पचें त मुदतींचें व्याज होईल - याजकरितां

प+परत अथवा प × (१+ रत)= अ ही व्याज मुद्दल राशि -

या समीकरणापासून दुसरें समीकरण अल्यायासें उत्पन्न होतें आपारून दुसर्ये पदांचा किंमती समजांत येतील - आणि पुढें सांगतों याप्रमाणें त्यांस एकत्र करितो -

प्रथम- अ= प+परत हें व्याज मुद्दल -

दुसरें - $प = \frac{अ}{१+ रत}$ हें मुद्दल -

तिसरें- $र = \frac{अ-प}{पत}$ हा व्याजाचा दर -

चोथें- $त = \frac{अ-प}{पर}$ या मुदती -

उदाहरण - कोणत्येही सरळ व्याजाचे दरानें कोणतेंही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या -

या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे- ह्मणजे - अ= प+परत - यांत अ= २प - ह्मणजे - मुद्दलाची दुपट अचे स्थळीं ठेविली पाहिजे - तर २प=प+परत - अथवा परत =प - अथवा रत=१ याजकरितां $त = \frac{१}{र}$

यांत

यांत र हें एक रुपयाचें एकवर्षाचें व्याज आहे · याजकरितां सरळ व्याजानें मुद्दल दुपट होण्यास त मुदती भागाकार आहे · जें · कोणतेंही मुद्दल त्याचे एक वर्षाचे व्याजानें भागिलें तो भागाकार · मुदती भागाकार होय · अशानें १०० रुपयांस १ वर्षाचें व्याज ५ रुपये असेल · तर मुद्दल दुपट होण्यास $\frac{१००}{५}$ =२० वर्षें असावीं · अथवा चौथ्ये समीकरणापासून मुदती सत्वर कळतील $त = \frac{अ-प}{पर} = \frac{२प-प}{पर} = \frac{२-१}{र} = \frac{१}{र}$ हें पूर्व प्रमाणें बराबर आहे ·

चक्रवाढ व्याज

जीं पदें सरळ व्याजांत येतात · ह्मणजे ·

प= मुद्दल

र= एक रुपयाचा एक वर्षाचे व्याजाचा दर ·

अ= व्याज मुद्दल रास ·

त= मुदती

यांशिवाय चक्रवाढ व्याजांत दुसरें एक पद येतें - ह्मणजे व्याजाचे दराचें गुणोत्तर तें हें आहे कि एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याज मुद्दल - हें पद दारववायाकरितां च अक्षर चिन्ह घ्यावें · ह्मणजे -

च=

च=१+र · हें एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याज मुद्दल दाखवितें · तेव्हां वेगळाल्ये मुदतीचें व्याज मुद्दल या रितीनें तपशील कर्ता कळतें जसें ·

१ रुपया कोणत्येही मुदतीचे व्याज मुद्दलास आहे · तसें · कोणतेंही सांगीतलें मुद्दल · त्या मुदतीचे त्याचें व्याज मुद्दलास होईल · ह्मणजे ·

असें १ रुपया : च : : प : पच · हें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे

आणि १ रुपया : च : : पच : पच^{2} · हें दुसर्ये वर्षाचे व्याज मुद्दल आहे ·

तसें १ रुपया : च : : पच^{2} : पच^{3} · हें तिसर्ये वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे ·

आणि इत्यादि ·

याजकरितां सामान्यतः पच^{त}= अ · हें व्याज मुद्दल आहे · त मुदतीचें या समीकरणापासून हें सामान्य समीकरण उत्पन्न होतें ·

प्रथम · अ= पच^{त} · हें व्याजमुद्दल ·

दुसरें · प= $\frac{अ}{च^{त}}$ · हें मुद्दल ·

तिसरें · च= $\sqrt[त]{\frac{अ}{प}}$ हें गुणोत्तर

चवथें · त= $\frac{लॉ॰अ - लॉ॰प}{लॉ॰च}$

या पासून

यापासून कोणतेंही एक पद निघेल · जर राहिलीं तीन पदें सांगी-तलीं आहेत ·

जेव्हां सगळें व्याजच करायाची इछा आहे · तेव्हां अ या व्याज मुद्दलापासून प हें मुद्दल मात्र वजा करावें · ह्मणजे बाकी राहिली तें व्याज ·

उदाहरण · कोणतेंही मुद्दल सांगीतल्ये चक्रवाढ व्याजाचे दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या · तर हें समजाया करि-तां चवथें समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे · परंतु या प्रश्नाचेसं केताप्रमाणें अ=२प तेव्हां याप्रमाणें तपशील होईल ·

$$त = \frac{ला\circ अ - ला\circ प}{ला\circ च} = \frac{ला\circ २प - ला\circ प}{ला\circ च} = \frac{ला\circ २}{ला\circ च}$$

अशानें जर एक वर्षांत १०० रुपयांस व्याजाचा दर ५ रुपये असे-ल · तर च=१+ ·०५=१·०५ याजकरितां ·

$$त = \frac{ला\circ २}{ला\circ १·०५} = \frac{·३०१०३०}{·०२११८९} = १४·२०६७$$ हें जवळ जवळ ·

ह्मणजे · कोणतेंही मुद्दल १४ $\frac{१}{५}$ वर्षांत दुपट होतें · दर शेंकडा दरव-र्षास पंचोत्रा व्याज चक्रवाढीनें असेल तर ·

या प्रश्नापासून आणि सरळ व्याजांत या सारिखे प्रश्न आहेत त्यांपासून वेगळालें मुद्दल दुपट होण्यास सरळ व्याजानें आणि चक्रवाद व्याजानें किती किती मुदती असाव्या तें कळायास कोष्टक लिहितो.

दर		सरळ व्याज.	चक्रवाद व्याज.
२		५०	३५·००२८
२ १/२	शंभरांस एकवर्षास	४०	२८·०७०१
३	या दराचे व्याजानें	३३ १/३	२३·४४९८
३ १/२	एक रुपया किंवा दुसरें	२८ ४/७	२०·१४८८
४	कोणतें ही मुद्दल दुपट	२५	१७·६९३०
४ १/२	होईल या पुढील कोष्ट	२२ २/९	१५·७४७५
५	कांत सांगीतल्ये वर्षा	२०	१४·२०६७
६	नीं किंवा मुदतीनीं.	१६ २/३	११·८९५७
७		१४ २/७	१०·२४४८
८		१२ १/२	९·००६५
९		११	८·०४३२
१०		१०	७·२७२५

या पुढील

या पुढील कोष्टकांचे साह्याने वेगळाल्ये दरानीं वेगळाल्ये मुदतींचे चक्रवाढ व्याजाचा हिंसाब करायास फार सुगम पडेल -

एक रुपयाचें व्याज मुद्दल कितीही वर्षांचे संख्येनें -

वर्षे	३	३½	४	४½	५	६
१	१.०३००	१.०३५०	१.०४००	१.०४५०	१.०५००	१.०६००
२	१.०६०९	१.०७१२	१.०८१६	१.०९२०	१.१०२५	१.१२३६
३	१.०९२७	१.१०८७	१.१२४९	१.१४१२	१.१५७६	१.१९१०
४	१.१२५५	१.१४७५	१.१६९९	१.१९२५	१.२१५५	१.२६२५
५	१.१५९३	१.१८७७	१.२१६७	१.२४६२	१.२७६३	१.३३८२
६	१.१९४१	१.२२९३	१.२६५३	१.३०२३	१.३४०१	१.४१८५
७	१.२२९९	१.२७२३	१.३१५९	१.३६०९	१.४०७१	१.५०३६
८	१.२६६८	१.३१६८	१.३६८६	१.४२२१	१.४७७५	१.५९३८
९	१.३०४८	१.३६२९	१.४२३३	१.४८६१	१.५५१३	१.६८९५
१०	१.३४३९	१.४१०६	१.४८०२	१.५५३०	१.६२८९	१.७९०८
११	१.३८४२	१.४६००	१.५३९५	१.६२२९	१.७१०३	१.८९८३
१२	१.४२५८	१.५१११	१.६०१०	१.६९५९	१.७९५९	२.०१२२
१३	१.४६८५	१.५६४०	१.६६५१	१.७७२२	१.८८५६	२.१३२९
१४	१.५१२६	१.६१८७	१.७३१७	१.८५१९	१.९७९९	२.२६०९
१५	१.५५८०	१.६७५३	१.८००९	१.९३५३	२.०७८९	२.३९६६
१६	१.६०४७	१.७३४०	१.८७३०	२.०२२४	२.१८२९	२.५४०४
१७	१.६५२८	१.७९४७	१.९४७९	२.११३४	२.२९२०	२.६९२८
१८	१.७०२४	१.८५७५	२.०२५८	२.२०८५	२.४०६६	२.८५४३
१९	१.७५३५	१.९२२५	२.१०६८	२.३०७९	२.५२७०	३.०२५६
२०	१.८०६१	१.९८९८	२.१९११	२.४११७	२.६५३३	३.२०७१

या कोष्टकांत

या कोष्टकांत सगळे घात ह्मणजे च धान विसाव्ये घातापर्यंत लिहिले आहेत · किंवा एक रुपयाचें व्याज मुद्दल · यांचें काम हें आहे · किं · कोणत्येही मुद्दलाचें व्याज किंवा व्याज मुद्दल कोणत्येही मुदतीचें करायाचें · जी मुदत वीस वर्षांचे आंत आहे ·

उदाहरण · ५२३० रुपये मुद्दल यास दरसाल दर शेंकडा ५ रुपये व्याज प्रमाणें १५ वर्षांत चक्रवाढीनें व्याज मुद्दल रास किती होईल ·

कोष्टकांत १५ चे ओळींत ५ यांचे दराखालीं एक रुपयाचें व्याज मुद्दल लिहिलें आहे · तें २·०७८९ यास सांगीतल्ये मुद्दलानें गुणून ·

```
          ५२३०
        ------
        ६२३६७०
       ४१५७८ .
     १०३९४५
   ----------
   १०८७२·६४७० हें व्याज मुद्दल रुपये रास·
                ४
      --------
       २·५८८०
```

किंवा रु० १०८७२ · · · पा० २ · · रें० ५८ हें व्याज मुद्दल ·

```
       ५२३०
   -----------------
       ५६४२ · · · २ · · ५८  हें व्याज ·
```

प्रथमटीप · जेव्हां व्याजाचा दर वर्षांचे कांहीं भागावर आहे · जसें ·

असें अर्धवर्ष · पाववर्ष · इत्यादि · तेव्हांपण हीच रीति लागत्ये परंतु असे आहे तर क · त्या मुदती दारववितो · आणि च तितक्या मुदतीचे व्याज मुद्दल ·

दुसरी दीप - जेव्हां कोणत्येही मुद्दलाचें चक्रवाढीनें व्याज किंवा व्याज मुद्दल कराची इछा आहे तेव्हां तें या पुढील रीती वरून करावें ·

प्रथमरीति - जेव्हां मुदत एक वर्षाचा कोणताही बराबर भाग आहे · पूर्व रीतीनें एक रुपयाचें एकवर्षाचें व्याज मुद्दल काढावें · नंतर ती मुदत वर्षाचा कित्यावा भाग आहे तो अंक त्यास मूळप्रकाशक करून तितके मूळ घ्यावें · ह्मणजे त्या मुदतीचें एक रुपयाचें व्याज मुद्दल आले · यास सांगीतल्ये मुद्दलानें गुणावें · ह्मणजे इछिलें त्या मुदतीचें व्याज मुद्दल आलें ·

दुसरी रीति - जेव्हां मुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भाग नाहीं तेव्हां सांगीतल्ये मुदतीचे दिवस करावे · आणि एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे त्यास ३६५ हा अंक मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें · तें मूळ एक रुपयाचें एकदिवसाचें व्याज मुद्दल आलें · मग तें सांगीतल्ये मुदतीचे दिवससंख्या घात पर्यंत वाढवावें · ह्मणजे एक रुपयाचें तितक्ये दिवसांचें व्याज मुद्दल जालें · नंतर यास सांगीतल्ये मुद्दलानें गुणावें · तो गुण्णाकार इछिलें व्याज मुद्दल होईल · या कामाचा तपशील कर्ज्ये समयीं लागरतंम बहुत उपगी पडेल ·

प्राप्ति

प्राप्ति

प्राप्ति शब्द कामांत घेतात · ऐसांजे · जो [illegible] लाभ बराबर मुदतींवर होतो · जसा · कर्जाचें व्याज · घरभूमि इत्यादिकांचें भाडें · चाकरीचें वेतन · वर्षासन · आणि बाळपर्वेशी इत्यादि · हे सर्वलाभ मुदतीचे मुदतीस पावतात · परंतु बहुतकरून वर्षाचे मुदतीवर आहेत · या सर्वलाभांस प्राप्ति असें ह्मणतात ·

प्राप्ति दोन प्रकारची आहे · वर्तमान आणि भविष्य · वर्तमान प्राप्ति ह्मणजे जो पैका हातीं येण्यास आरंभ जाला आहे ती होय · भविष्य प्राप्ति ह्मणजे पैका हातीं येण्यास आरंभ जाला नाहीं · परंतु काहीं मुदतीनें किंवा काहीं प्रतिबंध असेल तो दूर जाल्यावर निश्चित हातीं येणार ·

जेह्वां प्राप्ति कित्येक वर्षे अवरुद्ध आहे · ह्मणोन पैका पावला नाहीं, तीस अवरुद्ध प्राप्ति ह्मणतात ·

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत : सावधि आणि निरवधि · सावधि प्राप्ति ह्मणजे जा प्राप्तीस काळमर्यादा आहे · ५ वर्षे · १० वर्षे · इत्यादि · निरवधि प्राप्ति ह्मणजे जा प्राप्तीस काळमर्यादा नाहीं · अखंड निरंतर चालणारी ·

प्राप्तीचें व्याज मुद्दल ह्मणजे अवरुद्ध प्राप्तीचें कितक्या वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल याची बेरीज ·

प्राप्तीची वर्तमान किमत ह्मणजे प्राप्तीचा आधार मनांत धरून

न ... पैका एकाएकी दे...ास घेण्यास योग्य आहे · तो होय ·

अ = प्राप्ति ·
न = अवरुद्ध प्राप्तीची वर्षसंख्या ·
च = एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज सुद्दल ·
म = प्राप्तीचें व्याज सुद्दल ·
व = प्राप्तीची वर्तमान किमत ·

(कंसाच्या बाजूस: असीं अक्षरें कल्पिलीं)

आतां च राशीची वर्तमान किमत १ आहे · याजकरितां प्रमाणानें कोणतीही दुसरी राशि · असा अ · याची किमत निघेल ·

जसें · च : १ :: अ : $\frac{अ}{च}$ · ही अची वर्तमान किमत · जी एक वर्षानंतर मिळेल ·

आणि · च : १ :: $\frac{अ}{च}$: $\frac{अ}{च^{2}}$ · ही अची वर्तमान किमत · जी दोन वर्षानंतर मिळेल ·

तसें याप्रमाणें पुढेंही · $\frac{अ}{च^{3}}$, $\frac{अ}{च^{4}}$, $\frac{अ}{च^{5}}$ · इत्यादि · या सर्व अ चा वर्तमान किमती ३ , ४ , ५ इत्यादि वर्षानंतर मिळतील याजकरितां या सर्वांची बेरीज ·

ह्मणजे $\frac{अ}{च} + \frac{अ}{च^{2}} + \frac{अ}{च^{3}} + \frac{अ}{च^{4}} + \frac{अ}{च^{5}}$ इत्यादि ·

किंवा $\left(\frac{1}{च} + \frac{1}{च^{2}} + \frac{1}{च^{3}} + \frac{1}{च^{4}} + \frac{1}{च^{5}}\right) \times$ अ ही बेरीज न पदापर्यंत न वर्षसंख्येचे प्राप्तीची वर्तमान किमत होईल · आणि निरवधिप्राप्तीची किमत या श्रेणीची अनंत पदें पर्यंत बेरीज आहे · परंतु सत्वर दिसतें किं ही श्रेढी भूमिति प्रमाणांत आहे · जीचें प्रथमपद $\frac{1}{च}$ गुणोत्तर $\frac{1}{च}$ आणि गछ न आहे · याजकरितां या श्रेढीचें सर्वधन किंवा वर्तमान किमत ·

व=

$$व = \frac{चे - चे \times चेन}{१ - चे} \times अ = \frac{च^न - १}{च - १} \times \frac{अ}{च^न}$$

जेव्हां प्राप्ति निरवधि आहे · तेव्हां न गच्छ अनंत आहे · आणि $च^न$ हाही अनंत आहे · याजकरितां हें पद $\frac{}{चेन} = ०$ शून्य होतें · यास्तव $\frac{अ}{च-१} \times \frac{}{चन}$ हेंही $= ०$ आहे · यापासून कळतें किं पूर्वसमीकरणास हें रूप होतें · $व = \frac{अ}{च-१}$ ह्मणजे कोणतीही प्राप्ति एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याजानें भागून जो भागाकार निरवधि प्राप्तीचीं किमत होतो ·

अशानें जर व्याजाचा दर शंभरास पांचोत्रा असेल तर $१००अ \div ५ = २०$ अ हा निरवधि प्राप्तीची किमत शेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें आहे · आणि $१०० अ \div ४ = २५$ अ ही निरवधि प्राप्तीची किमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाचा दराने आहे · आणि $१००अ \div ३ = ३३\frac{१}{३}$ अ · ही निरवधि प्राप्तीची किमत ३ रुपये व्याजाचे दरानें आहे · इत्यादि ·

पुनः एक रुपयाचें न वर्षांत व्याज मुद्दल $= च^न$ आहे · याजकरितां $च^न - १$ ही त्या मुद्दलावर वृद्धी जाली · परंतु त्याचे एक वर्षाचें व्याज किंवा प्राप्ति जी त्या वृद्धीवर आहे · ह्मणजे $च - १$ याजकरितां

असें $च - १ : च^न - १ :: अ : म$ · ह्मणजे ·

$म = \frac{च^न - १}{च - १} \times अ$ · आतां अवरुद्ध प्राप्तीस जे वेगळाले प्रकार लागतात · ते या पूर्वसमीकरणापासून निघतील ·

म=

$$\text{म} = \frac{\text{च}^{\text{न}} - १}{\text{च} - १} \times \text{अ} = \text{व}\text{च}^{\text{न}}$$

$$\text{व} = \frac{\text{च}^{\text{न}} - १}{\text{च} - १} \times \frac{\text{अ}}{\text{च}^{\text{न}}} = \frac{\text{म}}{\text{च}^{\text{न}}}$$

$$\text{अ} = \frac{\text{च} - १}{\text{च}^{\text{न}} - १} \times \text{म} = \frac{\text{च} - १}{\text{च}^{\text{न}} - १} \times \text{व}\text{च}^{\text{न}}$$

$$\text{न} = \frac{\text{ला॰ म} - \text{ला॰ व}}{\text{ला॰ च}} = \frac{\text{ला॰} \frac{\text{मच} - \text{म} + \text{अ}}{\text{अ}}}{\text{ला॰ च}}$$

$$\text{ला॰ च} = \frac{\text{ला॰ म} - \text{ला॰ व}}{\text{न}}$$

$$\text{र} = \left(\frac{१}{\text{च}^{\text{प}}} - \frac{१}{\text{च}^{\text{न}}}\right) \times \frac{\text{अ}}{\text{च} - १}$$

या शेवटील समीकरणांत र भविष्य प्राप्तीची वर्तमान किंमत प वर्षांनंतर आहे. ती दाखवितो. आणि हें याप्रमाणें उत्पन्न होतें किं.

या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत प आणि न वर्षें लिहावीं.

म्हणजे $$\frac{\text{च}^{\text{न}} - १}{\text{च} - १} \times \frac{\text{अ}}{\text{च}^{\text{न}}} - \frac{\text{च}^{\text{प}} - १}{\text{च} - १} \times \frac{\text{अ}}{\text{च}^{\text{प}}}$$

परंतु कोणत्येही प्राप्तीचें व्याज मुद्दल आणि वर्तमान किंमत कित्येक वर्षांची २१ वर्षेंपर्यंत या पुढील दोन सारणीकोष्टकांचे साहाय्यानें निघेल.

प्रथम कोष्टक

एक रुपयाचे प्राप्तीचें चक्रवाढ व्याजानें व्याज मुद्दल.

वर्षे	दरशेंकडा रुपये ३ प्र०	दरशेंकडा रुपये ३½ प्र०	दरशेंकडा रुपये ४ प्रमा०	दरशेंकडा रुपये ४½ प्र०	दरशेंकडा रुपये ५ प्र०	दरशेंकडा रुपये ६ प्रमा०
१	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००	१·००००
२	२·०३००	२·०३५०	२·०४००	२·०४५०	२·०५००	२·०६००
३	३·०९०९	३·१०६२	३·१२१६	३·१३७०	३·१५२५	३·१८३६
४	४·१८३६	४·२१४९	४·२४६५	४·२७८२	४·३१०१	४·३७४६
५	५·३०९१	५·३६२५	५·४१६३	५·४७०७	५·५२५६	५·६३७१
६	६·४६८४	६·५५०२	६·६३३०	६·७१६९	६·८०१९	६·९७५३
७	७·६६२५	७·७७९४	७·८९८३	८·०१९२	८·१४२०	८·३९३८
८	८·८९२३	९·०५१७	९·२१४२	९·३८००	९·५४९१	९·८९७५
९	१०·१५९१	१०·३६८५	१०·५८२८	१०·८०२१	११·०२६६	११·४९१३
१०	११·४६३९	११·७३१४	१२·००६१	१२·२८८२	१२·५७७९	१३·१८०८
११	१२·८०७८	१३·१४२०	१३·४८६४	१३·८४१२	१४·२०६८	१४·९७१६
१२	१४·१९२०	१४·६०२०	१५·०२५८	१५·४६४०	१५·९१७१	१६·८६९९
१३	१५·६१७८	१६·११३०	१६·६२६८	१७·१५९९	१७·७१३०	१८·८८२१
१४	१७·०८६३	१७·६७७०	१८·२९१९	१८·९३२१	१९·५९८६	२१·०१५१
१५	१८·५९८९	१९·२९५७	२०·०२३६	२०·७८४१	२१·५७८६	२३·२७६०
१६	२०·१५६९	२०·९७१०	२१·८२४५	२२·७१९३	२३·६५७५	२५·६७२५
१७	२१·७६१६	२२·७०५०	२३·६९७५	२४·७४१७	२५·८४०४	२८·२१२९
१८	२३·४१४४	२४·४९९७	२५·६४५४	२६·८५५१	२८·१३२४	३०·९०५७
१९	२५·११६९	२६·३५७२	२७·६७१२	२९·०६३६	३०·५३९०	३३·७६००
२०	२६·८७०४	२८·२७९७	२९·७७८१	३१·३७१४	३३·०६६०	३६·७८५६
२१	२८·६७६५	३०·२६९५	३१·९६९२	३३·७८३१	३५·७१९३	३९·९९२७

दुसरे

दुसरे कोष्टक

एकरुपयाचे प्रातीची चक्रवाढ व्याजानें वर्तमान किमत.						
वर्षे	दरशेंकडा रुपये ३ प्रमा०	दरशेंकडा रुपये ३½ प्र०	दरशेंकडा रुपये ४ प्रमा०	दरशेंकडा रुपये ४½ प्र०	दरशेंकडा रुपये ५ प्र०	दरशेंकडा रुपये ६ प्र०
१	०.९७०९	०.९६६२	०.९६१५	०.९५६९	०.९५२४	०.९४३४
२	१.९१३५	१.८९९७	१.८८६१	१.८७२७	१.८५९४	१.८३३४
३	२.८२८६	२.८०१६	२.७७५१	२.७४९०	२.७२३२	२.६७३०
४	३.७१७१	३.६७३१	३.६२९९	३.५८७५	३.५४६०	३.४६५१
५	४.५७९७	४.५१५१	४.४५१८	४.३९००	४.३२९५	४.२१२४
६	५.४१७२	५.३२८६	५.२४२१	५.१५७९	५.०७५७	४.९१७३
७	६.२३०३	६.११४५	६.००२१	५.८९२७	५.७८६४	५.५८२४
८	७.०१९७	६.८७४०	६.७३२७	६.५९५९	६.४६३२	६.२०९८
९	७.७८६१	७.६०७७	७.४३५३	७.२६८८	७.१०७८	६.८०१७
१०	८.५३०२	८.३१६६	८.११०९	७.९१२७	७.७२१७	७.३६०१
११	९.२५२६	९.००१६	८.७६०५	८.५२८९	८.३०६४	७.८८६९
१२	९.९५४०	९.६६३३	९.३८५१	९.११८६	८.८६३३	८.३८३८
१३	१०.६३५०	१०.३०२७	९.९८५६	९.६८२९	९.३९३६	८.८५२७
१४	११.२९६१	१०.९२०५	१०.५६३१	१०.२२२८	९.८९८६	९.२९५०
१५	११.९३७९	११.५१७४	११.११८४	१०.७३९६	१०.३७९७	९.७१२२
१६	१२.५६११	१२.०९४१	११.६५२३	११.२३४०	१०.८३७८	१०.१०५९
१७	१३.१६६१	१२.६५१३	१२.१६५७	११.७०७२	११.२७४१	१०.४७७३
१८	१३.७५३५	१३.१८९७	१२.६५९३	१२.१६००	११.६८९६	१०.८२७६
१९	१४.३२३८	१३.७०९८	१३.१३३९	१२.५९३३	१२.०८५३	११.१५८१
२०	१४.८७७५	१४.२१२४	१३.५९०३	१३.००७९	१२.४६२२	११.४६९९
२१	१५.४१५०	१४.६९८०	१४.०२९२	१३.४०४७	१२.८२१२	११.७६४१

कोणत्येही प्राप्तीचें कित्येक सांगीतल्या वर्षांचें सांगीतल्या व्याजाचे दरानें व्याज मुद्दल काढायाचें ·

प्रथम कोष्टकांतून सांगीतल्ये वर्षांचें सांगीतल्ये व्याजाचे दरानें एक रुपयाचें व्याज मुद्दल काढावें · आणि तें सांगीतल्ये प्राप्तीनें गुणावें · तो गुणाकार सांगीतल्ये प्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें त्या दरानें व्याज मुद्दल होईल · त्याची उलट केली असतां वर्षें आणि दर निघेल

उदाहरण · ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ति कांहीं निमित्तानें २० वर्षें पर्यंत बंद राहिली असतां चक्रवाढ व्याज दर शेंकडा दर साल रुपये ३½ प्रमाणें तितक्या वर्षांचें व्याज मुद्दल किती होईल ·

आतां प्रथम कोष्टकांत वर्षांखालीं २० चे ओळींत रुपये ३½ चे दराखालीं एक रुपयाचें व्याज मुद्दल २८·२७९७ आहे तें ५०० शें यांणीं गुणून आला गुणाकार १४१३९·८५ हा · किंवा १४१३९ रुपये ३ पावले ४० रेंस हें इछिलें व्याज मुद्दल · हें उत्तर ·

कोणत्येही सांगीतल्ये प्राप्तीची सांगीतलीं वर्षें पर्यंत सांगीतल्ये दरानें वर्तमान किमत काढायाची ·

दुसर्ये कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणें एक रुपयाची वर्तमान किमत काढावी · आणि ती सांगीतल्ये प्राप्तीनें गुणावी · तो गुणाकार सांगीतल्ये प्राप्तीची सांगीतलीं वर्षें पर्यंतची सांगीतल्ये दरानें वर्तमा-

न

न किमत होईल.

उदाहरण. ५०० रुपये दर वर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दर साल दर शेंकडा रुपये ३ १/२ चक्रवाढ व्याज यादरासें वर्तमान किमत काय होईल.

आतां दुसर्ये कोष्टकांत वर्षांखालीं २० चे ओळींत रुपये ३ १/२ चे दराखालीं एकरुपयाची वर्तमान किमत १४·२१२४ आहे ती ५०० शें यांणीं गुणून आला गुणाकार ७१०६·२ हा. किंवा ७१०६ रुपये ० पावले ८० रेंस ही इछिली वर्तमान किमत आहे. हें उत्तर.

दुसरें. आजपासून १० वर्षानंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति चालू होणार. ती त्या दिवसापासून ११ वर्षे पर्यंत चालेल. अथवा आजपासून २१ वर्षानीं बंद होईल. तर त्या प्राप्तीची वर्तमान किमत दर शेंकडा दर वर्षास ४ रुपये चक्रवाढ व्याजाचे दरानें काय होईल.

या सारिख्ये उदाहरणांत दोन मुदतींचा बरोबर दोन प्राप्तींचा वर्तमान किमती काढून त्यांची वजा बाकी करावी. ह्मणजे याप्रमाणें होतें.

दुसर्ये कोष्टकांतून काढिल्ये दोन किमतींची वजाबाकी करावी. आणि ती बाकी सांगितल्ये प्राप्तीनें गुणावी. तो गुणाकार इछिली वर्तमान किमत होईल.

जसें · कोष्टकांत २१ वर्षांची वर्तमान किमत	१४·०२९२
आणि १० वर्षांची वर्तमान किमत	८·१११०९
यांची वजाबाकी	५·९१८३
	२००
	११८३·६६००
	४
	२·६४००
	१००
	६४·००००

तर ११८३ रुपये २ पावले ६४ रेंस · इच्छिली वर्तमान किमत · हें उत्तर ·

PART II.

LOGARITHMS.

CONTENTS.

दुसरा भाग



लाग्रतंमें

अनुक्रमणिका

लाग्रतंमाचें.

कठिण हिंसाब सुगम होण्यास लाग्रतंमें केलीं आहेत.

तीं हें करितात कीं, मिळवणीनेंच गुणाकार, वजाबाकीनेंच भागाकार, संख्येचें लाग्रतंम घातप्रकाशकानें गुणिल्यानेंच घातादिवृद्धि, आणि संख्येचें लाग्रतंम मूळप्रकाशकानें भागिल्यानेंच वर्गादिमूळ

म्हणजे लाग्रतंमें तशाच युक्तीनें उत्पन्न केलेल्या संख्या आहेत, आणि त्या दुसर्‍ये स्वाभाविक संख्यांशीं तशा संबद्ध ठेविल्या आहेत कीं प्रथमांची बेरीज आणि वजाबाकी दुसर्‍यांचे गुणाकाराशीं आणि भागाकाराशीं मिळेल.

अथवा सामान्यतः लाग्रतंमें गुणोत्तराचे संख्येंत घातप्रकाशक आहेत; अथवा गणितप्रमाणांत संख्यांची श्रेणी आहे, जी भूमितिप्रमाणांत दुसर्‍ये संख्यांची प्रतियोगी होत्ये जसें

{ ०, १, २, ३, ४, ५, ६, घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंमें.
{ १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४, भूमितिश्रेणी

अथवा { ०, १, २, ३, ४, ५, ६, घातप्रकाशक अथवा लाग्रतमें
{ १, ३, ९, २७, ८१, २४३, ७२९, भूमितिश्रेणी

अथवा { ०, १, २, ३, ४, ५, घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंमें.
{ १, १०, १००, १०००, १००००, १०००००, भूमितिश्रेणी

यांत स्पष्ट आहे कीं कोणत्येही भूमितिश्रेणी करितां घातप्रकाशक ए-

कच

कच आहे; आणि याजकरितां एकच स्वाभाविक संख्येस लाग्रतंमाचा जाति पुष्कळ असतील, जशीं भूमितिश्रेणींचीं दुसरीं पदें वेगळाळीं केलीं, जसें वरचे भूमितिश्रेणींत २, ३, १० अथवा दुसरें कोणतेंही; आणि एक मध्यस्थापनानें सर्वसंख्या भूमितिश्रेणींत आणवतील, आणि त्यांस प्रमाणानें लाग्रतंमें देववतील, जरी पूर्णांक अथवा दशांश असतील.

आणखी या श्रेणींचे स्वभावापासून प्रकट आहेकीं जर कोणतेही दोन घातप्रकाशक एकत्र मेळविले तर त्यांची बेरीज त्या संख्येचा घातप्रकाशक होईल, जी संख्या भूमितिश्रेणींत त्या घातप्रकाशकांचे खालचे संख्यांचा गुणाकार आहे, जसें प्रथमश्रेणींत २ आणि ३ हे घातप्रकाशक मिळून ५ आले; आणि ४ आणि ८ ह्मणजे त्या घातप्रकाशकांचे खालचीं पदें परस्पर गुणून ३२ होतात ह्मणजे ते ही संख्या आहे, जीचा घातप्रकाशक ५ आहे.

तशाचरीतीनें, जर कोणताही एक घातप्रकाशक दुसर्यांतून वजा केला, तर बाकी त्या संख्येची घातप्रकाशक होईल, जी संख्या त्या दोन घातप्रकाशकांचे खालचे पदांचा भागाकार आहे, जसें घातप्रकाशक ६ − घातप्रकाशक ४ = २; आणि या घातप्रकाशकांचे खालचीं पदें ६४ आणि १६ आहेत, त्यांचा भागाकार = ४ आहे, ह्मणजे हीच संख्या आहे जीचा घातप्रकाशक २ आहे.

या कारणास्तवही, जर कोणत्येही संख्येचें लाग्रतंम आपल्ये

घातप्रकाशकानें गुणिलें, तर गुणाकार त्याघाताचे लाग्रतंमा बरोबर होईल; जसें पूर्वधरचेश्रेणींत ४ याचा घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंम २ आहे; आणि जर यास ३ नीं गुणिला तर गुणाकार = ६ होईल, आणि हें ६४ चें लाग्रतंम आहे· आणि ६४ चौहोंचा घन आहे·

आणि जर कोणत्येही संख्येचें लाग्रतंम तीचे मूळप्रकाशकानें भागिलें, तर भागाकार त्यामूळाचे लाग्रतंमा बरोबर होईल· जसें ६४ यांचा प्रकाशक अथवा लाग्रतंम ६ आहे; आतां जर यास २ नीं भागिला, तर भागाकार = ३ होईल; आणि हें ८ या संख्येचें लाग्रतंम आहे· तेव्हां हें ६४ या संख्येचें वर्गमूळ आहे·

जीं लाग्रतंमें कामांत फार उपयोगी आहेत त्यांस अशा भूमितिश्रेढीशीं संबद्ध केलीं कीं जा श्रेणीचीं पदें दशगुण वाढतात, असें पूर्व तीनश्रेणींतील शेवटील कोष्टक; आणि सांप्रत बहुत करून पुस्तकांत जे लाग्रतंम कोष्टक आहेत ते अशारीतीनेंच उत्पन्न केलेले आहेत· याजातीचे लाग्रतंमाचें प्रसिद्ध चिन्ह हेंच आहे कीं १० याचा घातप्रकाशक अथवा लाग्रतंम १ आहे; १०० यांचे २, १००० यांचे ३, इत्यादि· आणि दशांशामध्यें ·१ याचें लाग्रतंम = -१ आहे, ·०१ याचें लाग्रतंम -२ आहे; ·००१ याचें लाग्रतंम -३ आहे, इत्यादि· कशींहि लाग्रतंमें उत्पन्न केलीं तरी त्या सर्वांत एकाचें लाग्रतंम ० शून्य आहे· यापासून निघतें कीं कोणती ही संख्या जी १ आणि १० यांचे मध्यें आहे तीचें लाग्रतंम ० आणि काहीं

अपूर्णांक

अपूर्णांक अवयव होतील. तसें १० आणि १०० यांचे मधील कोणत्येही संख्येचें लाग्रतंम १ आणि कांहीं अपूर्णांक अवयव होतील. याप्रमाणें पुढेंही. आणि हें लाग्रतंमाचे पूर्णांक ह्मणजे ज्यांस लाग्रतंम प्रकाशक ह्मणतात ते स्वल्पानें कळतात, याजकरितां पुस्तकांत लिहिले नाहींत, परंतु काम करित्ये समयीं व्यवहारांत घेतात.

लाग्रतंमाचा दुसरा व्याख्याप्रकार हाच आहे कीं कोणत्येही संख्येचें लाग्रतंम दुसर्ये कोणत्येही संख्येचे घातप्रकाशकाचे बरोबर आहे, जा संख्येचा घात यासांगीतल्ये संख्येचे बरोबर आहे; ह्मणजे, जर न = $र^{न}$, तर नहें नचें लाग्रतंम आहे; यांत न धन किंवा ऋण अथवा शून्य असेल, आणि रमूळ कोणतीही संख्या असेल, जशारीतीनें लाग्रतंम कामांत आणविलें. जेव्हां न = ०, तेव्हां न = १ आहे, रमूळाची कशीही किमत असो; हें दाखविनें, कीं १ चें लाग्रतंम सर्वदा सर्वलाग्रतंमाचे जातीमध्यें = ० आहे, जेव्हां न = १, तेव्हां न = र आहे; यापासून दिसतें कीं रमूळ सर्वदा तीसंख्या आहे, जीचें लाग्रतंम = १ आहे सर्वलाग्रतंम रीतींमध्यें. जेव्हां रमूळ = २·७१८२८१८२८४५९ इत्यादि आहे तेव्हां हेपरबलेंत न संख्यांचीं लाग्रतंमें न प्रकाशक आहेत; ह्मणोन न संख्या अथवा $(२·७१८ इत्यादि)^{न}$ याचें हेपरबलिक लाग्रतंम सर्वदा न आहे.

परंतु जेव्हां रमूळ = १० आहेत, तेव्हां न संख्येचें सामान्य लाग्रतंम न प्रकाशक होतो; अशारीतीनें कोणतीही संख्या $१०^{न}$,

अथवा

अथवा न चें सामान्य लाग्रतंम नप्रकाशक आहे; ह्मणोन १० च्या तोच घात जो सांगीतल्ये संख्येचे बरोबर आहे· ह्मणोन १०० हा १० चा वर्ग आहे, याजकरितां त्यांचें लाग्रतंम = २ आहे; आणि १००० हा १० चा घन आहे, याजकरितां त्यांचें लाग्रतंम = ३ आहे· यापासूनही, जर $५० = १०^{१·६९८९७}$ तेव्हां ५० चें सामान्य लाग्रतंम = १·६९८९७ हें आहे· आणि सामान्यतः या पदांमध्यें

ह्मणजे $१०^{४}$, $१०^{३}$, $१०^{२}$, $१०^{१}$, $१०^{०}$, $१०^{-१}$, $१०^{-२}$, $१०^{-३}$, $१०^{-४}$;

अथवा १००००, १०००, १००, १०, १, ·१, ·०१, ·००१, ·०००१,

यांचीं अनुक्रमें लाग्रतंमें } ४, ३, २, १, ०, −१, −२, −३, −४;

आणि ही रीति पूर्वसांगीतल्ये रीतीप्रमाणेंच आहे·

कृत्य

१, २, ३, ४, ५ इत्यादि, यांतून कोणत्येही स्वाभाविक संख्येचें लाग्रतंम काढायाचें·

प्रथम रीति·

१, १०, १००, १०००, १००००, इत्यादि, ही भूमितिश्रेणी घे, आणि

०, १, २, ३, ४, इत्यादि, ही गणितश्रेणी त्या भूमितिश्रेणीस लाग्रतंमा करितां घे· नंतर १ आणि १० अथवा १० आणि १०० अथवा श्रेणींतील कोणत्येही त्या दोन संनिध पदांचें भूमितिमध्यप्रमाण काढ· जांचे मध्यें इछिली संख्या आहे· यारीतीनेंही, काढिलेलें भूमिति मध्यप्रमाण

आणि

आणि त्याचे अवळचें शेवटपद हीं घेउन त्यांचें दुसरें भूमिति मध्यप्रमाण काढ; आणि याप्रमाणें पुढेंही, ज्याचें लाग्रतंम इछिलें आहे तेंपद निघेपर्यंत. अशीं जितकीं भूमिति मध्यप्रमाण पदें काढिलीं, तशीं तितकीं गणितश्रेढीचीं गणितमध्यप्रमाणपदें काढ ह्मणजे तीं त्या भूमितिमध्यप्रमाणपदांचीं अनुक्रमें लाग्रतंमें होतील.

उदाहरण

९ या संख्येचें लाग्रतंम काढायास इछिलें आहे.

एथे इछिली संख्या १ आणि १० यांचे मध्यें आहे, तेव्हां

प्रथम १० च्या लाग = १ आणि १ च्या ला = ०

याजकरितां $(१+०) \div २ = \frac{१}{२} = \cdot५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१०\times१} = \sqrt{१०} = ३\cdot१६२२७७७$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

याजकरितां ३·१६२२७७७ यांचें लाग्रतंम = ·५ आहे.

दुसर्यानें १० च्या ला = १ आणि ३·१६२२७७७ च्या ला = ·५

याजकरितां $(१+\cdot५) \div २ = \cdot७५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१०\times३\cdot१६२२७७७} = ५\cdot६२३४१३२$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

ह्मणोन ५·६२३४१३२ च्या ला = ·७५ आहे.

तिसर्यानें १० च्या ला = १ आणि ५·६२३४१३२ च्या ला = ·७५

याजकरितां $(१+\cdot७५) \div २ = \cdot८७५$ हें गणितमध्यप्रमाण आहे.

आणि $\sqrt{१०\times५\cdot६२३४१३२} = ७\cdot४९८९४२२$ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे.

ह्मणोन ७·४९८९४२२ च्या ला = ·८७५ आहे

चौथ्यानें

चौथ्यानें १० चा ला = १ आणि ७·४९८९४२२ चा ला = ·८७५

याजकरितां (१+·८७५) ÷ २ = ·९३७५ हें गणितमध्यप्रमाण आहे·

आणि $\sqrt{१०\times७·४९८९४२२}$ = ८·६५९६४३१ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे·

ह्मणोन ८·६५९६४३१ चा ला = ·९३७५ आहे

पांचव्यानें १० चा ला = १ आणि ८·६५९६४३१ चा ला = ·९३७५

याजकरितां (१+·९३७५) ÷ २ = ·९६८७५ हें गणितमध्यप्रमाण आहे·

आणि $\sqrt{१०\times८·६५९६४३१}$ = ९·३०५७२०४ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे·

ह्मणोन ९·३०५७२०४ चा ला = ·९६८७५

साहाव्यानें ८·६५९६४३१ चा ला = ·९३७५ आणि ९·३०५७२०४ चा ला = ·९६८७५

याजकरितां (·९३७५+·९६८७५) ÷ २ = ·९५३१२५ हें गणितमध्यप्रमाण आहे

आणि $\sqrt{८·६५९६४३१\times९·३०५७२०४}$ = ८·९७६८७१३ हें भूमितिमध्यप्रमाण आहे·

ह्मणोन ८·९७६८७१३ चा ला = ·९५३१२५ आहे

यारीतीनें पुढेंही करून, पंचवीस पर्याय झाल्यावर उत्पन्न होतें कीं ८·९९९९९९८ चा ला = ·९५४२४२५ हा आहे ; आतां ही संख्या आणि ९ यांत अंतर थोडें आहे ह्मणोन हेंच लाग्रतंम ९ संख्येचें कामांत घेतात·

दुसरी रीति

जीचें लाग्रतंम इछिलें आहे ती संख्या दारवबायास ब घे ; आणि ती-च ब संख्या एकानें उणी दारवबायास अ घे, ह्मणजे असें कीं, ब−अ=१, आतां अ संख्येचें लाग्रतंम कळलें आहे ; आणि अ+ब ही बेरीज दारवबायास स घे·

१. तेव्हां ·८६८५८८९६३८ इत्यादि, या दशांशांस सचे किमतीनें भाग, आणि जो भागाकार येईल तो संभाळ; नंतर संभाळिल्ये भागाकारास सचे वर्गानें भाग, आणि भागाकार येईल तो पूर्ववत् संभाळ; पुनः या दुसर्ये भागाकारास सचे वर्गानें भाग, आणि भागाकार येईल तो पूर्वप्रमाणें संभाळ; आणि याप्रमाणेंच पुढें करीत चाल, ह्मणजे उत्तरोत्तर भागाकार सचे वर्गानें भागावे, पुढें भागाकार येईना पर्यंत.

२. तेव्हां हे सर्व भागाकार अनुक्रमें एकाखालीं एक लिहि, ह्मणजे पहिला भागाकार वर लिहि, आणि दुसरा आदिकरून अनुक्रमें त्याचे खालीं; नंतर त्यांस अनुक्रमें १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकानीं भागाकार येतोपर्यंत अनुक्रमें भाग, ह्मणजे पहिल्ये संभाळलेल्ये भागाकारास एकानें भाग, दुसर्यास तिहिंनीं, तिसर्यास पांचानीं, चौथ्यास सातांनीं, इत्यादि रीतीनें पुढेंही.

३. या शेवटीं निघालेल्ये सर्व भागाकारांची बेरीज घे, नंतर ही बेरीज ब÷अ याचें लाग्रतंम आली; याजकरितां या लाग्रतंमांत ब पेक्षां एक उणी संख्या अचें लाग्रतंम सांगीतलें आहे तें मेळीव, ह्मणजे ही शेवटील बेरीज इछिल्ये ब संख्येचें लाग्रतंम होईल. अथवा बच्या लाग = अच्या ला + $\frac{\text{न}}{\text{स}} \times \left(१ + \frac{१}{३\text{स}^{२}} + \frac{१}{५\text{स}^{४}} + \frac{१}{७\text{स}^{६}} + \text{इत्यादि}\right)$ यांत न = ·८६८५८८९६३८ इत्यादि

उदाहरणें

प्रथम, २ या संख्येचें लाग्रतंम इछिलें आहे.

एथे इछिली संख्या २ = ब, त्यापेक्षां एकानें उणी संख्या १ = अ, या

संख्येनें

संख्येचें लायतंम ० शून्य आहे, आणि २ + १ = ३ = स आहे, आणि याचा ~~वर्ग~~ स^{२} = ९ आहेत, तेव्हां याप्रमाणें कामहोईल·

३) ·८६८५८८९६४	१) ·२८९५२९६५४	(	·२८९५२९६५४
९) ·२८९५२९६५४	३) ३२१६९९६२	(	१०७२३३२१
९) ३२१६९९६२	५) ३५७४४४०	(	७१४८८८
९) ३५७४४४०	७) ३९७१६०	(	५६७३७
९) ३९७१६०	९) ४४१२९	(	४९०३
९) ४४१२९	११) ४९०३	(	४४६
९) ४९०३	१३) ५४५	(	४२
९) ५४५	१५) ६१	(	४
९) ६१			

$\frac{२}{१}$ चें ला = ·३०१०२९९९५

१ चें ला = ·०००००००००

२ चें ला = ·३०१०२९९९५

दुसरें, ३ यासंख्येचें लायतंम काढायास इछिलें आहे·

एथे इछिली संख्या ३ = ब, त्यापेक्षां एकानें उणी संख्या २ = अ, त्यांची बेरीज अ + ब = स = ५, याचा वर्ग स^{२} = २५, तेव्हां याप्रमाणें काम होईल·

५) ·८६८५८८९६४	१) ·१७३७१७७९३	(	·१७३७१७७९३
२५) ·१७३७१७७९३	३) ६९४८७१२	(	२३१६२३७
२५) ६९४८७१२	५) २७७९४८	(	५५५९०
२५) २७७९४८	७) ११११८	(	१५८८
२५) ११११८	९) ४४५	(	५०
२५) ४४५	११) १८	(	२
२५) १८			

$\frac{३}{२}$ चें ला = ·१७६०९१२६०

२ चें ला = ·३०१०२९९९५

३ चें ला = ·४७७१२१२५५

तेव्हां या कारणास्तव संख्यांचे लाग्रतंमांची बेरीज त्या संख्यांचे गुणाकाराचे लाग्रतंमा बरोबर आहे; आणि त्या लाग्रतंमांची वजाबाकी त्या संख्यांचे भागाकाराचे लाग्रतंमाचे बरोबर आहे· तर पूर्व दोन काढिलेलीं लाग्रतंमें आणि १० चें लाग्रतंम यांपासून बहुतेक दुसरीं लाग्रतंमें उत्पन्न होतील· असें या पुढील उदाहरणांत सांगतो·

तिसरें उदाहरण·

यास्तव २ × २ = ४, याजकरितां

२ चें ला · · · = ·३०१०२९९९५ $\frac{२}{३}$

यांत २ चें ला · · · = ·३०१०२९९९५ $\frac{२}{३}$

मिळवून बेरीज ४ चें ला · · = ·६०२०५९९९१ $\frac{१}{३}$

चौथें उदाहरण·

यास्तव २ × ३ = ६ याजकरितां

२ चा ला = ·३०१०२९९९५

यांत ३ चा ला = ·४७७१२१२५५

मिळवून बेरीज ६ चा ला = ·७७८१५१२५०

पांचवें उदाहरण·

यास्तव $२^{३}$ = ८ याजकरितां

२ च्या ला	=	·३०१०२९९९५ $\frac{२}{३}$
		३
यास ३ नीं गुणून		
८ च्या ला	=	·९०३०८९९८७

साहावें उदाहरण·

यास्तव $३^{२}$ = ९ याजकरितां

३ च्या ला	=	·४७७१२१२५४ $\frac{७}{१०}$
		२
यास २ नीं गुणून		
९ च्या ला	=	·९५४२४२५०९

सातवें उदाहरण

यास्तव $\frac{१०}{२}$ = ५ याजकरितां

१० च्या ला	=	१·०००००००००
यांतून २ च्या ला	=	·३०१०२९९९५ $\frac{२}{३}$
वजा करून बाकी ५ च्या ला·	} =	·६९८९७०००४ $\frac{१}{३}$

आठवें

आठवें उदाहरण

यास्तव ३ × ४ = १२ याजकरितां

३ च्या ला	= ·४७७१२१२५५
यांत ४ च्या ला	= ·६०२०५९९९१
मिळवून १२ च्या ला	= १·०७९१८१२४६

आणि या सामान्यरीती प्रमाणें पुनः पुनः हिंसाब करून दुसर्या संख्या ७, ११, १३, १७, १९, २३, इत्यादि, यांचीं लाग्रतंमें निघतील, नंतर गुणाकारानें आणि भागाकारानें त्यांत दुसरीं कोणतीं ही लाग्रतंमें काढितां येतील, अथवा कोष्टकांत लाग्रतंमें लिहिलीं आहेत तीं शुद्ध करितां येतील. ※

लाग्रतंम कोष्टक कामांत घेण्याची रीति

एकापेक्षां अधिक संख्यांचीं लाग्रतंमें काढायाचा रीति पूर्वी सांगीतल्या; आतां अपूर्ण पदांचीं लाग्रतंमें कशीं काढावीं हें दाखवायाचें आहे. या कामाकरितां पाहिलें पाहिजे कीं पूर्णांकांन भूमितिश्रेणीचीं पदें उजव्येकडून डाव्येकडे एकापासून वाढत आतात, तशीं अपूर्णांकांत डाव्येकडून उज-

※ याशिवाय दुसर्या अनेक युक्तींनीं गणितज्ञ लाग्रतंमें काढितात; परंतु त्या युक्ती गणिताचे बहु ग्रंथांचे अतिअभ्यासा वांचून समजांन येणार नाहींत, याजकरितां त्या एथे लिहिल्या नाहींत.

व्येकडे

व्येकडे एकापासून उतरत जातात· परंतु या शेवटीलांचें लाग्रतंम पूर्वप्रमाणेंच आहे; त्यांत इतकाच भेद कीं हें ऋण आहे· यांतून दिसतें कीं १० चें ला = +१ आहे, तशेरीतीनें $\frac{१}{१०}$ अथवा ·१ याचें ला −१ आहे; आणि १०० चें ला = +२ आहे, आणि $\frac{१}{१००}$ अथवा ·०१ याचें ला = −२ आहे; आणि असेंच पुढेंही·

यापासून प्रकट होतें कीं सामान्यतः सरूपसर्वसंख्या पूर्णांक अथवा अपूर्णांक किंवा मिश्र आहेत, तथापि त्यांचे लाग्रतंमांचे दशांशस्थळींचे अंक सरूपच आहेत, लाग्रतंम प्रकाशकांत मात्र भेद आहे· आणि हा प्रकाशक धन किंवा ऋण होईल जसें त्या संख्येचे प्रथम अंकाचें स्थळ आहे, दशांशस्थळींचे अंक सर्वदा धनच आहेत·

जसें २६५१ याचें लाग्रतंम = ३·४२३४१० तर त्या संख्येचा $\frac{१}{१०}$ अथवा $\frac{१}{१००}$ किंवा $\frac{१}{१०००}$ इत्यादिचें लाग्रतंम पुढें प्रमाणें होईल·

संख्या	लाग्रतंम.
२६५१	३·४२३४१०
२६५·१	२·४२३४१०
२६·५१	१·४२३४१०
२·६५१	०·४२३४१०
·२६५१	−१·४२३४१०
·०२६५१	−२·४२३४१०
·००२६५१	−३·४२३४१०

यांत दिसतें, संख्येंत जितकीं पूर्णांक स्थळें आहेत त्यांहून एक उणा प्रकाशक होतो, अथवा, एकंचें स्थळ सोडून तेथून डावेकडे अथवा उजवे

कडे

कडे संख्येचा प्रथम अंक किती स्थळांवर आहे तितके स्थळांचा संख्याक प्रकाशक होतो; हा प्रकाशक सर्वदा लाग्रतंमाचे दशांशचिन्हाचे डावेकडे लिहावा.

सांगीतल्ये संख्येंत जेव्हां पूर्णांक आहेत तेव्हां प्रकाशक धन होतो. जेव्हां संख्येंत पूर्णांक नाहींत तेव्हां प्रकाशक ऋण होतो, त्याचें चिन्ह प्रकाशकाचे वर अथवा डावे कडे लिहितात. जसे आ संख्येंत १, २, ३, ४, ५ तशीं पुढें पूर्णांक स्थळें आहेत, त्या संख्यांचे प्रकाशक ०, १, २, ३, ४ हे आहेत; ह्मणजे पूर्वीं सांगीतल्या प्रमाणें एक अंक उणा करून प्रकाशक होतो; आणि संख्येंत अपूर्णांक आहेत तेव्हां त्याचा प्रथम

प्रथम द्वित तृत्य चर्थ
१ , २ , ३ , ४ अंक पुढें दशांशस्थळें आहेत त्याचा प्रकाशक सर्वदा तें
-१ -२ -३ -४ कित्यावें स्थळ हें दाखवितो

या समयीं स्मरणांत असावें, जरीं प्रकाशक ऋण आहे, तरीं सर्वदा लाग्रतंम अपूर्णांक धन आहेत.

कोष्टकांतून कोणत्येही संख्येंचें लाग्रतंम काढावयाची रीति

पहिली, जेव्हां संख्या १०० चे आंत आहे, अथवा, संख्येंत अंकस्थळें दोन आहेत, तेव्हां लाग्रतंम कोष्टकपत्राचे प्रथम पृष्ठावर त्या संख्येचें लाग्रतंम प्रकाशकसुद्धां लौकर मिळतें. जसें ५ या संख्येचें लाग्रतंम ०.६९८९७० आणि २३ या संख्येचें लाग्रतंम १.३६१७२८ आणि ५० या संख्येचे लाग्रतंम १.६९८९७० याप्रमाणें स्पष्ट आहे.

दुसरी

दुसरी, जेव्हां संख्या १०० हून अधिक ती १०००० चे आंत आहे. अथवा संख्येंत तीन अथवा चार अंकस्थानें आहेत, तेव्हां लाग्रतंम कोष्टकपत्रकांत संख्या शब्दाचे खालीं तीन तीन अंकाच्या ओळी आहेत. त्यांत ते अंक पाहून त्या अंकाचे समोर लाग्रतंम लिहिलें आहे तें घ्यावें. संख्येंत चौथा अंक असल्यास संख्या शब्दाचे समोर जे अंक आहेत त्यांत तो अंक पाहून त्या अंका खालीं पूर्व तीन अंकांचे समोरील कोष्टकांतले अंक घेऊन त्यांस शून्याखालचे ओळींत दोन अंक अधिक आहेत त्यांत या कोष्टकावरचे पाहून ते दोन अंक प्रथम लाउन त्यांचे मागें दशांश चिन्ह द्यावें; आणि पूर्वरीती प्रमाणें प्रकाशक लिहावा, तें त्या संख्येचें प्रकाशकसुद्धां लाग्रतंम जालें. जसें २५१ या संख्येचें लाग्रतंम २.३९९६७४ हें आहे, ह्मणजे कोष्टकांत दशांश ३९९६७४ निघतात त्यांचा प्रकाशक २ हा अंक केला. याचें कारण संख्येंत पूर्णांकस्थळें ३ आहेत. आणि ३४.०९ या संख्येचें लाग्रतंम १.५३२६२७ हें आहे, ह्मणजे ५३२६२७ हे दशांश कोष्टकांतून निघाले, त्यांचा प्रकाशक १ केला; कारण, पूर्णांकस्थळें २ आहेत.

तिसरी; जेव्हां संख्येंत अंकस्थळें चोहोंपेक्षां अधिक आहेत तेव्हां प्रथम चारस्थळींचे अंकांचें लाग्रतंम पूर्वरीतीनें काढावें; आणि त्याचे जवळचें अधिक लाग्रतंम घेउन त्या दोन लाग्रतंमांची व त्यांचे दोन संख्यांची वजाबाकी करून दोन बाक्या काढाव्या; नंतर याप्रमाणें त्रिराशि तपशील करावा.

जशी दोन संख्यांची वजाबाकी

त्यांचे दोन लाग्रतमांचे वजाबाकीस होत्ये

तसा संख्येतील बाकी राहिला अंक

त्याचे लाग्रतमास प्रमाण होतो

आतां हें इछाफळ लाग्रतम पूर्वदोन लाग्रतमांत जें लाहान आहे त्यांत मिळवून बेरीज घ्यावी, ही बेरीज सांगीतल्ये सर्वसंख्येचें लाग्रतम जाली

उदाहरण

३४०९२६ या संख्येचें लाग्रतम काढावयाचें

३४०९०० या संख्येचे लाग्रतम = ५३२६२७

३४१००० या संख्येचे लाग्रतम = ५३२७५४

वजा १०० बाकी आणि वजा १२७ बाकी

तेव्हां जसे १०० : १२७ :: २६ : ३३ इछाफळ

हें इछाफळ ३३ लाग्रतम ५३२६२७ यांस मिळवावें = ५३२६६० हें ३४०९२६ या संख्येचें लाग्रतम आलें

चौथें, जेव्हां संख्येंत कांहीं पूर्णांक आणि कांहीं अपूर्णांक अथवा सर्व अपूर्णांकच आहेत तेव्हां दशांश चिन्ह नाहिं असें मनांत आणून पूर्वरीतीनें लाग्रतम काढावें नंतर पूर्णांक अपूर्णांकरीतीनें प्रकाशक धन अथवा ऋण येईल तसा लिहावा

पांचवें, जेव्हां संख्या व्यवहारी अपूर्णांक समजाति आहे, तेव्हां अंश आणि छेद यांचें लाग्रतम वेगळालें काढून छेदाचें लाग्रतम

अंशाचे

अंशांचे लाग्रतंमांत वजा करून बाकी काढावी; ही बाकी दशांशांचें लाग्रतंम आहे. याजकरितां प्रकाशक ऋण होईल.

साहावी. जेव्हां संख्या भागानुबंधपूर्णांक आहे, तेव्हां त्या भागानुबंधपूर्णांकास विषम अपूर्णांकाचें रूप देउन अंशछेदांचें लाग्रतंम काढून पूर्वप्रमाणें वजाबाकी करावी.

उदाहरणें

प्रथम $\frac{३७}{९४}$ यांचें लाग्रतंम काढावयाचें.

अंश ३७ यांचा लाग = १·५६८२०२

छेद ९४ यांचा लाग = १·९७३१२८

$\frac{३७}{९४}$ यांचा लाग = $\overline{१}$·५९५०७४ हें उत्तर.

दुसरें. १७ $\frac{१४}{२३}$ यांचे लाग्रतंभ काढावयाचें.

आतां १७ $\frac{१४}{२३}$ = $\frac{४०५}{२३}$ तेव्हां

अंश ४०५ यांचा लाग = २·६०७४५५

छेद २३ यांचा लाग = १·३६१७२८

१७ $\frac{१४}{२३}$ यांचा लाग = १·२४५७२७ आला हें उत्तर

सांगीतल्ये लाग्रतंमापासून संख्या काढावयाची रीति.

ही संख्या कोष्टकापासून पूर्वींचे उलट मार्गानें उत्पन्न होत्ये, ह्मणून सांगितलें लाग्रतंम कोष्टकांत शोधून त्याची संख्या काढावी; नंतर वर सांगीतल्याप्रमाणें प्रकाशकावरून त्या संख्येंत दशांशचिन्ह करावें, ह्मणजे

ती

ती संख्या उत्पन्न जाली.

उदाहरणें याप्रमाणें

लायतंम १·५३२८८२ यापासून संख्या = ३४·११ उत्पन्न जाली.

लायतंम -१·५३३८८२ यापासून संख्या = ·३४११ उत्पन्न जाली.

परंतु जें लाग्रतंम सांगीतल्या बरावर कोष्टकांत मिळतनाहीं तेव्हां त्या लाग्रतंमाहून कांहीं उणें व कांहीं अधिक ऐशीं दोन लाग्रतंमें कोष्टकांतून काढून व त्या दोहोंचा संख्या कोष्टकांतून काढून त्यांची वजाबाकी करावी आणि त्यांतील उनतर लाग्रतंम सांगीतल्ये लायतंमांत वजा करून बाकी काढावी; नंतर याप्रमाणें त्रिराशि तपशील करावा.

जशी दोन कोष्टकांतील लायतंमांची वजाबाकी.

त्यांचे संख्यांचे वजाबाकीस होत्ये.

तशी सांगीतलें व उनतर लाग्रतंम यांची वजाबाकी.

तिचे संख्येस प्रमाण होत्ये.

आतां हें इछाफळ उनतर संख्येस मिळवावें. ती बेरीज सांगीतल्ये लाग्रतंमाची संख्या होईल.

उदाहरण

सांगीतलें लाग्रतंम १·५३२७०८ याची संख्या काढावयाची.

आतां सांगीतल्ये लाग्रतंमाहून जवळचें अधिकतर व उनतर लाग्रतंमें कोष्टकांत पुढें सांगतो याप्रमाणें आहेत.

अधिकतर

अधिकतर	५३२७५४	साची संख्या	३४१०००	सांगीतलें लाग्रतंम	५३२७०८
	५३२६२७		३४०९००		५३२६२७.
	१२७		१००		८१

तरअसे १२७ : १०० : : ८१ : ६४ हे इछाफळ.

तेव्हां हे ६४ उनतर संख्येस मिळवून पूर्वी सांगीतल्ये रीतीनें प्रकाशका-प्रमाणें दशाशचिन्ह द्यावें ह्मणजे सांगीतल्ये लाग्रतंमाची संख्या ३४०९६४ जाली·

जर प्रकाशक ऋण असोन लाग्रतंम या प्रमाणेंच आहे–१·५३२७०८ तर त्याची संख्या ·३४०९६४ याप्रमाणें होईल·

लाग्रतंमानें गुणाकार करावयाची रीति

गुण्य आणि गुणक यांचीं लाग्रतंमें कोष्टकांतून काढून त्यांची बेरीज घ्यावी· ह्मणजे ती बेरीज गुणाकाराचें लाग्रतंम जाली नंतर ह्या बेरिजेपासून पूर्व रीतीनें संख्या काढावी· ती संख्या गुणाकार होईल·

लाग्रतंम दशांशांची बेरीज घेत्ये समयीं शेवटीं हातीं अंक येईल तो धन आहे याजकरितां प्रकाशक धन असल्यास त्यांत तो हातचा मिळवून प्रकाशक ल्याहावा, तो प्रकाशक धन होईल· कदाचित् प्रकाशक ऋण असल्यास तो हातचा अंक त्यांत वजा करून बाकी राहील ती ऋण प्रकाशक ल्याहावा, हातची बाकी राहील तर ती धन, आणि प्रकाशक बाकी

राहील

राहील तर तो ऋण अथवा धन असेल त्याप्रमाणें लिहावा.

उदाहरणें

प्रथम २३·१४ यांस ५·०६२ याणीं गुण

संख्या		लाग
गुण्य २३·१४	=	१·३६४३६३
गुणक ५·०६२	=	०·७०४३२२
गुणाकार ११७·१३४७	=	२·०६८६८५

दुसरें २·५८१९२६ यांस ३·४५७२९१ याणीं गुण.

संख्या		लाग
गुण्य २·५८१९२६	=	०·४११९४४
गु०क ३·४५७२९१	=	०·५३८७३६
गु०र ८·९२६४८	=	०·९५०६८०

तिसरें ३·९०२ आणि ५९७·१६ आणि ·०३१४७२८ हे परस्पर गुणून गुणाकार सांग.

संख्या		लाग
३·९०२	=	०·५९१२८७
५९७·१६	=	२·७७६०९१
·०३१४७२८	=	-२·४९७९३५
गुणाकार ७३·३३५३	=	१·८६५३१३

टीप एथे ऋण -२ आहेत ते धन दोहोंस रद करितात, तेव्हां हातचा १ तो धन लिहिला.

चवथें ३·५८६ आणि २·१०४६ आणि ०·८३७२ आणि ०·०२९४ हे परस्पर गुणून गुणाकार सांग.

संख्या

संख्या		लाग
३·५८६	=	०·५५४६१०
२·१०४६	=	०·३२३१७०
०·८३७२	=	−१·९२२८२९
·०·०२९४	=	−२·४६८३४७
गुणाकार ०·१८५७६१८	=	−१·२६८९५६

टीप· एथे हातचे आले २ ते भाजक प्रकाशक ऋण −२ आहेत त्यांणी रद केले, तेव्हां ऋण −१ बाकी राहिला तो लिहिला·

लाग्रतंमानें भागाकार करावयाची रीति

भाज्याचे लाग्रतंमांत भाजकाचें लाग्रतंम वजाकरून बाकी राहील ती भागाकाराचें लाग्रतंम होईल· त्यापासून जी संख्या निघेल तो भागाकार आहाला·

भाजकाचे प्रकाशकाचें रूप बदल करावें, ह्मणजे धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावें; परंतु दशांशवजाबाकीचे शेवटास हातचा अंक असल्यास तो धनच आहे तेव्हां भाजकप्रकाशक धन असल्यास त्यांत मेळवून मग रूप बदल करावें· तसें ऋण असल्यास हातचा अंक असेल तितका भाजकप्रकाशक रद करून प्रकाशकाची बाकी राहील तीचें रूप बदल करावें· भाज्यभाजकांचे प्रकाशक वर सांगीतल्या प्रमाणें बदल करून समानजाति आल्यास मिळवून ल्याहावे· भि-

नजाति·

न्जाति आल्यास जितके ऋण असतील तितके धन रद्द करून बाकी राहील ती ऋण धन पाहून लिहावी·

उदाहरणें

प्रथम २४१६३ हे भाज्य ४५६७ या भाजकानीं भाग·

संख्या		लाग
भाज्य २४१६३	=	४·३८३१५१
भाजक ४५६७	=	३·६५९६३१
भागाकार ५·२९०७८	=	०·७२३५२०

दुसरें ३७·१४९ हे भाज्य ५२३·७६ या भाजकानीं भाग·

संख्या		लाग
भाज्य ३७·१४९	=	१·५६९९४७
भाजक ५२३·७६	=	२·७१९१३२
भागाकार ·०७०९२७५	=	−२·८५०८१५

तिसरें ·०६३१४ हे भाज्य ·००७२४१ या भाजकानीं भाग·

संख्या		लाग
भाज्य ·०६३१४	=	−२·८००३०५
भाजक ·००७२४१	=	−३·८५९७९९
भागाकार ८·७१९७९	=	०·९४०५०६

एथें

एथें दशांशवजावाकीचे शेवटास हातच्या १ तो धन त्याणें ऋण −३ तून १ रद्द केला तेव्हां बाकी −२ राहिले ते बदल करितां धन आले ते भाज्याचे ऋण −२ नीं रद्द केले, म्हणून प्रकाशक ० लिहिलें·

चवथें ·७४३८ हे भाज्य १२·९४७६ या भाजकानीं भाग·

	संख्या		लाग
भाज्य	·७४३८	=	−१·८७११४५६
भाजक	१२·९४७६	=	१·११२११८९
भागाकार	·०५७४४७	=	−२·७५९२६७

एथें भाजकेंप्रकाशक धन आहे तो बदल करून समानजाति भाज्यभाजक जाले· त्यांची बेरीज करून लिहिले·

टीप·

त्रिराशींत सम व्यस्त पाहून कल्पिल्ये गुण्य गुणकांचे लाग्रतंमांची बेरीज घेउन त्यांत भाजक लाग्रतंम वजा करावें बाकी राहील तें इछाफळाचें लाग्रतंम आलें, त्यापासून जी संख्या निघेल तें इछाफळ होय·

लाग्रतंमानें वर्गादिक करावयाचें

ज्या संख्येचें वर्गादिक करावयाचें त्या संख्येचें लाग्रतंम त्या वर्गादिकाचे प्रकाशकानीं गुणावें· तो गुणाकार त्या वर्गादिकाचें लाग्रतंम जालें नंतर त्याची संख्या काढावी· ती संख्या वर्गादिक होईल·

टीप· जेंव्हां लाग्रतंमप्रकाशक ऋण आहे आणि घनप्रकाशक

धन

धन आहे तेव्हां गुणाकार ऋण होईल; परंतु लाग्रतंम दशांश गुणाकार मेळवणीचे शेवटास हातचा अंक असेल तो धन आहे तेव्हां तो ऋण प्रकाशक गुणाकारांत वजा करून बाकी राहील ती ऋण अथवा धन असेल ती पाहून तशी लिहावी·

उदाहरणें

प्रथम· २·५७९१ यांचा वर्गकर·

संख्या	लाग
मूळ २·५७९१ · · · · · · ·	०·४११४६८
वर्गप्रकाशक · · · ·	२
वर्ग ६·६५१७४ · · · · · · ·	०·८२२९३६

दुसरें· ३·०७१४६ यांचा घनकर·

संख्या	लाग
मूळ ३·०७१४६ · · · · · · ·	०·४८७३४५
घनप्रकाशक · · · · ·	३
घन २८·९७५८ · · · · · · ·	१·४६२०३५

तिसरें· ·०१९६३ यांचा चतुर्घातकर·

संख्या	लाग
मूळ ·०१९६३ · · · · · · ·	−२·९६२०३८
घनप्रकाशक · · · · ·	४
चतुर्घात ·००००७०४९४ · · · · · ·	−५·८४८१५२

टीप-

टीप· एथे हातचे ३ धन आहेत तेव्हां प्रकाशक −२×४ = −८ त्यां-त धन ३ आहेत ते वजाकरून बाकी राहिले −५ ते लिहिले·

−दुवथें १·००४५ यांचा ३६५ घातकर·

संख्या		लाग
मूळ १·००४५	· · · · · · ·	०·००१९५०
	घनप्रकाशक · · ·	३६५
		९७५०
		११७००
		५८५०
३६५ घात ५·१४९३२	· · · · ·	७११७५०

लाग्रतंमानें वर्गादिमूळ काढावयाचें·

दिल्ये संख्येंचें लाग्रतंम काढावें·

हें लाग्रतंम मूळप्रकाशकानीं भागावें, तें भागाकाराचें लाग्रतंम आलें; नंतर त्याची संख्या काढावी, ती संख्या वर्गादिमूळ होईल·

टीप· जेव्हां लाग्रतंम प्रकाशक भाज्यस्थळीं ऋण आहे आणि तो भाजकानीं निःशेष उडतनाहीं तेव्हां जितके अंकानीं वाढविला असतां निःशेष उडेल तितके अंकानीं वाढवून भागावा; नंतर वाढविले अंक तेव्हढे दशक पुढील दशांशांत प्रथम स्थळावर अंक आहे त्यांत मेळवून भाजकानीं भागावा· याप्रमाणें पुढें करीत जावें·

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम ३६५ यांचें वर्गमूळ काढ.

	संख्या	लाग
वर्ग	३६५	२) २.५६२२९३
मूळ	१९.१०४९६	१.२८११४६ $\frac{१}{२}$

दुसरें १२३४५ यांचें घनमूळ काढ.

	संख्या	लाग
घन	१२३४५	३) ४.०९१४९१
मूळ	२३.१११६	१.३६३८३ $\frac{१}{३}$

तिसरें २ यांचें १० घातमूळ काढ.

	संख्या	लाग
१० घात	२	१०) ०.३०१०३०
मूळ	१.०७१७७३	०.०३०१०३

चवथें १.०४५ यांचें ३६५ घातमूळ काढ.

	संख्या	लाग
३६५ घात	१.०४५	३६५) ०.०१९११६
मूळ	१.०००१२१	०.००००५२ $\frac{१}{२}$

पांचवें

पांचवें √·०९३ यांचें काढ

	संख्या		लाग
वर्ग	·०९३	· · · ·	२)-२·९६८४८३
मूळ	·३०४९५९	· · · ·	-१·४८४२४१ $\frac{१}{२}$

टीप· या आगेवर भाजक २ ते भाज्य-२ होंत बराबर एकवेळ जातात ह्मणोन भागाकारस्थळीं प्रकाशक -१ लिहिला·

साहावें ∛·०००४८ यांचें काढ

	संख्या		लाग
घन	·०००४८	· · · ·	३)-४·६८१२४१
मूळ	·०७८२९७३	· · · ·	-२·८९३७४७

टीप· या आगेवर भाजक ३ ऋण-४ होंत बराबर नजात ह्मणोन २ वाढवून ६ केले त्यांत ३ बराबर २ वेळा गेले, तेव्हां वाढविले २ ते २ दशक त्यांस दशांश प्रथमस्थळींचे ६ मेळविनां २६ आले जांत ३ आठवेळ जातात· पुढें याचप्रमाणें करावें·

सातवें ३·१४१६×८२× $\frac{७३}{४१}$ लाग्रतंमानें कायहोतात·

आठवें ·०२९१६×७५१·३× $\frac{६}{२७१}$ लाग्रतंमानें कायहोतात·

नववें जसे ७२४१ : ३·५८ : : २०·४६ : लाग्रतंमानें कायहोतात·

दाहावें जसे √७२४ : √$\frac{५३}{१३}$: : ६·९२७ : ला०

PART III.

ELEMENTS OF GEOMETRY.

CONTENTS.

तिसरा भाग

भूमितीचें आदिकारण

अनुक्रमणिका

श्री

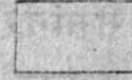
भूमिति·

व्याख्या·

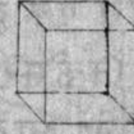
१ बिंदू ह्मणजे तोच होय· ज्यास स्थितिमात्र आहे· महत्व आणि माप नाहीं· ह्मणूनच त्यास लांबी रुंदी आणि जाडी नाहीं·

२ रेघ ह्मणजे तीच होय· जीस लांबी मात्र आहे· जाडी आणि रुंदी नाहीं·

३ पातळी ह्मणजे अवकाश अथवा दोन मापांची आकृति होय· तीं दोन मापें लांबी आणि रुंदी· परंतु जाडी वांचून·



४ पिंड अथवा भरींव ह्मणजे तीन मापांची आकृति होय· तीं मापें लांबी रुंदी आणि ओंडी अथवा उंची·



५ रेघा ह्मणजे त्याच होत· सरळ अथवा वांकडी किंवा मिश्र· मिश्र ह्मणजे सरळ आणि वांकडी या दोनीं जींत एकत्र मिळाल्या आहेत·

६ सरळरेघ तीच होय· जी एक शेवटापासून दुसऱ्ये शेवटाचे दिशेस समोर गेली आहे· अथवा दोन बिंदूमध्यें जी सर्वांहून लाहान अंतर मापिते·

जेव्हां पुढें कोठेही रेघ इतकेंच सांगेल तेव्हां तेथें सरळ रेघ जाणावी·

७ वांकडीरेघ तीच होय· जी एक शेवटापासून दुसऱ्ये शेवटाकडे समोर नगेली म्हणजे ती दिशा बदल करून गेली आहे·

८ रेघा त्याच होत· ज्या समांतर अथवा तिर्कस अथवा लंब अथवा स्पर्श आहेत·

९ समांतररेघा त्याच होत· ज्यांत लंबांतर सर्वत्र बराबर आहे· आणि कितीहि वाढविल्या तरीं एक दुसरीशीं मिळत नाहीं·

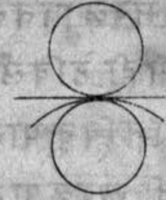
१० तिर्कसरेघा त्याच होत· ज्यांत अंतर अधीक उणें आहे· आणि उणें आहे तिकडे अधीक वाढविल्या असतां त्यांचीं टोंकें एकत्र मिळतात·

११ लंबरेघ तीच होय· जी सरळ रेघेवर उभी असतां तिचें शिर एक बाजूपेक्षां दुसऱ्ये

बाजूवर

बाजूवर अधीक झोंकत नाहीं· अथवा तिचे दो
हों बाजूकडील दोन कोन बराबर होतात·

१२ स्पर्शरेघ अथवा स्पर्शवर्तुळ तेंच होय·
जी वर्तुळावर अथवा कोणत्येही वांकड्येरेघेवर
कितीं वाढविली तरीं छेदिल्यावांचून वर्तुळास
स्पर्शमात्र करित्ये·



१३ कोन ह्मणजे दोन दिशांस गेलेल्ये दोन रे
घांचीं टोंकें एकत्र मिळतात तो· अथवा त्यारेघां
च्या झोंक अथवा अंतर होय·



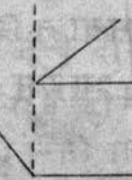
१४ कोन दोनप्रकारचे आहेत· काटकोन आणि तिर्कसकोन·
त्यांत तिर्कसकोनाचे दोन भेद आहेत· लघु आणि विशाळ·

१५ काटकोन तोच होय· जो एकरेघेवर दुस
री लंबरेघ केल्यापासून आला· अथवा त्या लंबा
चे दोन बाजूंस बराबर दोन कोन आले· ते काट
कोन·



१६ तिर्कसकोन तोच होय· जो दोन तिर्कस रे
घांपासून आला· आणि तो काटकोनाहून ला
हान किंवा मोटा असतो·

१७ लघुकोन काटकोनाहून लाहान आहे·
१८ विशाळकोन काटकोनाहून मोटा आहे·



१९ पातळी दोन प्रकारची आहे सरळ आणि वांकडी·

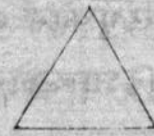
२० सरळ पातळी तीच होय·जीजवर सरळरेघ फिरवून फिरवून कशीही ठेविली तरीं सर्वत्र सारखी लागत्ये· अथवा सरळरेघेचे दोन बिंदू पातळीस स्पर्श करितात· तसे सर्व बिंदू स्पर्श करितील ती सरळ पातळी· आणि जी अशी नव्हेती वांकडी पातळी·

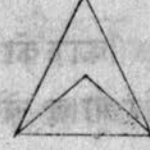
२१ सरळ पातळीस मर्यादा दोन आहेत· सरळरेघ· किंवा वांकडीरेघ·

२२ जा सरळ पातळीस मर्यादा सरळरेघ आहे· तीस बाजू अथवा कोन यांचे संख्ये प्रमाणें अनेक नामें होतात· कारण· तीस जितक्या बाजू तितकेच कोन आहेत· त्यांची संख्या सर्वांहून थोडया अशा तीन·

२३ जा आकृतीस बाजू अथवा कोन तीन आहेत· तीस त्रिकोण ह्मणतात· त्या त्रिकोणास बाजू आणि कोन यांचे गुणाप्रमाणें वेगळालीं नावें होतात·

२४ समबाजू त्रिकोण तोच होय· जाचा तीन बाजू बरावर आहेत·



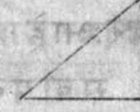


२५ समद्विबाजू त्रिकोण तोच होय· ज्याचा दोन बाजू बराबर आहेत·

२६ विषमबाजू त्रिकोण तोच होय· ज्याचा तीन बाजू परस्पर विषम आहेत·

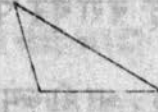


२७ काटकोन त्रिकोण तोच होय· ज्याचा एक कोन काटकोन आहे·



२८ दुसरे त्रिकोण तिर्कसकोन त्रिकोण आहेत· लघुकोन त्रिकोण अथवा विशाळकोन त्रिकोण·

२९ विशाळकोन त्रिकोण तोच होय· ज्याचा एककोन विशाळकोन आहे·



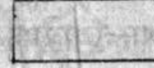
३० लघुकोन त्रिकोण तोच होय· ज्याचे तीन ही कोन लघुकोन आहेत·



३१ जा आकृतीस चारबाजू अथवा चारकोन आहेत· त्या आकृतीस चौबाजू अथवा चौकोन ह्मणतात·

३२ समांतररेघ चौकोन तेंच होय· ज्याचे बाजूंचे दोनही जोड समांतररेघा आहेत· आणि त्यास याप्रमाणें नांवें होतात· काटकोन चौकोन· चौरस· रांबस आणि रांबायद·

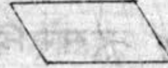
३३ काटकोन चौकोन तेंच होय. जा समांतर बाजू चौकोनांत एक कोन काटकोन आहे.



३४ चौरस तेंच होय. जें समबाजू चौकोन आहे. ह्मणजे. जाची लांबी आणि रुंदी बराबर आहे.



३५ रांबायद तेंच होय. जें तिर्कस कोन समांतररेघ चौबाजू आहे.



३६ रांबस तेंच होय. जें रांबायद चारी बाजू बराबर पण तिर्कस कोन आहे.



३७ त्रापीज्यंम तेंच होय. जाचा चारही बाजू समोरासमोरचे रेघांशीं समांतररेघा नाहींत.



३८ त्रापीज्यायद तेंच होय. जा चौ बाजूंत बाजूंचा एक जोड समांतररेघा आहेन.



३९ कर्णरेघ तीच होय. जी सरळरेघ समोरासमोरचे दोन कोन सांधिते.



४० ज्या पानळीस च्यांहोंपेक्षां अधीक बाजू आहेत. तीस सामान्यतः बहुबाजू ह्मणतात. आणि त्या पानळीस बाजू आणि कोन यांचे संख्येवरून वेगळालीं विशेष नावें आहेत.

४१ पंचकोन बहुकोन तें होय. ज्यास पांच बाजू आहेत. षट्कोणास ६ बाजू. सप्तकोनास ७ बाजू. अष्टकोनास ८ बाजू. नवकोनास ९ बाजू. दशकोनास १० बाजू. एकादशकोनास ११ बाजू. द्वादश कोनास १२ बाजू आहेत.

४२ समबहुकोन तें होय. ज्याचा सर्वबाजू व सर्वकोन बराबर आहेत. आणि ज्याचा यासारिख्या बराबर नाहींत. तें विषम बहुकोन होय.

४३ समबाजू त्रिकोण तीनसम बाजूंची समपानळी आहे. आणि चौरस त्यासारिखीच चारबाजूंची समपातळी आहे.

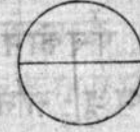
४४ कोणती ही आकृती समबाजू होय. जेव्हां तिचा सर्व बाजू बराबर आहेत. तसे सर्व कोन बराबर आहेत. ती समकोन होय. जेव्हां हीं दोनीं बराबर आहेत. तेव्हां समपातळी झाली.

४५ वर्तुळसमपातळी ती होय. जीस मर्यादा वांकडीरेघ आहे. ज्यारेघेस परिघ ह्मणतात. तो परिघ मध्यबिंदूपासून सर्वत्र सारख्ये अंतरानें आहे. त्या बिंदूस वर्तुळ मध्य ह्मणतात.

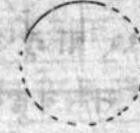
केवळ परिघासही बहुधा वर्तुळ ह्मणतात.



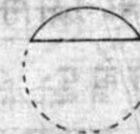
४६ त्रिज्या तीच होय· जी रेघ मध्यबिंदू पासून परिघपर्यंत केली आहे·



४७ वर्तुलाचा व्यास तोच होय· जी रेघ मध्य छेदून पारगेली· तीचे दोनही शेवट परिघावर आहेत·



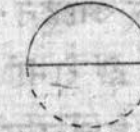
४८ वर्तुलाचा कौस तोच होय· जो परिघाचा भलता एक तुकडा आहे·



४९ ज्या सरळरेघ आहे· जी कौसाचे दोनी शेवट सांधित्ये·

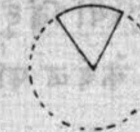


५० खंड· वर्तुलाचा भलता एक तुकडा आहे· जास मर्यादा कौस आणि ज्या आहे·



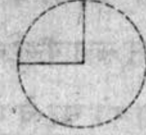
५१ अर्धवर्तुल ह्मणजे वर्तुलाचें अर्ध अथवा खंड जास मर्यादा कौस आणि व्यास आहे·

कोणे वेळेस अर्धपरिघास अर्धवर्तुल ह्मणतात·

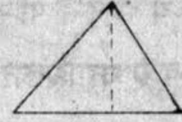


५२ सेकतोर तोच होय· जाची मर्यादा कौस आणि दोन त्रिज्या आहेत·

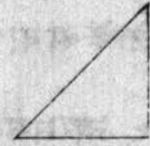
५३ वर्तुळपाद सेकतोर आहे. जाचा कोस परिघाचा चौथा भाग आहे. आणि त्याचा दोन त्रिज्या परस्परांवर लंब आहेत.



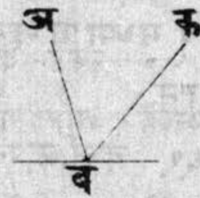
५४ कोणत्येही आकृतीची उंची तीच होय. जो शिरापासून समोरचे बाजूवर लंब केला आहे. जा बाजूस पाय ह्मणतात.



५५ काटकोनत्रिकोणांत काटकोनासमोरचे बाजूस कर्ण ह्मणतात. आणि राहिल्ये दोन बाजूंस बाजू ह्मणतात. केव्हां भूज कोटी असेंही.



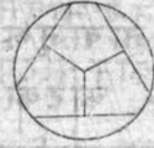
५६ जेव्हां कोणताही कोन तीन अक्षरानीं चिन्हिन करितात. एक अक्षर कोनस्थळीं आणि दोन अक्षरें कोनरेघांचे शेवटांवर. तो कोन सांगत्ये समयीं कोनस्थळींचें अक्षर मध्यें उच्चारावें.



५७ सर्व वर्तुळमात्राचे परिघाचे ३६० भाग मानिले त्यांस अंश ह्मणतात. एक अंशाचे ६० भाग मानिले त्यांस कळा ह्मणतात. एक कळेचे ६० भाग मानिले त्यांस विकळा ह्मणतात. याप्रमाणें पुढेंही आणावें.



५८ कोनाचें माप कोणत्येही वर्तुळाचे कोंसावर आहे· जा वर्तुळाच्या मध्यकोन बिंदू आणि तो कोंस कोनरेघांचेमध्यें आहे· त्या कोंसावर जितके अंश आहेत तें कोनाचें माप होय·



५९ रेघा किंवा ज्या वर्तुळ मध्यापासून समदूर ह्मणतात· जर वर्तुळमध्यापासून त्यांजवर केलेले लंब बराबर आहेत·

६० जा सरळरेघेवर मध्यापासून केलेला लंब दूसर्याहून अधिक लांब आहे· ती सरळरेघ मध्यापासून दुसर्यापेक्षां अधिक दूर ह्मणतात·



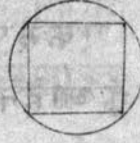
६१ वर्तुळखंडांतर कोन तोच होय· जो खंडाचे कोंसावर कोणत्येही स्थळापासून कोंसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेघानीं होतो·

६२ वर्तुळखंडावर कोन तोच होय· जो त्याचे समोरचा अथवा सम्मेंट कोंसावर कोणत्येही स्थळापासून त्या कोंसाचे शेवटांपर्यंत दोन रेघानीं होतो·

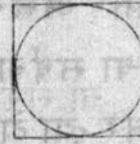
६३ परिघकोन तोच होय· ज्याचा कोनबिंदू परिघावर आहे· आणि मध्यकोन तोच होय· ज्याचा कोनबिंदू वर्तुळ मध्यस्थळीं आहे·



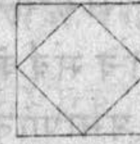
६४ एक सरळ रेघाकृती वर्तुळांत केली अथवा तिचे भोंवतें संलग्न वर्तुळ केलें· जेव्हां तिचे सर्व कोन परिघावर आहेत·



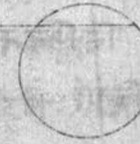
६५ एक सरळ रेघाकृती वर्तुळा भोंवती संलग्न केली· अथवा वर्तुळ त्यांत केलें· जेव्हां आकृतीच्या सर्व बाजू वर्तुळ परिघास स्पर्शतात·



६६ एक सरळ रेघाकृती दुसर्‍ये सरळ रेघाकृतीचे आंत केली अथवा तिचे भोंवती संलग्न केली· जेव्हां तिचे सर्व कोन दुसर्‍ये आकृतीचे बाजूंवर ठेविले आहेत·



६७ छेदनरेघ तीच होय· जी वर्तुळ परिघास आंतून स्पर्शून दुसर्‍येकडे परिघ छेदून पार बाहेर गेली आहे·



६८ दोन त्रिकोण अथवा कोणत्याही दोन सरळ रेघाकृती पर

स्पर

स्पर समबाजू म्हणतात· जेव्हां एकाच्या सर्वबाजू दुसऱ्याचे सर्व बाजूंशीं अनुक्रमें प्रत्येकीं बराबर आहेत· आणि त्यांस परस्पर समकोन म्हणतात· जेव्हां एकाचे सर्वकोन अनुक्रमें दुसऱ्याचे सर्वकोनाशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत·

६९ एकरूपाकृती त्याच होत· जा परस्पर समकोन असून समबाजू आहेत· अथवा एकीचा सर्वबाजू आणि सर्वकोन दुसरीच्या सर्वबाजू आणि सर्वकोन यांशीं प्रत्येकीं अनुक्रमें बराबर आहेत· असेंकीं एक आकृती दुसर्‍ये आकृतीवर ठेविली असतां एकीच्या सर्वबाजू दुसरीच्या सर्वबाजूनीं सर्वांशीं ढांकिल्याजातील· यानंतर त्या दोन्ह आकृती असोन एकच आकृती आहे असें दिसण्यांत येईल·

७० सरूपाकृती त्याच होत· जेव्हां एकीचे सर्वकोन अनुक्रमें दुसरीचे सर्वकोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत· आणि कोनांच्या बाजू प्रमाणांत आहेत·

७१ कोणत्येही आकृतीची परिमिती तीच होय· जी तिचे सर्व बाजूंची मिळून बेरीज आहे·

७२ निश्चित तेंच होय· जें कांहीं करणें अथवा केल्याच्या ताळा दाखविणें· तें· निश्चित दोन प्रकारचें आहे· कृत्य आणि सिद्धांत·

७३ कृत्य तेंच होय· जें कांहीं करायास सांगीतलें·

७४ सिद्धांत तोच होय· जो कांहीं केल्याचा ताळा·

७५ लिंम तेंच होय· जें कांहीं पूर्वीं सांगीतलें· किंवा सिद्ध केलें· पुढें येणार तें स्नगम आयासाठीं·

७६ कुरलरी तीच होय· जो पूर्वील प्रत्यय आला अथवा सिद्धांतापासून जो प्रत्यय प्राप्त आला·

७७ स्कोलंम ह्मणजे टीप· पूर्वीं सांगीतल्ये पुरः करणावर ह्मणजे· त्या कृत्यावरील अवांतर विशेष·

प्रत्यक्ष प्रमाणें·

१ ज्या वस्तू दुसर्‍ये एक वस्तूशीं प्रत्येक सम ह्मणजे बरोबर आहेत तर त्या सर्व वस्तू परस्पर बराबर आहेत·

२ समांत सम मेळविले तर बेरीज सम होत्ये·

३ समांतून सम वजा केले तर सम बाकी राहातात·

४ समांत विषम मेळविले तर बेरीज विषम येत्ये·

५ विषमांतून सम वजा केले तर विषम बाकी राहातात·

६ ज्या वस्तू प्रत्येकीं दुसर्‍ये एक वस्तूचे दुपट आहेत· त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत·

७ जा वस्तू प्रत्येकीं दुसऱ्यें एकवस्तूचे अर्धा बरोबर आहेत. त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत.

८ कोणतीही वस्तू तिचे सर्व तुकड्यांचे बेरिजे बराबर आहे.

९ जा वस्तू सर्वांशीं परस्पर मिळतात अथवा सारिखी जागा भरितात त्या एकरूप आहेत.

१० सर्व काटकोन परस्पर बराबर आहेत.

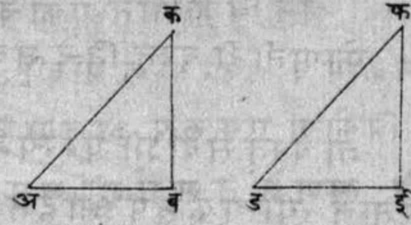
११ जांचें माप अथवा कोंस बराबर आहे. ते सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत.

प्रथम सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतर कोन दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतरकोन यांशीं बराबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम होतील.

अ

अबक आणि डईफ या· दोन त्रिकोणांमध्यें जर अक बाजू डफ बाजूचे बराबर· आणि बक बाजू ईफ बाजू बराबर· आणि क अंतरकोन फ अंतरकोनाचे बराबर असेल· तर हे दोनी त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं बराबर होतील·



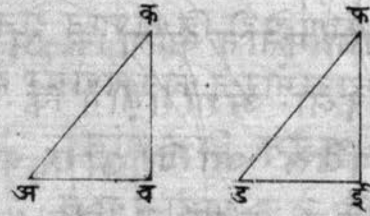
आतां मनांत आण किं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर ठेविला· अशारीतीनें किं· क कोनबिंदू फ कोनबिंदूशीं बराबर मिळेल· आणि अक बाजू तिचे बराबरीचे डफ बाजूशीं मिळेल· तेव्हां क कोन आणि फ कोन (वरसांगीतले प्रमाणें) बराबर आहेत· तेव्हां बक बाजू ईफ बाजूवर येईल·आणि अक बाजू (वरसांगीतलेप्रमाणें) डफ बाजू बराबर येईल· तेव्हां ब कोनबिंदू ई कोनबिंदूशीं मिळेल· याजकरितां अब बाजू डई बाजूस मिळेल· ह्मणोन हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत· आणि त्यांचे बाकी अवयव प्रत्येकीं अनुक्रमें बराबर मिळतात· (९प्रत्यक्षअ०) ह्मणजे अब बाजू डई बाजू बराबर· अ कोन ड कोना बराबर· आणि ब कोन ई कोना बराबर· हें सिद्ध जालें·

दुसरा

दुसरा सिद्धांत.

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन व अंतर बाजू दुसऱ्याचे दोन कोन व अंतर बाजू यांशीं अनुक्रमें बराबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचा बाकी बाजू व बाकी कोन बराबर. ह्मणजे ते सर्वांशीं सम होतील.

अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांत जेव्हां असें असेल. किं अ कोन ड कोनाचे बरोबर आणि ब कोन ई कोनाचे बरोबर आणि अब बाजू डई बाजूचे बराबर. तेव्हां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत.



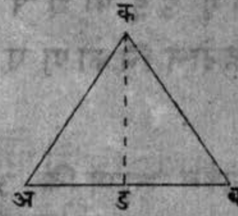
आतां मनांत आण किं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर आणून ठेविला. अशारीतीनें किं अब बाजू तिचे बराबरीचे डई बाजूवर बराबर येईल आणि अ कोन ड कोनाचे बराबर (वर सांगीतलेप्रमाणें) असेलतर अक बाजू डफ बाजूवर येईल तसें ब कोन ई कोनाचे बराबर असल्यास बक बाजू ईफ बाजूवर येईल. यावरून अबक त्रिकोणाचा तीनही बाजू डईफ त्रिकोणाचे तीन बाजूंवर बराबर येतील. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप. (९ प्र० प्र०) दुसऱ्या दोन बाजू अक आणि बक त्या दुसऱ्यांचा दोन

न बाजू डफ आणि ईफ यांचे बराबर· बाकी राहिला क कोन दुसऱ्याचे राहिल्ये फ कोनाचे बराबर आहे· हें सिद्ध जालें·

तिसरा सिद्धांत·

समद्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन बराबर आहेत· अथवा जर कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजू बराबर असतील तर त्यांचे समोरासमोरचे कोन बराबर होतील·

जर अबक त्रिकोणांत अक आणि बक या दोन बाजू बराबर असतील· तर ब कोन अ कोनाचे बराबर होईल·



आतां मनांत आण किं क कोन दुभागिला अथवा त्याचे बराबर कड रेषेनें दोन तुकडे केले· असे किं· अकड कोन बकड कोना बराबर आला·

तेव्हां अकड आणि बकड या दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतरकोन दुसऱ्याचा दोन बाजू व अंतरकोन यांचे बराबर आहेत· कोणत्या तर· अक बाजू बक बाजूचे बराबर· अकड कोन बकड कोनाचे बराबर· आणि कड बाजू दोघांस समान· याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं

सम

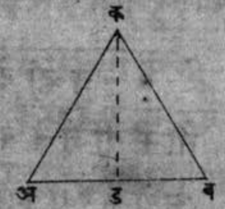
सम होत· (१ सि०प्र०) यावरून अ कोन ब कोनाचे बराबर· हें सिद्ध आलें·

प्रथम कुरलरी· यावरून जीरेघ समद्विबाजू त्रिकोणांचे शिर कोनास दुभागित्ये ती पायास दुभागित्ये· ती त्याजवर लंब आहे·

दुसरी कुरलरी· यावरून कळतें कीं· सर्व समबाजू त्रिकोण समकोन अथवा त्यांचे तीन कोन बराबर आहेत·

चवथा सिद्धांत·

जेव्हां त्रिकोणांत दोन कोन बराबर आहेत· तेव्हां त्यांच्या समोरासमोरच्या बाजूही बराबर होतात·



अबक त्रिकोणांत अ कोन ब कोना बराबर आहे· तर अक बाजू बक बाजू बराबर होईल·

आतां मनांत आण· कीं· अब बाजू ड खुणेनें दुभागिली अशीकीं· अड आणि बड बराबर जाले· आतां कड सांध· ह्मणजे त्या त्रिकोणाचे अकड आणि बकड ऐसे दोन त्रिकोण होतील· आणि मनांत आण कीं अकड त्रिकोण बकड त्रिको

णा

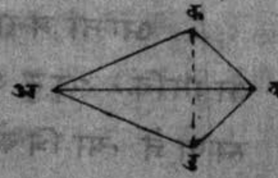
णावर ठेविला असा कीं अड बाजू बड बाजूवर पडेल·

अड बाजू (वरसांगीतलेप्र०) बड बाजू बरावर आहे· तेव्हां अ बिंदू ब बिंदूशीं मिळतो· आणि ड बिंदू ड बिंदूशीं मिळतो· आणि अ कोन (वरसांगीतलेप्र०) ब कोनाचे बराबर आहे· तेव्हां अक रेघ बक रेघेवर पडेल· आणि डक बाजू दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे· याजकरितां अक बाजूचा क शेवट बक बाजूचे क शेवटाशीं मिळेल· यावरून अक बाजू बक बाजू बराबर आहे· हें सिद्ध·

कुरलरी· यांतून निघतें कीं· हरएक त्रिकोण समकोन असल्यास तो समबाजूही आहे·

पांचवा सिद्धांत·

जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचा तीन बाजू अनुक्रमें दुसर्याचे तीन बाजूंचे बराबर आहेत· तेव्हां ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत· अथवा· एकाचे तीनकोन दुसर्याचे तीन कोनां बराबर आहेत·



अबक आणि अबड ऐसे दोन त्रिकोण असल्यास ज्याचा तीन बाजू अनुक्रमें परस्पर बराबर· ह्मणजे· अब बाजू अब बा

जू बराबर· अक – अड बराबर· आणि बक – बड बराबर आ-हे ·तेव्हां हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्याचे तीन कोन अनुक्रमें ·परस्पर बराबर· ह्मणजे· बराबर बाजूचे समोरचे कोन बराबर· ह्मणून बअक कोन बअड· कोना बराबर· अबक कोन अबड कोनाचे बराबर· आणि क कोन ड कोना बराबर होईल·

आतां मनांत आण किं· हे दोन त्रिकोण यांची सर्वांहून लांब आणि परस्पर बराबर अशी जी बाजू तिणें जोडिले आहेत· आतां ·कड सरळ रेघे करून सांध·

अकड त्रिकोणांत अक बाजू (वर सांगीतले प्र०) अड बा-जू बराबर· तेव्हां अकड कोन (३ सि० प्र०) अडक कोना बराब-र आहे· याचरीती प्रमाणें बकड त्रिकोणांत बक बाजू बड बाजू बराबर आहे· याजकरितां बकड कोन बडक कोना बराबर· तेव्हां (२ प्र० प्र०) सममिळवणीनें मेळवितां अकड कोन आणि बकड कोन यांची बेरीज अकड आणि बडक या दोन कोनांचे बेरीजे बरा-बर आहे· ह्मणोन सर्व अ·क·ब हे तीन कोन सर्व अ·ड·ब या तीन कोनाचे बराबर आहेत·

नंतर दोन त्रिकोणामध्यें (वर सांगीतले प्र०) अक आणि बक या दोन बाजू अनुक्रमें अड आणि बड या दोन बाजूंचे बराबर· आणि यांचे अंतर कोन अकब आणि अडब हे बराबर आहेत· याजकरितां (१ सि० प्र०) अबक आणि अडब· हे दोन त्रिकोण

एक

एकरूप आहेत. आणि त्यांचे दुसरे सर्व कोन अनुक्रमें बराबर आहेत. ह्मणजे. बअक कोन आणि बअड कोन बराबर. तसें अबक कोन अबड कोना बराबर आहे हें सिद्ध.

साहावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळ रेघ दुसर्ये सरळ रेघेवर मिळत्ये अथवा तीस छेदित्ये. तेव्हां त्या स्थळीं दोन कोन होतात. त्यांची बेरीज दोन काटकोना बराबर आहे.

अब रेघ कड रेघेवर निघाली असत्यास अबक आणि अबड हे दोन कोन मिळोन दोन काटकोना बराबर आहेत. ह्मणून प्रथम (१५ व्या० प्र०) जेव्हां अबक आणि अबड हे दोन कोन परस्पर बराबर असतील तेव्हां दोनही काटकोन होतील.



परंतु जर हे दोन कोन परस्पर बराबर नाहींत तर मनांत आण कीं ईब रेघ कड रेघेवर लंब केला. तेव्हां (१५ व्या० प्र०) ईबक आणि ईबड हे दोन काटकोन आहेत. आणि (८ प्र० प्र०) ईबड कोन ईबअ

आणि

आणि अबड या दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे. याजकरितां ईबक- ईबअ आणि अबड हे तीन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत.

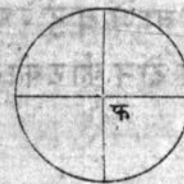
परंतु (८ प्र० प्र०) ईबक आणि ईबअ हे दोन कोन मिळोन अबक कोना बराबर आहेत. याजकरितां अबक आणि अबड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यावरून उलट पाहातां जर अबक आणि अबड हे दोन कोन अब रेघेचे दोन बाजूचे मिळोन दोन काटकोनाबराबर आहेत. तर यांतून निघतें कीं कब आणि बड मिळून कड एक सरळ रेघ आहे.

दुसरी कुरलरी. यावरून कड रेघेचे एक बाजूवर ब बिंदूस्थळीं कितीही कोन असले तरीं ते सर्व मिळोन दोन काटकोनाचे बराबर आहेत.

तिसरी कुरलरी. यावरून कड रेघेचे दुसर्ये बाजूवर ब बिंदूस्थळीं कितीही कोन असले तरीं ते सर्व मिळून दोन काटकोनाचे बराबर आहेत. या प्रमाणें पाहातां कोणत्ये एक बिंदूवर चहुंकडून किती एक रेघानीं जे कोन होउं सकतील. ते सर्व मिळून चार काटकोनां बराबर आहेत.

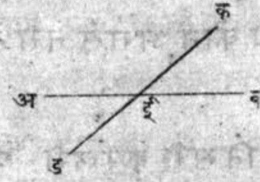
चवथी कुरलरी. यावरून (५७ व्या० प्र०) फ बिंदूवर किती



एक सरळरेषानीं जे काय कोन होऊं सकतात. त्यांचें माप त्या बिंदू मध्याचे बाहेरील हा वर्तुळ परिघ दाखवितो. तस्मात् वर्तुळपरिघ च्यार काटकोनांचें माप आहे. याजकरितां अर्धवर्तुळ अथवा एकशें ऐंशी अंश दोन काटकोनाचें माप आहे. आणि वर्तुळपाद अथवा नव्वद अंश एक काटकोनाचें माप आहे.

सातवा सिद्धांत.

जेव्हां दोन सरळरेषा परस्परांस छेदितात. तेव्हां समोरासमोरचे कोन बराबर होतात.



अब आणि कड या दोन सरळरेषा ई बिंदूवर परस्परांस छेदीत असल्यास अईक आणि बईड हे दोन कोन परस्पर बराबर होतील. आणि अईड - कईब हे दोन कोन परस्पर बराबर होतील.

ह्मणोन (६ सि० प्र०) कई रेघ अब रेघेवर मिळोन अईक - बईक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

याप्रमाणें बई रेघ कड रेघेवर मिळून बईक - बईड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोना बराबर आहेत.

याजकरिता

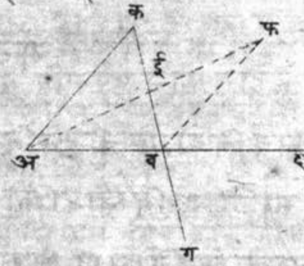
याजकरितां (१म०प्र०) अईक - बईक या दोन कोनांची बेरीज बईक - बईड या दोन कोनांचे बेरिजे बराबर आहे·

आणि बईक कोन जो दोहोंमध्यें साधारण आहे तो या दोन बेरिजांतून वजा केला तर (३प्र०म०) बाकी राहिला अईक कोन बाकी राहिल्ये बईड कोना बराबर होईल·

आणि याचरीतीनें दाखविला जातो कीं अईड कोन बईक कोना बराबर आहे· हें सिद्ध·

आठवा सिद्धांत·

कोणत्येही त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली तर बाहेरील कोन कोणत्येही आंतील समोरचे कोना हून मोठा होतो·



अबक त्रिकोणाची अब बाजू द पर्यंत वाढविली· तेव्हां बाहेरील कबद कोन आंतील समोरचा अ कोन अथवा क कोन याहून मोठा आहे·

आतां मनांत आण कीं बक बाजू ई स्थळावर दुभागिली आणि अई रेघ करून वाढविली अशी कीं ईफ - अई बराबर जाली·

नंतर

नंतर फब सांध.

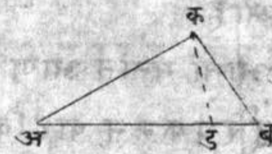
तेव्हां अईक आणि बईफ या दोन त्रिकोणामध्यें (वरसांगी॰प्र॰ अई बाजू = ईफ बाजू. आणि कई बाजू = बई बाजू. आणि या बाजूचे समोरासमोरचे अंतरकोन (७सिद्धांताप्र॰) ई कोना बराबर आहेत– याजकरितां हे दोन त्रिकोण (१सिद्धांताप्र॰) सर्वांशीं बराबर आहेत. या पासून क कोन = ईबफ कोन आहे. परंतु. कबद कोन ईबफ कोनापेक्षां मोटा आहे. याजकरितां बाहेरील कबद कोन क अंतरकोनाहून मोटा आहे.

याशीतीनें कब बाजू ग पर्यंत वाढवून अब दुभागिली असतां अबग अथवा त्याचे बराबर कबद कोन अ कोनाहून मोटा आहे असें दाखविलें आतें.

नववा सिद्धांत.

सर्व त्रिकोणांची अतिमोटी बाजू. अतिमोठ्या कोनासमोर आहे. आणि अतिमोटा कोन. अतिमोठ्या बाजूसमोर आहे.

अबक त्रिकोण असल्यास जांत अब बाजू अक बाजूहून मोटी आहे. अतिमोठ्या अब बाजूचे समोरचा कोन अकब तो लाहान



बाजू

बाजू अक तिचे समोरचे लाहान अबक कोनाहून मोटा आहे.

म्हणोन अतिमोठी अब बाजूवर अक चे बराबर अड करून कड सांध. तेव्हां बकड त्रिकोण आला. आणि बाहेरील अडक कोन (८ सि० प्र०) आंतील ब कोनाहून मोटा आहे. परंतु अड आणि अक बराबर आहेत. याजकरितां (३ सि० प्र०) अकड कोन ब कोनाहून मोटा आहे. जेव्हां अकब कोनाच्या तुकडा अकड कोन ब कोनाहून मोटा आहे. तेव्हां अकब कोन ब कोनाहून मोटा असावा खरा हें सिद्ध.

याचे उलट. जेव्हां क कोन ब कोनाहून मोटा आहे. तेव्हां त्याचे समोरची अब बाजू ब कोनाचे समोरचे अक बाजूहून मोटी आहे.

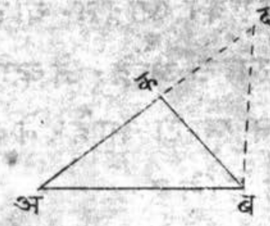
म्हणोन जर अब बाजू अक बाजूहून मोटी नाहीं. तेव्हां तिचे बराबर अथवा तिजपेक्षां लाहान आहे परंतु बरोबर असल्यास (३ सि० प्र०) क कोन ब कोना बराबर असला पाहिजे. एथे (वरसां० प्र०) तो नाहीं. तेव्हां बरोबर नाहीं. आणि क कोन ब कोनाहून एथे (वर सांगीतले प्र०) लाहान होऊं सकत नाहीं. याचरून अब बाजू अक बाजूचे बराबर किंवा तिजहून लाहान नाहीं. तर तिजहून मोटी आहे. हें सिद्ध.

दाहावा

दाहावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्ये बाजूहून अधिक आहे.

अबक त्रिकोण असेल तर त्याचे कोणत्येही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्ये बाजूहून अधिक होईल. असें अक + कब. अब बाजूहून अधिक होईल.



ह्मणोन अक वाढीव. अशी कीं कद. कब चे बरोबर अथवा अद. अक + कब चे बराबर होईल. आणि बद सांध.

तेव्हां (कृत्यानें) कद. कब चे बराबर. याजकरितां (३ सि० प्र०) द कोन कबद कोना बराबर आहे. परंतु अबद कोन कबद कोनाहून मोटा आहे. तेव्हां द कोनाहून पण मोटा आहे. आणि (९सि०प्र०) त्रिकोणाची अति मोटी बाजू अति मोठ्ये कोनासमोर असत्ये. तस्मात् अबद त्रिकोणांत अद बाजू अब बाजूहून मोटी आहे. परंतु अद (कृत्यानें) अक. कद यांचे अथवा अक. कब यांचे बेरिजे बराबर आहे. याजकरितां अक + कब. अब बाजूहून मोटी आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. दोन बिंदूचे मध्यें अति थोडें अंतर तेंच होय.

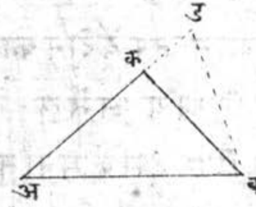
जे

जें त्या बिंदूस एक सरळरेघ सांधित्ये.

अकरावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजूंची वजाबाकी तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे.

अबक त्रिकोण असेल तर त्याचे दोन बाजूंची वजाबाकी तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे. जसें अब - अक . बक या तिसऱ्ये बाजूहून लाहान आहे.



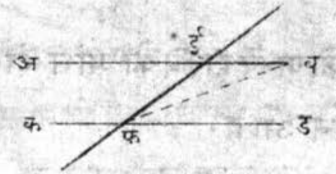
ह्मणोन अक लाहान बाजू ड पर्यंत वाढीव. अशीकिं अड सोट्टी अब बाजू बराबर होईल. आणि कड . अब - अक चे बाकी बराबर होईल. आतां बड सांध. ह्मणजे (कृत्याने) अड बाजू अबचेबरोबर. याजकरितां (३ सि० प्र०) ड आणि अबड हे दोन कोन परस्पर बराबर. परंतु कबड कोन अबड कोनाहून लाहान आहे. तेव्हां त्याचे बराबरीचे ड कोनाहून ही लाहान आहे. आणि (९ सि० प्र०) त्रिकोणाची अति सोटी बाजू अति सोट्ये कोनासमोर आहे. तेव्हां बकड त्रिकोणांत कड बाजू बक बाजूहून लाहान आहे - हे सिद्ध.

बारावा

बारावा सिद्धांत.

जेव्हां एक सरळरेघ दोन समांतर रेघांस छेदित्ये तेव्हां व्युत्क्रम कोन बराबर करित्ये.

ईफ रेघ अब आणि कड या दोन समांतर रेघांस छेदील. तर अईफ कोन त्याचे ईफड व्युत्क्रम कोना बराबर होईल.



ह्मणोन जर हे दोन कोन बराबर नाहींत. तर यांतून एक दुसर्याहून मोटा निश्चय असेल. तेव्हां मनांत आण कि. ईफड मोटा आहे. आणि दुसरें मनांत आण किं. फब रेघ केली आहे. अशी किं. तुकडा अथवा ईफब कोन अईफ कोना बराबर जाला. आणि फब रेघ अब रेघेवर ब स्थळावर मिळेल.

आतां बईफ त्रिकोणाचा बाहेरील अईफ कोन (८ सि॰प्र॰) त्याचे आंतील समोरचा ईफब कोनाहून मोटा आहे. आणि (कृत्यानें) हे दोन कोन परस्पर बराबर. यांतून निघतें किं हे दोन कोन एक समयींच बराबर आहेत आणि नाहींत. तरहें परम अशक्य. याजकरितां ईफड कोन त्याचे अईफ या व्युत्क्रम कोनाशीं बराबर नाहीं असें नाहीं. तर हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

कुरलरी. यांतून निघतें किं अनेक समांतर रेघा आहेत.

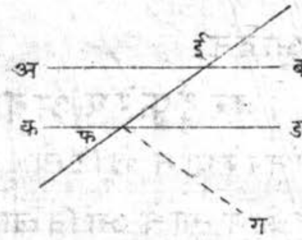
त्यांतून

त्यांतून एकीवर जी सरळरेघ लंब आहे· ती सर्व समांतर रेघांवर लंब आहे·

तेरावा सिद्धांत·

जेव्हां एक सरळरेघ दोन रेघांस छेदून दोन व्युत्क्रम कोन बराबर करित्ये· तेव्हां त्या दोन समांतर रेघा आहेत·

जर ईफ रेघ अब कड या रेघांस छेदून अईफ आणि ईफड हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर करित्ये· तर अब कड समांतर रेघा होतील·

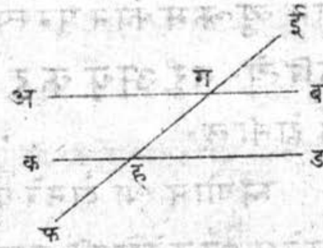


म्हणोन त्या दोन रेघा समांतर नसतील तर मनांत आणकिं फग रेघ अब रेघेशीं समांतर रेघ आहे· याप्रमाणें अब फग समांतर असोन (१२ सि० प्र०) अईफ कोन त्याचे व्युत्क्रम ईफग कोना बराबर आहे· परंतु· (बरसांगीतलेप्र०) अईफ कोन ईफड कोना बराबर आहे· यापासून निघतें (१ प्र० प्र०) ईफड कोन ईफग कोना बराबर· म्हणजे· एक तुकडा सर्वा बराबर हें होणें परम अशक्य· याजकरितां कड वांचून दुसरी रेघ अब शीं समांतर होण्यास अशक्य आहे· हें सिद्ध·

कुरलर्ग· जा कि त्येक रेघा एक रेघेवर लंब आहेत· त्या सर्व परस्पर समांतर आहेत·

चौदावा सिद्धांत·

जेव्हां एक रेघ दोन समांतर रेघांस छेदिते· तेव्हां बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरच्या त्याच बाजूचे कोना बराबर आहे· आणि त्याच बाजूचे दोन आंतील कोन मिळोन दोन काट कोना बराबर आहेत·



जर ईफ रेघ अब कड या समांतररेघांस छेदित्ये· तर· ईगब कोन त्याचे आंतिलाचे समोरच्या त्याच बाजूच्या गहड कोना बराबर होईल· आणि त्याच बाजूचे आंतील दोन कोन बगह आणि गडह मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत·

अब आणि कड या दोनरेघा समांतर आहेत· म्हणून (१२सि०प्र०) अगह कोन त्याचे गहड व्युत्क्रम कोना बराबर आहे· परंतु· (७सि०प्र०) अगह कोन त्याचे समोरचे ईगब कोना बराबर आहे· याजकरितां (१प्र०प्र०) ईगब कोन गहड को

ना

नाबराबर आहे. हें सिद्ध.

नंतर ईगब आणि बगह हे दोन कोन (६ सि० प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहेत. आतांच बरदाखविला गेला कीं. ईगब कोन गहड कोना बराबर आहे. याजकरितां बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. आतां याचे उलट. जेव्हां एक रेघ दुसर्या दोन रेघांस छेदून तिचे एक बाजूचे आंतील दोन कोन बराबर होतात. तेव्हां त्या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत.

दुसरी कुरलरी. जेव्हां एक रेघ दुसर्या दोन रेघांस छेदिते. आणि त्याचे आंतील तिचे एक बाजूचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून उणे आहेत. तेव्हां त्या दोन रेघा समांतर नाहींत. आणि त्या वाढविल्या असतां परस्पर मिळतील.

पंधरावा सिद्धांत.

ज्या सरळ रेघा कोणत्येही एक रेघेशीं समांतर आहेत. तर त्या सर्वही परस्पर समांतर आहेत.



अब आणि कड या दोन रेघा ईफ रेघेशीं समांतर असतील. तर अब आणि कड या रेघा परस्पर

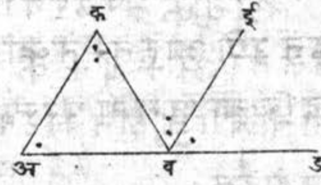
स्पर समांतर होतील.

गऐ लंब ईफ रेघेवर असल्यास गऐ रेघ (१२ सि० कुरल शिप्र०) अब कड यांवरही लंब होईल. याजकरितां (१३ सि० कु० प्र०) अब कड या दोन रेघा समांतर आहेत. हें सिद्ध.

सोळावा सिद्धांत.

जेव्हां त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली तेव्हां बाहेरील कोन आंतील समोरासमोरचे दोन कोनांचे बेरिजे बराबर होतो.

अबक त्रिकोणांत अब बाजू डपर्यंत वाढविली तर कबड बाहेरील कोन आंतील अ आणि क या समोरासमोरचे दोन कोनाचे बेरिजे बराबर आहे.

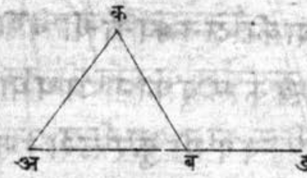


आतां मनांत आणकिं बई रेघ अक रेघेशीं समांतर केली. आतां बक रेघ अक आणि बई या दोन समांतर रेघांस मिळल्ये. तेव्हां (१२ सि० प्र०) क कोन आणि कबई त्याच्याच व्युत्क्रम कोन हे दोन परस्पर बराबर आहेत. आणि अड रेघ अक आणि बई या दोन समांतर रेघांस छेदिल्ये. तेव्हां (१४ सि० प्र०) त्या रेघेचे एक बाजूचे आंतील व बाहेरील अ कोन आणि ईबड हे दोन कोन बराबर

बराबर आहेत. याजकरितां बरोबर समभिळवणीनें अ आणि क या दोन कोनांची बेरीज कबई आणि ईबड या दोन कोनाचे बेरिजेचे अथवा (२ प्र० प्र०) बाहेरील सगळ्या कबड कोनाचे बरोबर आहे. हें सिद्ध.

सत्रावा सिद्धांत.

कोणत्येही सरळरेघत्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोना बराबर आहे.



अबक सरळरेघत्रिकोण असेल तर अ + ब + क ही तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोना बराबर होईल.

ह्मणोन अब बाजू ड पर्यंत वाढविली. तेव्हां बाहेरील कबड कोन (१६ सि० प्र०) अ + क या आंतील समोरासमोरचे दोन कोनाचे बेरिजे बराबर आहे. या दोन बरोबर्यायांत आंतील बकोन प्रत्येकांत मेळीव. तेव्हां अ + क + ब ही तीन आंतील कोनाची बेरीज (२ प्र० प्र०) अबक + कबड याजबळचे दोन कोनाचे बेरिजे बराबर होईल. परंतु (६ सि० प्र०) याजबळचे दोन कोनाची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे. याजवरून ही त्रिकोणांत अ + ब + क हीनी

न

नकोनांची बेरीज (२प्र०प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. जर एक त्रिकोणाचे दोन कोन अनुक्रमें दुसर्या त्रिकोणाचे दोन कोनां बराबर आहेत. तर त्याचा तिसरा कोन ही त्या दुसर्याचे तिसर्ये कोना बराबर होईल. तेव्हां (२प्र०प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत.

दुसरी कुरलरी. जर एके त्रिकोणाचा एक कोन दुसर्ये त्रिकोणाचे एके कोना बराबर आहे. तर त्याचे राहिल्ये दोन कोनाची बेरीज (२प्र०प्र०) दुसर्याचे राहिल्ये दोन कोनाचे बेरिजे बराबर होईल.

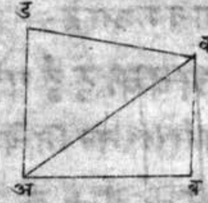
तिसरी कुरलरी. जर एक त्रिकोणांत एक काटकोन असेल तर बाकी दोन कोनांची बेरीज एक काटकोना बराबर होईल. आणि ते प्रत्येक लघुकोन अथवा काटकोनाहून उणे असतील.

चवथी कुरलरी. सर्व त्रिकोणांत दोन कोन लाहान. तेव्हां ते लघुकोन अथवा काटकोनाहून उणे आहेत.

अठरावा सिद्धांत.

कोणत्येही सरळरेघ चौकोनांत त्याचे आंतील चार कोनांची बेरीज चार काटकोनां बराबर आहे.

अबकड



अबकड चौकोन असेल तर अ + ब + क + ड ही आंतील चार कोनाची बेरीज चार काटकोना बराबर होईल·

आतां त्यांत अक कर्ण रेघ कर· अशी किं· त्या चौकोनाचे अबक आणि अडक ऐसे दोन त्रिकोण होतील· ते व्हां त्या दोन त्रिकोणांत एकेक त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज (१७ सि० प्र०) दोन काटकोना बराबर आहे· याजकरितां (२ प्र० प्र०) दोनही त्रिकोणाचे सर्व कोनाची बेरीज जी चौकोनाचे चार कोनांची बेरीज आहे तीच· ती निश्चय चार काटकोनां बराबर आहे· हें सिद्ध·

प्रथम कुरलरी· या पासून कळतें किं· जर चौकोनाचे तीन कोन काटकोन असतील· तर चवथाही कोन काटकोनच असेल·

दुसरी कुरलरी· जर चार कोनांतून दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर असेल· तर राहिल्ये दोन कोनांची बेरीजही दोन काटकोनां बराबर होईल·

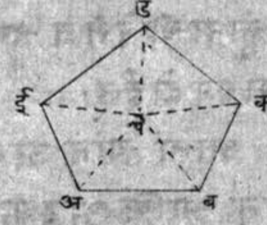
एकुणिसावा सिद्धांत·

कोणत्येही सरळ रेघाकृतीन तिचे आंतील सर्व कोनाची बेरीज त्या आकृतीचे दुपट बाजू संख्येंन चार उणे इतक्ये काट

कोनां

कोनां बराबर आहे.

अबकडई एक सरळरेघाकृती असेल. तर तिचे आंतील कोनांची अ + ब + क + ड + ई. ही बेरीज या आकृतीचे दुपट बाजूसंख्येंत चार उणे इतक्ये काटकोनां बराबर आहे.

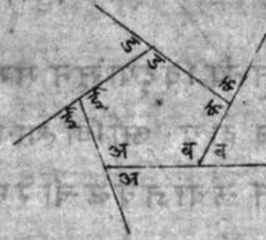


ह्मणोन आकृतीचे आंत कोठेही प स्थळ कल्पून. तेथून पअ. पब. याप्रमाणें आकृतींत कोन आहेत तितक्या रेघा कर. अशा किं. बाजू आहेत तेवढे त्रिकोण होतील. आतां त्यांत प्रत्येक त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज (२७ सि० प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहे. याजकरितां सर्व त्रिकोणाचे कोनांची बेरीज बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहे. परंतु. प स्थळा भोंवते सर्व त्रिकोणाचे कोन आहेत खरे. पण. ते आकृतीचे आंतील कोन नव्हेत. याजकरितां त्यांची बेरीज (६ सि० ३ कु० प्र०) चार काटकोनां बराबर आहे. ह्मणोन पूर्व बेरिजेंत हे चार काटकोन वजा केले पाहिजेत. यापासून निघतें किं. सरळरेघाकृती बहुकोनाचे आंतील कोन मात्राची बेरीज. जसें अ + ब + क + ड + ई ही बेरीज आकृतीचे बाजू संख्येचे दुपटींत चार उणे करून जी बाकी राहील तितक्ये काटकोनां बराबर आहे. हें सिद्ध.

विसावा

विसावा सिद्धांत·

कोणत्येही सरळरेघाकृतीच्या सर्वबाजू बाहेर वाढविल्यापासून बाहेर जे कोन होतात· त्या बाहेरील सर्व कोनांची बेरीज च्यार काटकोनां बराबर आहे·



अ·ब·क·ड·ई हे कोन कोणत्येही सरळरेघाकृतीच्या बाजू वाढविल्यापासून बाहेर आले असतील· तर· त्यांची बेरीज अ + ब + क + ड + ई ही च्यार काटकोनां बराबर होईल·

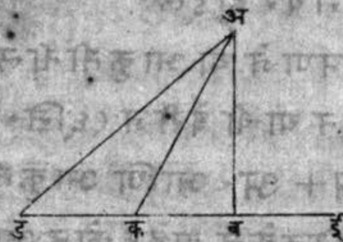
म्हणजे या आकृतींतील हरएक बाहेरील कोन व त्याचे आंतील कोन यांची बेरीज (६ सि॰ प्र॰) दोन काटकोनां बराबर आहे· जसें अ + अ· आणि आकृतीस जितक्या बाजू तितकेच आंत आणि तितकेच बाहेर कोन आहेत· याजकरितां सर्व आंतील व बाहेरील कोनांची बेरीज आकृतीचे बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहे· परंतु· सर्व आंतील कोनांची बेरीज आणि च्यार काटकोन हे (१९ सि॰ प्र॰) बाजू संख्येचे दुपट काटकोनां बराबर आहेत· याजकरितां सर्व आंतील आणि बाहेरील कोनांची बेरीज सर्व आंतील कोन आणि च्यार काटकोन यांचे बेरिजे बराबर आहे· म्हणोन

सर्व

सर्व आंतील कोन आणि बाहेरील कोन यांची बेरीज (१ प्र० प्र०) सर्व आंतील कोन आणि चार काटकोन यांचे बराबर आहे· या बेरिजेंतून आंतील सर्व कोन वजा कर· ह्मणजे बाहेरील कोनाचें माप (३ प्र० प्र०) चार काटकोनां बरांबर आहे· हें सिद्ध·

एकविसावा सिद्धांत·

सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळरेंघेवर सर्वांहून लाहान जी रेघ होत्ये तोच लंब होय· आणि त्या बिंदूपासून त्या सरळरेंघेवर जा रेघा होतील· त्यांत लंबाजवळची रेघ जा दुसर्या लंबापासून दूर रेघा आहेत· त्या सर्वांहून लाहान होईल·



जर अब अक अड रेघा सांगीतल्ये अ बिंदूपासून डई रेंघेवर केल्या असतील· अशाकिं जान अब· डई वर लंब आहे तर अब लंब अक रेंघेहून लाहान होईल·

आणि अक रेघ अड रेंघेहून लाहान होईल· या प्रमाणें पुढेंही·

ह्मणोन ब कोन काटकोन आहे· तेव्हां (१७ सि० ३ कुर० प्र०) क कोन लघुकोन आहे· याजकरितां ब कोनाहून उणा होय· परंतु·

(१ सि० प्र०) अति लाहान बाजू अति लाहान कोनासमोर आहे. याजकरितां अब बाजू अक बाजूहून लाहान आहे.

पुनः अकब कोन लघुकोन आहे. तेव्हां (६ सि० प्र०) अकड कोन विशाळकोन होईल. याजकरितां (२७ सि० ३ कु० प्र०) ड कोन लघुकोन आहे. ह्मणोन क कोनाहून लाहान. आणि अति लाहान बाजू अति लाहान कोना समोर असल्ये तेव्हां अक बाजू अड बाजूहून लाहान आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. लंब सर्व रेघांहून लाहान अंतराची रेघ आहे. जा रेघा सांगीतल्ये बिंदूपासून सरळरेघेवर करितां येतील.

बाविसावा सिद्धांत.

कोणत्येही समांतरबाजू चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू आणि समोरासमोरचे कोन हे परस्पर बरोबर आहेत. आणि कर्ण रेघ त्या चौकोनास दोन त्रिकोणानीं बरावर दुभागित्ये.

अबकड समांतर बाजू चौकोन असेल. आंत बड कर्ण रेघ आहे. तर त्याच्या समोरासमोरच्या बाजू व समोरासमोरचे कोन बरावर होतील. आणि बड कर्ण



रेघ

रेघ त्या चौकोनाचे बराबर दोन भाग अथवा त्रिकोण करित्ये.

ह्मणोन (३२ व्या॰ प्र॰) अब डक या बाजू परस्पर समांतर आहेत. आणि अड बक याही समांतर आहेत. आणि बड रेघ त्यांस मिळत्ये याजकरितां (२२ सि॰ प्र॰) व्युत्क्रम कोन बराबर आहेत. ह्मणजे अबड कोन कडब कोना बराबर आहे. आणि अडब कोन कबड कोना बराबर. ह्मणोन या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसर्याचे दोन कोनां बराबर आहेत. याजकरितां (२७ सि॰ १ कु॰ प्र॰) त्यांचे तिसरे कोनही परस्पर बराबर आहेत. ह्मणजे अ कोन क कोना बराबर. आणि हे कोन समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन आहेत.

पुनः जर अबड कडब या दोन बराबर कोनांशीं कबड अडब हे दोन बराबर कोन मिळतील. तर (२ प्र॰ प्र॰) त्यांची बेरीज बराबर होईल. ह्मणजे सर्व अबक कोन सर्व अडक कोना बर आहे. आणि हे सर्व समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन आहेत हें सिद्ध.

पुनः हे दोन त्रिकोण समकोन आणि प्रत्येकाची एक बाजू बराबर आहे. ह्मणजे बड बाजू दोहोंस साधारण आहे. याजकरितां (२ सि॰ प्र॰) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा त्यांचे सर्व अवयव बराबर आहेत. ह्मणजे. अब बाजू. तिचे समोरचे डक बाजू बराबर. आणि अड बाजू तिचे समोरचे बक बाजू बराबर. आणि सर्व

अबड त्रिकोण सर्व बडक त्रिकोणाचे बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यापासून निघतें किं. जा समांतर बाजू चौकोनांत एक कोन काटकोन आहे. तर बाकी राहिले तीन कोन काटकोन होतील. आणि समांतर बाजू चौकोन काटकोन चौकोन होईल.

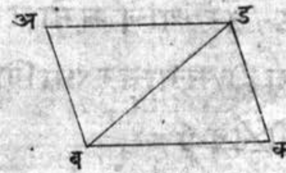
दुसरी कुरलरी. यांतून निघतें किं. कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनाचे जवळ जवळचे कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे.



तेविसावा सिद्धांत.

जा चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू बराबर आहेत. तें समांतर बाजू चौकोन आहे. ह्मणोन समोरासमोरच्या बाजू समांतर आहेत.

अबकड चौकोन असेल. जाच्या समोरासमोरच्या बाजू बरोबर आहेत. ह्मणजे अब बाजू डक बाजू बराबर. आणि अड बाजू बक बाजू बराबर. तेव्हां या बराबरीच्या बाजू परस्पर समांतर होतील. आणि. ही आकृती



समांतर

समांतर बाजू चौकोन आहे.

ह्मणोन त्यांत बड कर्णरेघ कर. तेव्हां (वरसांगीतलेप्र०) अबड कबड हे दोन त्रिकोण परस्पर सम बाजू आहेत. याजक रितां (५सि०प्र०) परस्पर समकोनही आहेत. ह्मणजे. त्याचे कोन अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत. याजकरितां (१३सि०प्र०) समोरासमोरचा बाजू समांतर आहेत. ह्मणजे अब बाजू डक बाजूशीं समांतर. आणि अड बाजू बक बाजूशीं समांतर. आणि ही सर्व आकृती समांतर बाजू चौकोन आहे. हें सिद्ध.

चौविसावा सिद्धांत.

समांतर आणि बरोबर दोनरेघांचे समोरासमोरचे शेवट जा रेघा सांधितात. त्या दोनरेघा परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत.

अब डक यादोन रेघा परस्पर समांतर आणि बरोबर असतील. तर त्यांचे समोरासमोरचे शेवट सांधितात जा अड बक रेघा त्याही समांतर आणि बरोबर होतील. आतां (वरचे आकृतीवर दृष्टी ठेव)

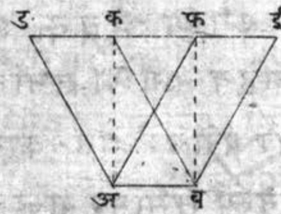
ह्मणोन बड कर्णरेघ कर. (वरसांगीतलेप्र०) अब डक या दोनरेघा परस्पर समांतर तेव्हां (१२सि०प्र०) अबड कोन

त्याचे

त्याचे बडक व्युत्क्रम कोना बराबर आहे· याजकरितां या दोन त्रि-कोणांत दोन बाजू आणि अंतर कोन बराबर ह्मणजे अब बाजू डक बाजूचे बरोबर· बड बाजू दोहोंस साधारण· आणि अबड अंतरकोन बडक अंतर कोनाचे बरोबर· याजकरितां या दोन त्रिकोणांचा बाकी राहिल्या बाजू व कोन हे सर्व अवयव (१सि० प्र०) परस्पर बरोबर· ह्मणजे· अड बाजू बक बाजूचे बराबर· आणि (२२ सि० प्र०) या दोन बाजू परस्पर समांतर आहेत· हें सिद्ध·

पंचविसावा सिद्धांत·

समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण हीं जर एकच पायावर आहेत एकच समांतर रेघांचे जोडाचे आंत· तर ते सर्व समांतर बाजू चौकोन परस्पर बराबर· आणि तसे त्रिकोणही परस्पर बराबर आहेत



अबकड अबईफ हे दोन समांतर बाजू चौकोन असतील· आणि अबक अबफ हे दोन त्रिकोण असतील अब या एकच पायावर· आणि अबडई या एकच समांतर रेघांचे जोडामध्यें· तर अबकड हा समांतर बाजू

चौकोन

च्चौकोन अबईफ या समांतर बाजू च्चौकोना बरोबर होईल· आणि अबक त्रिकोण अबफ त्रिकोणा बराबर होईल·

म्हणोन डई रेघ अफ बई या दोन समांतर रेघांस छेदिले· तसेंच अड बक या दोन समांतर रेघांस छेदिले· तेव्हां (२४ सि० प्र०) ई कोन अफड कोना बराबर आहे· आणि ड कोन बकई कोना बराबर आहे· याजकरितां (२७ सि० १ कु० प्र०) अडफ बकई हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत· आणि अड बक या समांतर बाजू च्चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू (२२ सि० प्र०) परस्पर बरोबर आहेत· त्याच या दोन त्रिकोणाच्या बाजू आहेत· याजकरितां हे दोन त्रिकोण (२ सि० प्र०) एकरूप अथवा यांचे सर्व अवयव अनुक्रमें बराबर आहेत· जर अब ईड या सर्वस्थळांतून हे दोन समत्रिकोण पर्यायें वजा केले तर (३ प्र० प्र०) एकीकडे· अबईफ हें समांतर बाजू च्चौकोन· आणि दुसरेंकडे अबकड या समांतर बाजू च्चौकोना बराबर राहील· हे सिद्ध·

आणि अबक अबफ हे दोन त्रिकोण एकच अब पायावर आहेत· आणि समांतर रेघांचे एकच जोडाचे आंत आहेत· ते परस्पर बरोबर होत· कारण (२२ सिद्धांत प्र०) हे दोन त्रिकोण वर सांगीतल्ये समांतर बाजू च्चौकोनाचे अर्धा बराबर आहेत· हे सिद्ध·

प्रथम कुरलरी· सर्व समांतर बाजू च्चौकोन आणि त्रिकोण ज्यांचा पाया आणि उंची बरोबर· ते समांतर बाजू च्चौकोन परस्पर

बराबर

बराबर· आणि तसे त्रिकोणही परस्पर बराबर· ह्मणजे· उंची आ-
णि समांतर रेषांचें लंबांतर हें एकच आहे· जें लंबांतर (९ व्या॰प्र॰)
सर्वत्र बराबर आहे·

दुसरीकुरलरी· जेव्हां समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण
आहेत· ज्यांचा पाया आणि उंची बराबर एकच· तेव्हां ते समांतर
बाजू चौकोन परस्पर आणि तसे त्रिकोणही सर्व परस्पर बराबर आहेत·
ह्मणजे· एक आकृती दुसर्‍ये आकृतीचे पायाचे बाजूवर ठेविली अस-
तां पाया बरोबर· ह्मणजे· सर्वत्र पाया मिळेल· अथवा· एकच होईल·
आणि तसें दोन आकृतींस एकच पाया असोन सांगीतल्याप्रमाणें
उंची बराबर आहे· तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत·

सविसावा सिद्धांत·

जर एक समांतर बाजू चौकोन आणि एक त्रिकोण ऐसे ए-
कच पायावर असतील समांतर रेषांचे एकच जोडामध्यें· तर तो
समांतर बाजू चौकोन त्या त्रिकोणाचे दुपट· अथवा· तो त्रिकोण
त्या चौकोनाचे अर्धा बराबर होईल·



अबकड समांतर बाजू
चौकोन असेल· आणि अबई
त्रिकोण असेल· एकच अब

पायावर

पायावर· अब डई यासमांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें· तर अबकड हासमांतररेघ चौकोन अबई त्रिकोणाचे दुपट· अथवा· त्रिकोण त्या समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर होईल·

ह्मणोन समांतर बाजू चौकोनांत अक कर्णरेघ कर· जी रेघ (२२ सि॰ प्र॰) त्या चौकोनास बराबर दोन त्रिकोणानीं दुभागित्ये· आतां अबक अबई हे दोन त्रिकोण एकच पायावर समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत· याजकरितां (२५ सि॰ प्र॰) दोनीं बराबर आहेत· परंतु· अबक त्रिकोण (२२ सि॰ प्र॰) अबकड समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे· याजकरितां अबई त्रिकोण त्याचे बरोबर आहे· तोही अबकड· समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहे· हें सिद्ध·

प्रथम कुरलरी· एक त्रिकोण समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे· जेव्हां त्यांचा पाया एक आणि उंची बरोबर· ह्मणजे· उंची आणि समांतर रेघांचे जोडाचें लंबांतर एकच आहे· जें लंबांतर· (९ व्या॰ प्र॰) सर्वत्र बराबर आहे·

दुसरी कुरलरी· जर समांतर बाजू चौकोनाचा पाया कोणत्ये त्रिकोणाचे पायाचे अर्धा असेल· आणि त्या दोहोंची उंची बराबर· अथवा· त्रिकोणाचा पाया समांतर बाजू चौकोनाचे पायाचे दुपट· असोन उंची· बरोबर असेल· तर त्या दोन आकृती बराबर आहेत·

सन्नाविसावा

सत्ताविसावा सिद्धांत.

जे काटकोन चौकोन बराबर रेषांत आहेत. ते सर्व परस्पर बराबर आहेत.



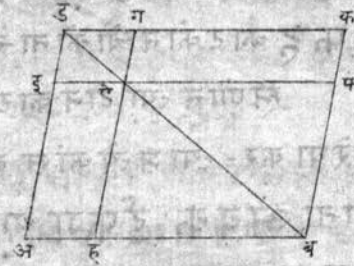
बड आणि फह हे दोन काटकोन चौकोन असतील. जा एकाचा अब बक या बाजू अनुक्रमें दुसर्याचे ईफ फग बाजूंचे बराबर आहेत. तर. बड काटकोन चौकोन फह काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल.

म्हणोन त्या दोन काटकोन चौकोनांत अक ईग ऐशा दोन कर्णरेघा कर. त्या प्रत्येकांस बराबर दोन दोन त्रिकोणानी दुभागितील. आतां अबक ईफग या दोन त्रिकोणांमध्यें (वरसांगीतले प्रमा०) एकाचा अब बक या बाजू आणि आंतील ब कोन. दुसर्याचा ईफ फग बाजू आणि आंतील फ कोन यांचे बराबर आहेत. याजकरितां (१सि०प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर बराबर. परंतु. हे बरोबर दोन त्रिकोण आपआपल्ये काटकोन चौकोंनाचे अर्धे आहेत. अर्धा काटकोन चौकोन अथवा ते त्रिकोण प्रत्येक बरोबर आहेत. याजकरितां (६प्र०प्र०) बड फह हे दोन काटकोन चौकोन परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

कुरलरी· सर्व चौरस जे बराबर रेघांत आहेत· ते सर्व परस्पर बराबर आहेत· कारण· सर्व चौरस काटकोन चौकोनाची जात आहेत·

अठ्ठाविसावा सिद्धांत·

कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनाचे कर्णरेघेचे दोहोंकडे जे समांतर बाजू चौकोन कांप्लूमेंट आहेत· ते सर्व कांप्लूमेंट परस्पर बराबर आहेत·



अक समांतर बाजू चौकोन असेल जांत बड कर्णरेघ आहे· ईऐफ रेघ अब अथवा डक शीं समांतर आणि गऐह रेघ अड शीं अथवा बक शीं समांतर अशीकिं· अऐ ऐक हे दोन समांतर बाजू चौकोन ईग हफ या दोन समांतर बाजू चौकोनाचे कांप्लूमेंट जाले· तर अऐ कांप्लूमेंट ऐक कांप्लूमेंटाचे बरोबर आहे·

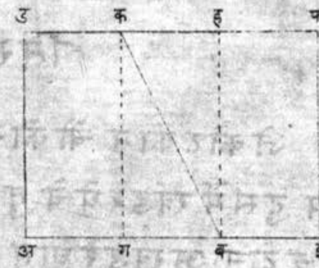
ह्मणोन (२२सि॰प्र॰) डब कर्णरेघ अक ईग हफ या तीन समांतर बाजू चौकोनास बराबर दुभागित्ये· तेव्हां डअब सर्व त्रिकोण डकब या सर्व त्रिकोणाचे बराबर· आणि डईऐ ऐहब हे दोन अवयव अनुक्रमें आपआपल्ये डगऐ ऐफब या दोन अवयवांचे

वयवांचे बरोबर आहेत. याजकरितां राहिले दोन अवयव अऐ ऐक हे (३ प्र० प्र०) परस्पर बराबर आहेत. हें सिद्ध.

एकुणतिसावा सिद्धांत.

एक त्रापीज्यायद अथवा त्रापीज्यम. ज्यांत दोन बाजू समांतर आहेत. तें समांतर बाजू चौकोनाचे. अर्धा बराबर आहे. जा समांतर बाजू चौकोनाचा पाया. त्याचे दोन समांतर बाजूंचे बेरिजे बराबर आहे. आणि उंची त्या समांतर बाजूंचे अंतरा बरोबर आहे

अबकड एक त्रापीज्यायद असेल ज्यांत अब. डक या बाजू परस्पर समांतर आहेत. आतां अब वाढवून डक चे बराबर बई कर. अशीकिं. अई रेघ त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूंचे बेरिजे बराबर होईल. आतां डक ही वाढीव. आणि ईफ गक बह या तीन अड शीं समांतर रेघा कर. नंतर अफ समांतर बाजू चौकोन जाला. ज्याची उंची अबकड त्रापीज्यायदाचे उंची बराबर आहे. आणि ज्याचा अई पाया त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर



बाजूं

चे बेरिजे बराबर आहे· आतां हें सिद्ध करायाचें किं· अबकड त्रापीज्यायद अईफड समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा बराबर आहे·

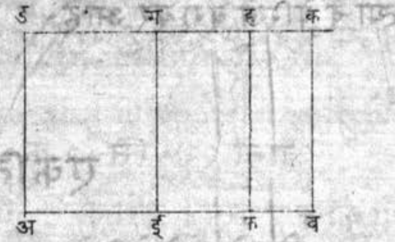
आतां (२५ सि०२ कु०प्र०) त्रिकोण अथवा समांतर बाजू चौकोन परस्पर बराबर· जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर· याजकरितां डग समांतर बाजू चौकोन हई समांतर बाजू चौकोना बराबर· आणि कगब त्रिकोण कहब त्रिकोणा बराबर आहे· याजकरितां बक रेघ अफ समांतर बाजू चौकोनास बराबर दोन अवयवानीं दुभागित्ये· आणि अबकड त्रापीज्यायद अफ चे अर्धा आहे· हें सिद्ध·

तिसावा सिद्धांत·

जे काटकोन चौकोन एक अखंड रेघ आणि कशीही भाग लेल्ये दुसर्ये खंडरेघेचे तुकडे यांनी होतात· त्या सर्वांची बेरीज त्याच दोन अखंड रेघांत जो काटकोन चौकोन होतो· त्याचे बराबर आहे·

अड एक अखंडरेघ असेल· आणि दुसरी अब खंडरेघ अई ईफ फब तुकडे याणीं भागिली· तर अड अब रेघांत जो काटकोन चौकोन होतो· तो अड अई· अड ईफ·

अड फब · या रेघांत जे काटकोन चौकोन होतात · त्या सर्वांचे बेरिजे बराबर आहे · हें लिहिण्याची रीती · अड • अब = अड • अई + अड • ईफ + अड • फब



म्हणोन अक काटकोन चौकोन कर · अड अब या अखंड रेघांनीं · आणि ईग फह हे दोन अब वर लंब अथवा अड शीं समांतर रेघा कर · कारण · (२२ सि० प्र०) या दोन रेघा अड चे बराबर आहेत · तेव्हां हा सर्व अक काटकोन चौकोन अग ईह फक · या तुकड्यां करून केला आहे · परंतु · हे लाहान काटकोन चौकोन अड अई · ईग ईफ · फह फब · या रेघांत आहेत · परंतु · ईग फह रेघा अड चे बराबर · तेव्हां अड अई · अड ईफ · अड फब · या रेघांत होतात · त्यांचे बराबर आहे · याजकरितां अड • अब हा काटकोन चौकोन दुसर्‍ये काटकोन चौकोनाचे बेरिजे बराबर · जसें अड • अई · अड • ईफ · अड • फब · हें सिद्ध ·

कुरलरी · जर एक सरळ रेघेचे दोन तुकडे केले आहेत · त्या अखंड रेघेवर जो चौरस किंवा वर्ग होतो · तो · त्या सरळ रेघेचे तुकड्यांवर त्याच अखंड रेघेकरून जे काटकोन चौकोन होतात ·

त्यांचे

त्यांचे बेरिजे बराबर आहे·

एकतिसावा सिद्धांत·

दोन रेघांचे बेरिजेच्या वर्ग त्या दोन रेघांचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे· त्या दोन रेघांच्या जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे दुपटीनें· अथवा· एक अखंड रेघेच्या वर्ग त्याच रेघेचे दोन तुकड्यांचे वर्गांची बेरीज त्याच तुकड्यांचे काटकोन चौकोनांचे दुपटीनें अधिक इतक्या बराबर आहे·



अब रेघ कोणत्याही अक कब या दोन रेघांची बेरीज असेल· तर अब रेघेच्या वर्ग या अक कब रेघांचे वर्गांचे बेरिजेनें अधिक अक • कब रेघांचे काटकोन चौकोनांची दुपट इतक्या बरोबर आहे· ह्मणजे· $अब^2 = अक^2 + कब^2 + २\ अक \cdot कब$·

ह्मणोन अखंड अब रेघेवर अब डई चौरस अथवा वर्ग कर· आणि अक खंडावर अकफग· चौरस कर· नंतर कफ आणि गफ वाढीव· दुसर्‍या दोन बाजूंवर ह आणि ऐ स्यळापर्यंत·

कह गऐ या दोन रेघा (२२सि०प्र०) अब अथवा बड या वर्गबाजूंचे बराबर आहेत· याजकरितां परस्पर बरोबर· यांतून

कफ

कफ गफ· या अफ चौरसाचा बाजू बजाकर· तेव्हां फह फऐ चे बरोबर राहिली· आणि फह फऐ त्याचे समोरचे डह डऐ चे बरोबर आहेत· कारण· समांतर बाजू चौकोनाचा समोरा समोरचा बाजू आहेत· यांतून कळतें किं· हऐ आकृती समबाजू आहे· आणि (२२सि०१कु०प्र०) त्या आकृतीचे सर्वकोन काटकोन आहेत· याजकरितां हऐ आकृति फऐ रेघेचा अथवा त्याचे बरोबर कब रेघेचा वर्ग आहे·

आतां ईफ आणि फब या दोन आकृती दोन काटकोन चौकोनां बराबर आहेत· जे अक आणि कब रेघांत होतान· कारण· गफ फक या रेघा अक चे बराबर आहेत· आणि फह अथवा फऐ· कब चे बरोबर आहे· परंतु· सर्व वर्ग अड चार आकृती मिळून आलेला· ह्मणजे· अफ फड हे दोन वर्ग आणि ईफ फब हे दोन काटकोन चौकोन मिळोन· अब चे वर्गाबरोबर आहे· जे अक कब यांचा वर्ग अधिक अक कब यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें हें सिद्ध·

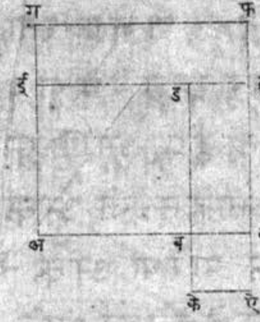
कुरलरी· यांतोन निघतें किं· जर कोणतीही रेघ बराबर दोन तुकड्यांनीं दुभागिली· तर त्या अखंड रेघेचा वर्ग त्याच रेघेचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे·

बत्तिसावा

वत्तिसावा सिद्धांत·

दोन रेघांचे वजाबाकीचा वर्ग· त्यांचे वर्गांचे बेरिजेहून उणा आहे· त्या रेघांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें·

कोण त्याही अक बक या दोन रेघा असतील· ज्यांची वजाबाकी अब आहे· तर अब चा वर्ग· अक आणि बक चे वर्गांहून उणा होईल· अक· बक यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें·



ह्मणजे· $अब^{2} = अक^{2} + बक^{2} - २ अक \cdot बक$·

ह्मणोन अब वजाबाकीवर अबडई चौरस अथवा वर्ग कर· आणि अक रेघेवर अकफग चौरस अथवा वर्ग कर· नंतर ईड रेघ ह पर्यंत वाढीव· आणि डब हक वाढवून केऐ रेघ कर· अशी किं· बक रेघेवर बऐ चौरस होईल·

आतां दिसतें किं अड वर्ग अफ बऐ या दोन वर्गांहून उणा आहे· ईफ डऐ या दोन काटकोन चौकोनांनीं· परंतु· गफ रेघ अक रेघेचे बराबर आहे· आणि गई अथवा फह दुसर्ये बक रेघेचे बराबर आहे· याजकरितां ईफ काटकोन चौकोन· जो ईग गफ रेघांत होतो· तो· अक बक रेघांतील काटकोन चौ

कोना

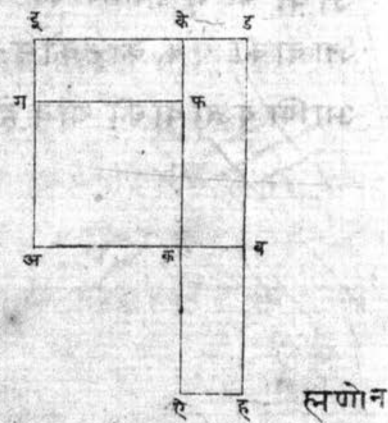
कोना बराबर आहे.

पुनः फह कऐ अथवा बक अथवा हड चे बराबर आहे. साधारण अवयव हक मिळून सर्व हऐ. सर्व फक चे बराबर. अथवा त्याचे बरोबरीचे अक रेषेचे. याजकरितां डुऐ आकृति अक बक रेषांतील काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे.

यांतून निघतें कीं. ईफ डुऐ या दोन आकृती. अब बक रेषांतील दोन काटकोन चौकोनांचे बरोबर आहेत. याजकरितां अब चा वर्ग अक. बक चे वर्गाहून उणा आहे. अक • बक या काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें. हें सिद्ध.

त्रेतिसावा सिद्धांत.

दोन रेषांची बेरीज व त्यारेषांची वजाबाकी यांतजो काटकोन चौकोन होतो. तो. त्याच रेषांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे.



अब अक या दोन विषम रेषा असतील. तर अब अक यांचे वर्गांची वजाबाकी एक काटकोन चौकोना बराबर होईल. जो त्यांची बेरीज व वजाबाकी यांनके ला. ह्मणजे. अब² − अक² = अब + अक • अब − अक.

ह्मणोन

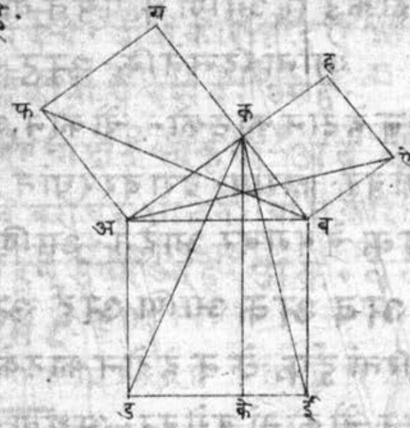
म्हणोन अब रेषेवर अबडई वर्ग कर· आणि· अक रेषेवर अकफग वर्ग कर· डब वाढीव· अशी किं बह· अक चे बराबर होईल· हऐ· अब शीं अथवा ईड शीं समांतर कर· आणि फक दोहीं कडे ऐ आणि के पर्यंत वाढीव·

आतां दिसतें किं· अड अफ या दोन वर्गांची वजा बाकी ईफ केब हे दोन काटकोन चौकोन आहेत· परंतु· ईफ बऐ हे परस्पर बरोबर· कारण· बराबर रेषांन आहेत· असें किं· ईके बह या दोनी· अक चे बराबर आहेत· आणि गई कब चे बरोबर· आणि या दोन अब अक आणि अई अग यांची वजा बाकी आहेत· याज करितां ईफ केब हे दोन काटकोन चौकोन केब बऐ या दोन काटकोन चौकोनां बरोबर· अथवा· केह चे बराबर· म्हणोन केह काटकोन चौकोन अड अफ वर्गांचे वजा बाकी बरोबर आहे· परंतु· केह काटकोन चौकोन या दोन रेषांन आहे· एक डह म्हणजे· अब आणि अक यांची बेरीज· दुसरी कड· म्हणजे अब आणि अक यांची वजा बाकी· याज करितां अब अक यांचे वर्गांची वजा बाकी एक काटकोन चौकोनां बराबर आहे· जो त्यांची बेरीज आणि वजा बाकी यांत होतो· हें सिद्ध·

चौतिसावा

चौतिसावा सिद्धांत·

कोणत्येही काटकोन त्रिकोणांत कर्णाच्या वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे·



अबक एक काटकोन त्रिकोण असेल· जांत क कोन काटकोन आहे· तर अब कर्णाच्या वर्ग दुसऱ्या दोन बाजू अक बक यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर होईल· ह्मणजे· $अब^2 = अक^2 + बक^2$·

ह्मणोन अब रेषेवर अई वर्ग कर· आणि अक बक रेषांवर अग बह हे दोन वर्ग कर· नंतर कके· अड शीं अथवा बई शीं समांतर कर· आणि अऐ बफ कड कई या रेषांनी सांध·

आतां अक रेष कग कब या दोन रेषांस मिळत्ये· अशी किं· दोहोंकडे दोन काटकोन होतात· याजकरितां (६सि०१कु०प्र०) या दोन रेषा मिळून एक बग रेष होत्ये· आणि फअक डअब हे दोन कोन वर्गाचे कोन अथवा काटकोन आहेत· ह्मणोन परस्पर बराबर· या दोन बराबर कोनांशीं साधारण बअक कोन मेळीव· ह्मणजे· फअब सर्व कोन अथवा बेरीज कअड सर्व कोनाचे अ-

थवा

थवा बेरिजेचे बरोबर· परंतु फअ रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसर्ये अक बाजूचे बराबर आहे· आणि अब रेघ आपल्ये वर्गाचे दुसर्ये अड बाजूचे बराबर आहे· याप्रमाणें फअ अब या दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील फअब कोन कअ अड या दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील कअड कोन हीं एकमेकाचीं अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत· ह्मणोन (१सिद्धांतप्र०) अफब हा त्रिकोण अकड या त्रिकोणाचे बराबर आहे·

परंतु अग वर्ग अफब त्रिकोणाचे दुपट आहे· कारण· (२६सि०प्र०) या दोन आकृती एकच अफ पायावर आहेत· आणि फअ गब या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें· याप्रमाणें अके हा काटकोन चौकोन अकड या त्रिकोणाचे दुपट आहे· कारण· एकच अड पायावर डअ केक या समांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत· आणि (६प्र०प्र०) जा वस्तू· प्रत्येकिं दुसर्ये एक वस्तूचे दुपट आहेत त्या सर्व परस्पर बराबर· याजकरितां अग वर्ग अके समांतर बाजू· चौकोनाचे बराबर आहे·

याचरीतीनें हेंही सिद्ध होतें किं· बह वर्ग बके समांतर बाजू चौकोनाचे बराबर आहे·

याजकरितां अग बह हे दोन वर्ग मिळून· अके बके या दोन समांतर बाजू चौकोनां बराबर आहेत· अथवा· त्यांचे सगळ्ये अई वर्गा बराबर· ह्मणजे· त्रिकोणाचे दोन लाहान बाजूंचे वर्गांची

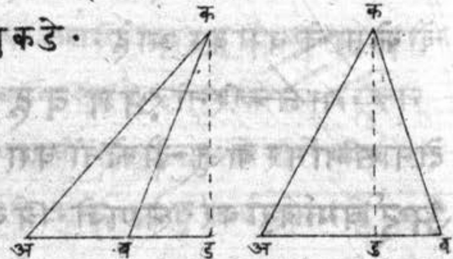
बेरीज स्रोटये बाजूंचे वर्गा बराबर आहे. हें सिद्ध.

प्रथम कुरलरी. यांतून निघतें किं. काटकोन त्रिकोणाचे कोण-त्येही लाहान बाजूचा वर्ग (३प्र०प्र०) कर्ण आणि दुसरी लाहान बाजू यांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. अथवा. (३३सि०प्र०) कर्ण आणि राहिली दुसरी बाजू यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांत जो काटकोन चो कोन होतो त्याचे बराबर आहे.

दुसरी कुरलरी. यांतून निघतें कीं. दोन काटकोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसर्याचे दोन बाजूं बराबर असतील. तर त्याची तिसरी बाजूही बराबर होईल. आणि ते दोन काटकोन त्रिकोण पर-स्पर एकरूप होतील.

पंसतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत दोन बाजूंचे वर्गाची वजाबाकी पायाचे दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे. दोन खंडें ह्मणजे त्रिकोणाचे शिरापासून पायावर जो लंब केला आहे. त्यापर्यंत पायाचे दोन शेवटांपासून दोन अंतरें अथवा तुकडे.



कोणताही अबक त्रिकोण असेल त्यांत कड रेघ अब पायावर लंब आहे. तर अक बक या दोन बाजूंचे वर्गाची वजाबाकी

अड बड या दोन खंडांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे· ह्मणजे·

$$\text{अक}^2 - \text{बक}^2 = \text{अड}^2 - \text{बड}^2\cdot$$

ह्मणोन अकड काटकोन त्रिकोणांत $\text{अक}^2 = \text{अड}^2 + \text{कड}^2$ } (३४ सि॰ प्र॰)
आणि बकड काटकोन त्रिकोणांत $\text{बक}^2 = \text{बड}^2 + \text{कड}^2$

याजकरितां अक^2 आणि बक^2 यांची वजाबाकी·

$\text{अड}^2 + \text{कड}^2$ } यांचे वजाबाकी बरोबर आहे·
$\text{बड}^2 + \text{कड}^2$

या दोहोंत कड वर्ग साधारण आहे तो सोडून· अक^2 आणि बक^2 यांची वजाबाकी अड^2 आणि बड^2 यांचे वजाबाकी बरोबर आली· हें सिद्ध·

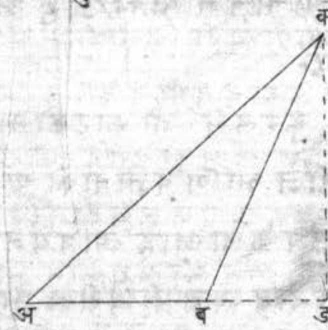
कुरलरी· जो काटकोन चौकोन कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो· तो (३३ सिद्धांत प्र॰) शिरापासून जो लंब केला आहे त्यापर्यंत पायाचे दोन शेवटांपासून दोन अंतरांची अथवा दोन खंडांची बेरीज आणि त्यांचीच वजाबाकी या दोन रेघांचे काटकोन चौकोना बराबर आहे· अथवा· यां बराबर आहे· एक काटकोन चौकोन जो पुढें सांगतो या रेघांत होतो· एक रेघ पाया आणि दुसरी रेघ पायाचे पूर्वोक्त खंडांची वजाबाकी· जेव्हां लंब त्रिकोणांत पडतो तेव्हां· आणि जेव्हां लंब त्रिकोणाचे बाहेर पडतो तेव्हां पायाचे पूर्वोक्त खंडांची बेरीज· ह्मणजे $\overline{\text{अक}+\text{बक}}\cdot\overline{\text{अक}-\text{बक}} = \overline{\text{अड}+\text{बड}}\cdot\overline{\text{अड}-\text{बड}}\cdot$ अथवा $\overline{\text{अक}+\text{बक}}\cdot\overline{\text{अक}-\text{बक}} = \text{अब}\cdot\overline{\text{अड}-\text{बड}}$ दुसऱ्ये आंकृतींत जेव्हां लंब त्रिकोणांत पडला आहे·

आणि

आणि अक + बक • अक - बक = अब • अड + बड· दुसऱ्ये आकृतींत जेव्हां लंब त्रिकोणाचे बाहेर पडला आहे·

छत्तिसावा सिद्धांत·

कोणत्येही विशाळकोन त्रिकोणांत विशाळकोनाचे समोरचे बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरिजेहून अधिक आहे· कशानें तर· पाया आणि विशाळकोनापासून लंबपर्यंत जें अंतर आहे त्या दोन रेषांत जो काटकोन चौकोन होतो त्याचे दुपटीनें·



अबक एक त्रिकोण असेल जांत ब विशाळकोन आहे· आणि अड पाया वाढवून त्याजवर कड लंब आहे· तर अक बाजूचा वर्ग अब बक या दोन बाजूंचे वर्गांहून अब बड यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक आहे· ह्मणजे· अक^2 = अब^2 + बक^2 + २अब • बड·

ह्मणोन अखंड अड रेषेचा वर्ग (३१सि•प्र•) तीचे अब बड या खंडांचे वर्ग त्याच खंडांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक इतक्या बराबर आहे· जर या दोन बरोबऱ्यांवर कड वर्ग मिळेल तर (२प्र•म•)

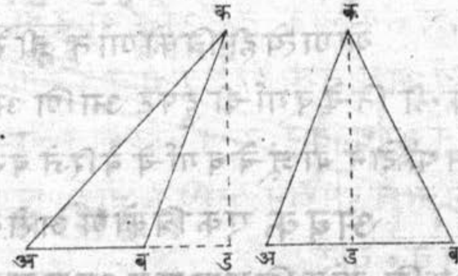
अड

अड कड यांच्या वर्गांची बेरीज अब बड कड यांचे वर्गाची बेरीज अब बड यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक इतक्याचे बरोबर आहे.

परंतु (३४ सि० प्र०) अड कड यांचा वर्ग अक चे वर्गा बरोबर आहे. आणि बड कड यांचा वर्ग बक चे वर्गा बराबर आहे. याजकरितां अक चा वर्ग अब बक यांचे वर्गाची बेरीज अब बड यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक इतक्याचे बरोबर आहे. हें सिद्ध.

सततिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत लघुकोना समोरचे बाजूचा वर्ग पाया आणि दुसरी बाजू यांचे वर्गाचे बेरिजेहून उणा आहे. पाया आणि लघुकोनापासून लंब पर्यंत जें अंतर आहे त्या दोन रेघांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें.



अबक एक लघुकोन त्रिकोण असेल. आंत अ लघुकोन आहे. आणि अब पायावर कड लंब आहे. तर बक चा वर्ग अब अक या दोहोंचे वर्गाहून.

अब अड यांचे काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें उणा आहे. ह्मणजे.

$\overline{बक}^2 = \overline{अब}^2 + \overline{अक}^2 - २\,\overline{अब \cdot अड}$. प्रथम आकृतींत (३६ सि० प्र०)

$\overline{अक}^2 = \overline{बक}^2 + \overline{अब}^2 + २\,\overline{अब \cdot बड}$. या दोन बरोबर्यांत अब चा

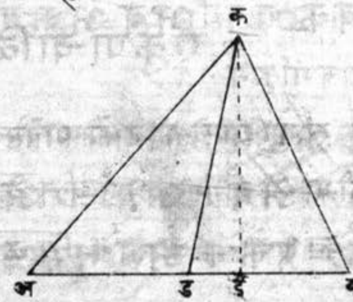
वर्ग

वर्ग मेळीव. तर (२प्र०प्र०) $अब^२ + अक^२ = बक^२ + २अब^२ + २$ $अब \cdot बड$. अथवा $अब^२ + अक^२ = बक^२ + २अब \cdot अड$. (३०सि० प्र०) अथवा $बक^२ = अब^२ + अक^२ - २अब \cdot अड$. हें सिद्ध.

पुनः दुसर्‍ये आकृतींत (३४सि०प्र०) $अक^२ = अड^२ + डक^२$. आणि (३१सि०प्र०) $अब^२ = अड^२ + बड^२ + २अड \cdot डब$. याजकरितां (२प्र०प्र०) $अब^२ + अक^२ = बड^२ + डक^२ + २अड^२ + २अड \cdot डब$ अथवा $अब^२ + अक^२ = बक^२ + २अड^२ + २अड \cdot डब$. (३४सि०प्र०) अथवा $अब^२ + अक^२ = बक^२ + २अब \cdot अड$. अथवा $बक^२ = अब^२ + अक^२ - २अब \cdot अड$. हें सिद्ध.

अठतिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही त्रिकोणांत जी रेघ शिरापासून पायाचे मध्यापर्यंत केली तिचे वर्गाची दुपट आणि अर्ध्ये पायाचे वर्गाची दुपट मिळून दुसर्‍या दोन बाजूंचे वर्गाचे बेरिजे बराबर आहे.



अबक एक त्रिकोण असेल आणि त्यांत शिरापासून अब पाया चे ड मध्यापर्यंत कड रेघ केली. अशी कि. पायास बराबर अड डब या दोन खंडांनीं दुभागिल्ये. तर अक कब चा वर्ग. कड बड या दोहोंचे वर्गाचे दुपटी बराबर आहे.

म्हणजे

म्हणजे अक^2 + कब^2 = २ कड^2 + २ डब^2

म्हणोन अब पायावर कई लंबकर आतां अडक या विशाळकोन त्रिकोणांत जांत ड विशाळकोन आहे (३६ सि॰ प्र॰) अक चा वर्ग अड कड यांचे (अथवा बड कड यांचे) वर्गांहून या रेघांतील काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें अधिक आहे २ अड॰डई (अथवा २ बड॰डई) आणि डबक या लघुकोन त्रिकोणांत जांत लघुकोन ड आहे (३७ सि॰ प्र॰) बक^2 = बड^2 आणि कड^2 याहून पूर्वी सांगीतल्ये काटकोन चौकोनाचे दुपटीनें उणा आहे याजकरितां अक^2 आणि बक^2 मिळोन त्या पूर्व बेरीजेचे दुपट आहेत - जांत अधिक जाति आणि उनजाति काटकोन चौकोन बाद होतात

म्हणजे अक^2 = बड^2 + कड^2 + २ बड॰डई (३६ सि॰ प्र॰)
आणि बक^2 = बड^2 + कड^2 − २ बड॰डई (३७ सि॰ प्र॰)
बेरीज अक^2 + बक = २ बड^2 + २ कड^2 हें सिद्ध

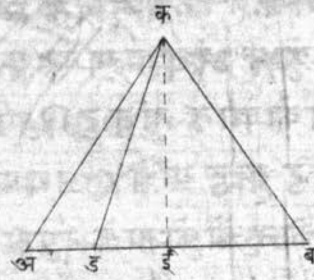
एकुणचाळिसावा सिद्धांत

समद्विबाजू त्रिकोणांत कोणती एक रेघ शिरापासून पायावर कोणत्येही स्थळापर्यंत केली तीचा वर्ग आणि पायाचे दोन खंडांचा काटकोन चौकोन मिळून जें होतें तें त्याचे एक सम बाजूचे

वर्गा

वर्गा बरोबर आहे.

अबक एक समद्विबाहू त्रिकोण असेल. आणि त्यांत शिरापासून पायावर कोणत्येही स्थळीं कड रेघ केली. आहे. तर अक बाजूच्या वर्ग. कडच्या वर्ग आणि अड डब यांच्या काटकोन चौकोन एकत्र मिळोन जें होतें त्याचे बराबर आहे. ह्मणजे. अक^2 = कड^2 + अड.डब.



ह्मणोन कई रेघ कर. अशीकिं. शिरकोन दुभागील. तर ही रेघ (३ सि० १ कु० प्र०) पायास दुभागित्ये. आणि त्याजवर लंब आहे. याजकरितां अई बराबर ईब आला.

परंतु अकड त्रिकोणांत आंत ड विशाळ कोन आहे. (३६ सि० प्र०)

अक^2 याबरोबर = कड^2 + अड^2 + २ अड.डई.

// अथवा = कड^2 + अड.$\overline{\text{अड}+२\text{डई}}$ (३० सि० प्र०)

// अथवा = कड^2 + अड.$\overline{\text{अई}+\text{डई}}$

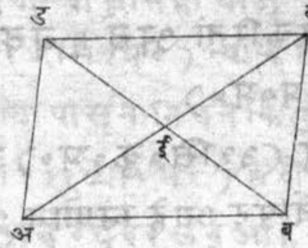
// अथवा = कड^2 + अड.$\overline{\text{बई}+\text{डई}}$

// अथवा = कड^2 + अड.डब. हें सिद्ध.

चाळिसावा

चाळिसावा सिद्धांत.

कोणत्येही समांतर बाजू चौकोनांत कर्णरेघा परस्परांस दुभागितात. आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज त्याचे चार बाजूंचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे.



अबकड एक समांतर बाजू चौकोन असेल त्यांतील कर्णरेघा ई स्थळावर परस्परांस दुभागितात. तर अई ईक बराबर आणि बई ईड बराबर होतील. आणि अक बड यांचे वर्गांची बेरीज अब बक डक डअ यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर होईल.

ह्मणजे अई = ईक आणि बई = ईड.

आणि $अक^2 + बड^2 = अब^2 + बक^2 + कड^2 + डअ^2$.

ह्मणोन अईब डईक हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत. कारण. समोरासमोरचे कोन ई स्थळावर (७सि०प्र०) बरोबर आणि अक बड या दोन रेघा अब डक या रेघांस मिळतात. याजकरितां बअई कोन डकई कोना बराबर आणि अबई कोन कडई कोनाबराबर आहे. आणि (२२सि०प्र०) अब बाजू डक बाजूचे बराबर आहे. याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आणि (२सि०प्र०) त्यांचा राहिल्या बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत

आहेत ह्मणजे अई = ईक आणि बई = ईड

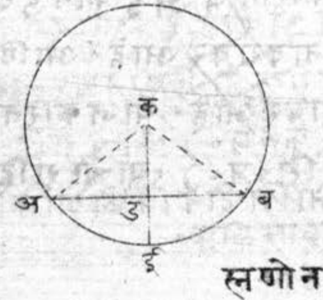
पुनः ई स्थळावर अक दुभागिला याजकरितां (३८ सि० प्र०) $अड^2 + डक^2 = २ अई^2 + २ डई^2$

याचरीतीनें $अब^2 + बक^2 = २ अई^2 + २ बई^2$ (अथवा) $२ डई^2$ याजकरितां $अब^2 + बक^2 + कड^2 + डअ^2 = ४ अई^2 + ४ डई^2$ (२ प्र० प्र०)

परंतु (३१ सि० कु० प्र०) एक अखंड रेघेचा वर्ग तिचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे ह्मणोन $अक^2 = ४ अई^2$ आणि $बड^2 = ४ डई^2$ याजकरितां $अब^2 + बक^2 + डक^2 + डअ^2 = अक^2 + बड^2$ (१ प्र० प्र०) हें सिद्ध.

एकेनाळिसावा सिद्धांत

जर एक रेघ वर्तुळमध्याचे पार जाउन अथवा त्यापासून केली ती त्या वर्तुळांतील कोणत्येही ज्यास दुभागित्ये तेव्हां ती रेघ त्या ज्यावर लंब होईल अथवा जर ती रेघ ज्यावर लंब असेल तर ज्या आणि ज्याकोस यांस दुभागील



कोणत्येही वर्तुळांत अब ज्या असेल आणि कड रेघ क वर्तुळमध्यापासून त्या ज्यावर केली ती ड स्थळावर ज्यास दुभागित्ये तर अब रेघेवर ती कड रेघ लंब होईल, ह्मणोन

म्हणोन कअ कब ऐशा दोन त्रिज्या कर· अकड आणि बकड या दोन त्रिकोणांत कअ (४४ व्या॰प्र॰) कब चे बराबर आहे· कड बाजू दोहोंत साधारण आणि (वरसांगीतल्याप्र॰) अड डब चे बराबर आहे· याप्रमाणें दोन्हीं त्रिकोणाच्या तीनही बाजू अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत· याजकरितां (५सि॰प्र॰) त्यांचे तीनही कोन अनुक्रमानें परस्पर बराबर आहेत· यापासून निघतें किं अडक कोन बडक कोना बराबर आहे· म्हणोन (११व्या॰प्र॰) हे दोनही कोन काटकोन आहेत· आणि कड रेघ अब रेघेवर लंब आहे·

पुनः जर कड अब वर लंब असेल तर अब च्या ड स्थळावर दुभागिली जाईल· अथवा· अड डब चे बराबर होईल· आणि अईब कौंस ई स्थळावर दुभागिला जाईल· अथवा· अई ईब चे बराबर होईल·

म्हणोन (वरसांगीतल्याप्र॰) कअ कब त्रिज्या कर· तेव्हां अकब त्रिकोणांत कअ बाजू कब चे बराबर आहे· याजकरितां (३सि॰प्र॰) त्यांचे समोरासमोरचे अ कोन आणि ब कोन हे परस्पर बराबर आहेत· आतां अकड आणि बकड या दोन त्रिकोणांत अ कोन ब कोना बराबर आहे· आणि (११व्या॰प्र॰) ड स्थळावरील दोनीं कोन परस्पर बराबर आहेत· याजकरितां (२७सि॰ १कु॰प्र॰) त्यांचे राहिले तिसरे कोन परस्पर बराबर आहेत· आणि दोन त्रिकोणांत कड बाजू साधारण आहे· याजकरितां

२

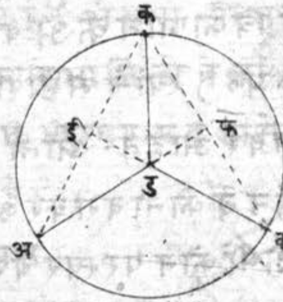
(२सि०प्र०) अड बाजू डब बाजूचे बराबर आहे

आणि पुनः अकई कोन बकई कोना बराबर आहे ह्मणोन (५७व्या०प्र०) अई कोस पूर्व दोन कोनांतून प्रथमास मापितो तो बई कोसा बराबर आहे जो बई कोस दुसऱ्ये कोनास मापितो कारण बरोबर कोसास बरोबर माप पाहिजे हें सिद्ध

कुरलरी यांतून निघतें कि कोणतीही रेघ जी कोणत्येही ज्यावर लंब असोन त्ये ज्यास दुभागित्ये ती रेघ त्या वर्तुळमध्याचे पार जाईल

बेताळिसाव्या सिद्धांत·

एके वर्तुळांत जा एक बिंदूपासून परिघपर्यंत दोहोंपेक्षां अधिक बराबर रेघा कर्ता येतात तो बिंदू वर्तुळमध्य होईल



अबक एक वर्तुळ असेल त्यांतील कोणताही ड बिंदू असेल त्यापासून परिघपर्यंत डअ डब डक या तीन रेघा केल्या त्या बराबर असतील तरतो ड बिंदू वर्तुळाचा मध्य होईल

ह्मणोन त्यांत अब बक या दोन ज्याकर आणि त्यांस ई आणि

आणि फ स्थळांवर अनुक्रमें दुभाग नंतर डई डफ सांध

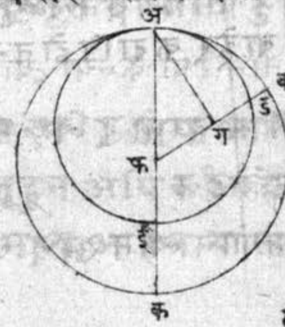
आतां डअई डबई या दोन त्रिकोणांत (वरसांगीतल्याप्र०) डअ बाजू डब बाजू बराबर आणि सांगीतल्या प्रमाणें अई बाजू ईब चे बराबर आणि डई बाजू दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे याजकरितां हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि (७सि०प्र०) त्याचे दोन ई कोन परस्पर बराबर ह्मणोन (११व्या०प्र०) डई अब ज्याचे मध्यावर लंब आहे याजकरितां (४१सि०कु०प्र०) डई रेघ वर्तुळमध्याचे पार आली

याचरीतीनें दाखवितां येतें किं डफ रेघही मध्याचे पार आली याजकरितां ड बिंदू वर्तुळाच्या मध्य आहे आणि डअ डब डक या तीन बराबर रेघा त्या वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत हें सिद्ध

त्रेताळिसावा सिद्धांत.

जर दोन वर्तुळें आंतोन परस्पर स्पर्शतात तर तें स्पर्शस्थळ व त्या दोन वर्तुळांचे मध्य ऐशीं तीन स्थळें एकच सरळ रेघेंत येतील

अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें जर आंतोन अ स्थळावर परस्पर स्पर्शतील तर अ बिंदू आणि दोन वर्तुळांचे मध्य बिंदू ऐशीं तीन स्थळें एके सरळ रेघेंत येतील



ह्मणोन

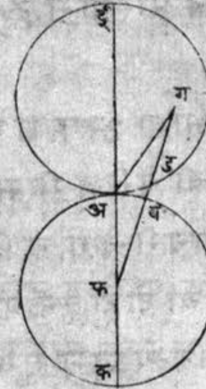
ह्मणोन अबक वर्त्तुळाच्या मध्यबिंदू फ असेल आणि त्याच्यापार अफक व्यास करं जर दुसर्या वर्त्तुळाचा मध्यबिंदू अक रेषेंत येण्यास अशक्य तर मनांत आणा कीं तो वर्त्तुळमध्य दुसर्‍या स्थळावर आहे नंतर त्याच्यापार फग रेघ करं अशा कीं दोनही वर्त्तुळांचे परिघांस ड आणि ब या स्थळांवर छेदील आणि अग सांध

आतां अफग त्रिकोणांत (१०सि०प्र०) फग गअ या दोन बाजूंची बेरीज तिसर्‍ये अफ बाजूहून अधिक आहे अथवा तिच्या बराबरीच्या फब त्रिज्येहून अधिक आहे साधारण अवयव फग तो या दोहोंतून वजा करं ह्मणजे बाकी राहिला गअ तुकडा बाकी राहिल्ये गब तुकड्याहून अधिक होईल परंतु ग बिंदू आंतील वर्त्तुळाचा मध्य मनांत आणिला यास्तव त्याच्या दोन त्रिज्या गअ आणि गड परस्पर बराबर आहेत याजकरितां गड ही गब हून अधिक होईल परंतु अडई आंतील वर्त्तुळ आहे ह्मणोन गड गबहून अवश्य लाहान आहे अशानें गड गबहून अधिक आणि उणी ही गोष्ट परम अवश्य याजकरितां ग मध्यबिंदू अफक रेषेचे बाहेर कदापि होत नाहीं हें सिद्ध

चौबेनाळीस

चौवेताळिसावा सिद्धांत

जर दोन वर्तुळें परस्पर बाहेर स्पर्शतात तर त्यांचा स्पर्शबिंदू व त्यांचे मध्यबिंदू ऐशीं तीन स्थळें एके सरळरेघेंत येतील



अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें जर बाहेर अ स्थळावर परस्पर स्पर्शतील तर अ स्पर्शबिंदू आणि दोन वर्तुळांचे मध्यबिंदू ऐशीं तीन स्थळें एक सरळ रेघेंत येतील

ह्मणोन अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदू फ असेल त्याचे पार अफक व्यास कर आणि त्यास दुसऱ्यें वर्तुळाचे ई स्थळापर्यंत वाढीव जर दुसऱ्यें वर्तुळाचा मध्यबिंदू ईफ रेघेंत येण्यास अशक्य तर मनांत आण किं तो स्थळांतरीं ग बिंदूवर आहे तव्हां अग आणि फग रेघा कर अशा किं दोनीं वर्तुळांस ब आणि उ या स्थळांवर छेदितील

आतां अफग त्रिकोणांत (२०सि०प्र०) अफ आणि अग या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्यें फग बाजूहून अधिक आहे परंतु फ आणि ग हे दोन बिंदू दोन वर्तुळांचे मध्य आहेत यास्तव गअ

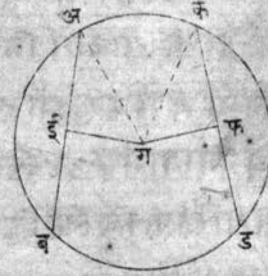
आणि

आणि गड या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर आणि अफ फब या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर यापासून गअ आणि अफ यांची बेरीज गड आणि बफ यांचे बेरिजे बराबर आहे यावरून गड आणि बफ यांची बेरीज गफ हून अधिक होत्ये हें परम अशक्य याजकरितां ग मध्यबिंदू ईफ रेषेचे बाहेर कदापि होत नाहीं हें सिद्ध.

पंचेतालिसावा सिद्धांत

कोणत्याही वर्तुळांत आज्या मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत त्या सर्व परस्पर बराबर आणि आज्या परस्पर बराबर आहेत त्या सर्व वर्तुळमध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत

अब आणि कड कोणत्याही दोन ज्या असतील अशा किं ग मध्यबिंदूपासून बराबर अंतरानें तर त्या दोनही परस्पर बराबर आहेत



ह्मणोन गअ आणि गक या दोन त्रिज्या कर आणि गई गफ हे दोन लंबकर जे ग मध्यबिंदूपासून बराबर अंतर दाखवितात

आतां

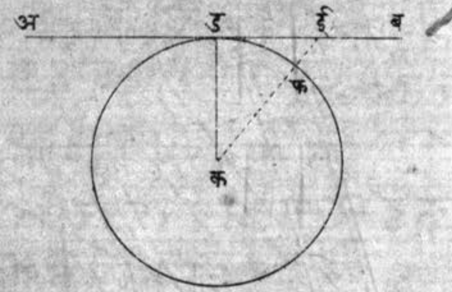
आतां गअई आणि गकफ या दोन काटकोन त्रिकोणांत गअ बाजू गक बाजू बराबर आणि गई गफ चे बराबर आणि ई काटकोन फ काटकोना बराबर याजकरितां हे दो त्रिकोण (३४ सि०२कु०प्र०) एकरूप आहेत आणि एकाची तिसरी अई बाजू दुसर्याचे तिसर्ये कफ बाजू बराबर आहे परंतु (४१सि०प्र०) अब रेघ अई चे दुपट आहे आणि कड रेघ कफ चे दुपट आहे याजकरितां (६प्र०प्र०) अब रेघ कड चे बराबर आहे हें सिद्ध

पुनः जर अब ज्या कड ज्याचे बराबर असेल तर त्या दोन ज्यांचीं वर्तुळमध्यापासून अंतरें गई आणि गफ हीं बराबर होतील

ह्मणोन (सांगीतल्या प्र०) अब रेघ कड चे बराबर आहे तेव्हां एकीचें अई अर्ध दुसरीचे कफ अर्धाचे बराबर आहे आणि गअ गक या दोन त्रिज्या परस्पर बराबर आणि ई काटकोन फ काटकोना बराबर आहे याजकरितां गअई आणि गकफ या दोन त्रिकोणांत (३४सि०२कु०प्र०) एकाची राहिली तिसरी बाजू दुसर्याचे राहिल्ये तिसर्ये बाजू बराबर आहे ह्मणजे गई अंतर गफ अंतराचे बराबर आहे हें सिद्ध

शेताळिसावा सिद्धांत.

जीरेघ त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब आहे ती त्या वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे



जर अडब सरळ रेघ कड वर्तुळ त्रिज्याचे बाहेरील शेवटावर लंब असेल तर अब रेघ वर्तुळास ड स्थळावर स्पर्श मात्र करील

ह्मणोन दुसर्‍ये कोणत्येही ई बिंदूपासून अब रेघेंत वर्तुळ मध्यापर्यंत ईफक रेघ कर अशी कीं वर्तुळ परिघास फ स्थळावर छेदील आतां कडई त्रिकोणांत (वरसांगीतल्याप्र॰) ड काटकोन आहे याजकरितां (१७ सि॰ ३ कु॰ प्र॰) ई लघुकोन आहे ह्मणोन ड कोनाहून उणा आहे परंतु (९ सि॰ प्र॰) अति मोटी बाजू अति मोटये कोनासमोर आहे याजकरितां कई बाजू कड बाजूहून मोटी आहे अथवा त्याचे बराबरीचे कफ हून मोटी आहे यापासून निघतें कीं ई बिंदू वर्तुळाचे बाहेर आहे आणि याप्रमाणें सर्व दुसरे बिंदू जे अब रेघेवर आहेत ते वर्तुळाचे बाहेर आहेत याजकरितां सगळी रेघ वर्तुळाचे बाहेर आहे वर्तुळास ड स्थळावर मात्र स्पर्श

करिते

सत्येताळिसावा सिद्धांत

जेव्हां एक रेघ वर्तुळास स्पर्शमात्र करिते तेव्हां त्या स्पर्श बिंदूपासून वर्तुळमध्य पर्यंत एक त्रिज्या केली ती त्या स्पर्श रेघेवर लंब आहे

जर अब रेघ वर्तुळ परिघास ड बिंदूवर स्पर्श करील तर कड त्रिज्या अब रेघेवर लंब होईल

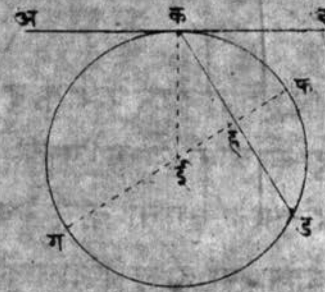
ह्मणोन अब रेघ सर्वांशीं ड बिंदूशिवाय वर्तुळ परिघाचे बाहेर आहे आणि अशी कई रेघ क मध्यबिंदूपासून अब रेघेवर केली तशा दुसऱ्या सर्व रेघा अब रेघेस लागायास वर्तुळ परिघाचे बाहेर गेल्या पाहिजेत याजकरितां कड रेघ सर्वांहून लाहान आहे जा क बिंदूपासून अब रेघेवर होतात त्या सर्वांहून याजकरितां (२९ सि० प्र०) कड रेघ अब रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध.

कुरलरी यांतोन उलट निघतें किं जी रेघ वर्तुळ परिघाचे स्पर्श स्थळापासून केली ती वर्तुळमध्य छेदून पार जाईल

अठ्येताळिसावा सिद्धांत.

वर्तुळाची स्पर्शरेघ आणि ज्या या दोन एकत्र मिळून जो आंत कोन होतो तो त्या ज्याकोसाचे अर्धानें मापिला जातो जर

जर अब रेघ वर्तुळाची स्पर्शरेघ असेल आणि कोणती ही कड ज्या क स्पर्शबिंदूपासून केली आहे तर बकड कोन कफड कौसाचे अर्धानें मापिला जातो आणि अकड कोन कगड कौसाचे अर्धानें मापिला जातो



ह्मणोन ईक त्रिज्या स्पर्शबिंदूपर्यंत कर आणि ज्या रेघेवर ह स्थळीं ईफ त्रिज्या लंब कर

आतां ईफ त्रिज्या कड ज्यावर लंब आहे ह्मणोन (४२ सि० प्र०) ती कफड कौसास दुभागिते याजकरितां कफ कौस कफड कौसाचें अर्ध आहे

नंतर कईह या त्रिकोणांत ह काटकोन आहे तेव्हां (२७ सि० ३ कु० प्र०) बाकी राहिले दुसरे दोन कोन ई आणि क यांची बेरीज एक काटकोना बराबर आहे आणि हे दोन मिळून बकई कोनाबराबर आहेत कारण कई त्रिज्या स्पर्शरेघेवर लंब आहे आतां या दोन बरोबर्यांतून साधारण अवयव अथवा कोन क जाकर तर ई कोन बकड कोना बराबर बाकी राहातो परंतु ई कोन (५७ व्या० प्र०) कफ कौसानें मापिला जातो आणि हा कौस कफड कौसाचे अर्धा बराबर आहे याजकरितां त्याचे बराबर बकड कोन आहे त्यास

निश्चय

निश्चय तेंच माप आहे ह्मणजे कड ज्याचे कफड कौसाचें अर्ध हें सिद्ध

पुनः गईफ रेघ कड ज्यावर लंब आहे आणि (४१ सि० प्र०) कगड कौसास दुभागित्ये याजकरितां कग कौस कगड कौसाचे अर्धा आहे आतां कई रेघ फग रेघेस मिळल्ये आणि (६ सि० प्र०) ई स्थळाचे त्या बाजूचे दोन कोन मिळोन दोन काटकोनां बराबर आहेत आणि कड रेघ अब रेघेस मिळोन क स्थळावर दोन कोन होतात ते दोन काटकोनां बराबर आहेत जर या दोन बराबर बेरिजांतोन हे दोन अवयव अथवा कोन कईह आणि बकह जे पूर्वीं वर बराबर सिद्ध केले तेच जा केले तर बाकी राहिला कईग कोन बाकी राहिल्ये अकह कोना बराबर होईल परंतु कईग कोन (५७ व्या० प्र०) कग कौसानीं मापिला याजकरितां त्याचे बराबरीचे अकड कोनास निश्चित तेंच माप आहे आणि कग कौस कड ज्याचे कगड कौसाचें अर्ध आहे हें सिद्ध ·

प्रथम कुरलरी दोन काटकोनाचें माप अर्द्धा वर्तुळ परिघ आहे कारण बकड आणि अकड हे दोन कोन मिळोन दोन काटकोन आहेत आणि त्यांचें माप कफ आणि कग हे दोन कौस आहेत त्यास हे दोन कौस मिळोन फग व्यासावर अर्धा वर्त्तुळ परिघ होतो

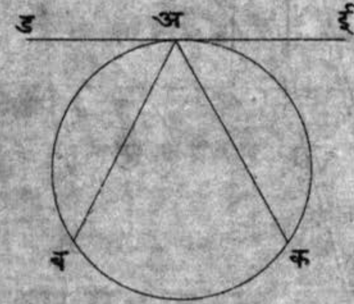
दुसरी कुरलरी यापासून कळतें किं एक काटकोनाचें माप

वर्तुळ

वर्तुळ परिघ पाद अथवा ९० अंश आहेत

एकुणपंनासावा सिद्धांत.

परिघ कोनाचें माप कौसाचें अर्ध आहे जो कौस कोन रेषांचे आंत सांपडला आहे



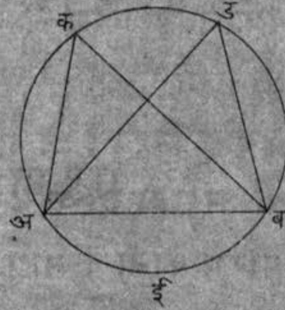
जर बअक परिघ कोन असेल तर त्याचें माप बक कौसाचें अर्ध आहे जो बक कौस त्याचे आंत आला आहे

ह्मणोन मनांत आण कीं डई स्पर्शरेष अस्पर्शबिंदू पार केली तर (४८सि०प्र०) डअक कोनाचें माप अबक कौसाचें अर्ध आहे आणि डअब कोनाचें माप अक कौसाचें अर्ध आहे यांतोन निघतें कीं बरोबरींत वजा करून बाकी राहिला बअक कोन बाकी राहिल्ये बक कौसाचे अर्धानें निश्चय मापतो हें सिद्ध

पंनासावा सिद्धांत

एक वर्तुळखंडांत अथवा वर्तुळाचे एक कौसांत जे कोन आहेत

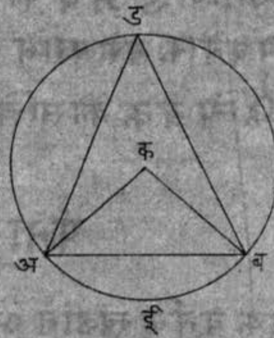
आहेत ते सर्व परस्पर बराबर आहेत



अबडक एक वर्तुळ खंड असेल जांत क आणि ड हे दोन कोन केले अथवा तसेंच अ कोन आणि ब कोन जे अईब सप्लमेंट कौसांत केले तर क कोन ड कोना बराबर होईल कारण या दोन कोनांचें माप (४९सि०प्र०) अईब कौसाचें अर्ध आहे आणि त्यांचें माप बराबर आहे ह्मणोन (१२प्र०प्र०) ते दोनही बराबर आहेत हें सिद्ध

एकार्थनावा सिद्धांत

जर एक वर्तुळांत मध्यकोन आणि परिघ कोन ऐसे दोन एकाच कौसावर आहेत तर मध्यकोन परिघकोनाचे दुपट आहे



जर कोण त्येही वर्तुळांत क कोन मध्यबिंदूवर असेल आणि ड कोन परिघावर असेल आणि ते दोनही एकच अईब कौसावर अथवा एकच अब ज्यावर असतील तर क कोन ड कोनाचे दुपट होईल

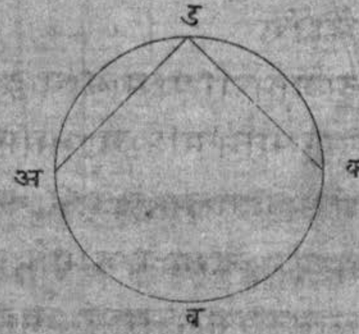
होईल अथवा ड कोन क कोनाचे अर्धा होईल

ह्मणोन मध्यस्थळींचा क कोन (५७ व्या० प्र०) सगळ्ये अ ई ब कोसानें मापिला आणि परिघस्थळींचा ड कोन (४९ सि० प्र०) त्याच अईब कोसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां ड कोन क कोनाचे अर्धा अथवा क कोन ड कोनाचे दुपट आहे हें सिद्ध.

बावंनावा सिद्धांत.

अर्धवर्तुळांत जे कोन होतात ते सर्व काटकोन होतात

जर अबक अथवा अडक अर्धवर्तुळ असेल तर त्यांतील कोणताही कोन जसा या अर्धवर्तुळांत ड कोन आहे तो काटकोन होईल



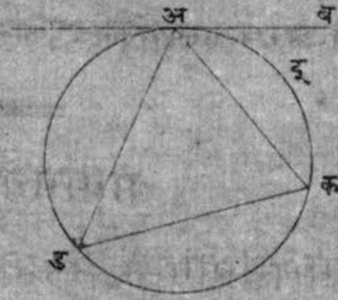
ह्मणोन परिघस्थळींचा ड कोन (४९ सि० प्र०) अबक कोसाचे अर्धानें मापिला आणि हें अर्धपरिघ पाद आहे परंतु (६ सि० ४ कु० प्र०) अथवा (४८ सि० २ कु० प्र०) परिघपाद काटकोनानें माप आहे याजकरितां ड कोन काटकोन आहे हें सिद्ध.

त्रेपंनावा

त्रेपनावा सिद्धांत.

एक वर्तुळ स्पर्शरेघ आणि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या यांपासून जो कोन जाला तो व्युत्क्रम खंडांतील कोना बराबर आहे

जर अब स्पर्शरेघ असेल आणि अक ज्या स्पर्शस्थळापासून केली असेल आणि अडक या व्युत्क्रम खंडांत कोणता ही ड कोन असेल तर ड कोन बअक कोना बराबर होईल



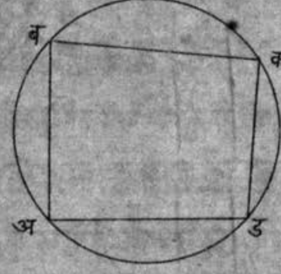
ह्मणोन परिघस्थळींचा ड कोन (४९सि० प्र०) अईक कोसाचे अर्धानें मापिला आणि बअक कोन जो स्पर्शरेघ आणि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या यांत होतो तो (४८सि० प्र०) त्याच अईक कोसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां (११ प्र० प्र०) हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध.

चौपनावा सिद्धांत.

वर्तुळांतील कोणत्याही चौबाजूचे समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे

अबक

अबकड एक चौबाजू वर्तुळांत केलें असेल तर अ आणि क अथवा ब आणि ड या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर होईल



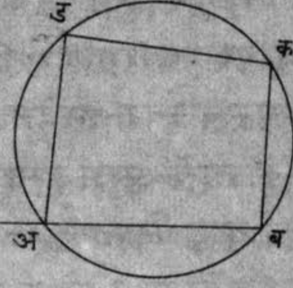
ह्मणोन अ कोन (४९सि०प्र०) डकब कौसाचे अर्धानें मापिला आणि क कोन डअब कौसाचे अर्धानें मापिला याजकरितां अ कोन आणि क कोन यांची बेरीज या दोन कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिली जात्ये हें बेरिजेचें अर्ध अर्धा परिघ आहे परंतु (६सि० ४ कु०प्र०) अर्धापरिघ दोन काट कोनाचें माप आहे याजकरितां अ आणि क या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे याचप्रमाणें दाखविलें जातें कीं ड आणि ब या समोरासमोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे हें सिद्ध

पंचावनावा सिद्धांत·

वर्तुळांत एक चौबाजू असेल आणि त्याची कोणतीही एक बाजू वाढविली असतां बाहेर कोन होईल तो चौबाजूचे आं

तिला

तिलाचे समोरचे कोना बरोबर होईल

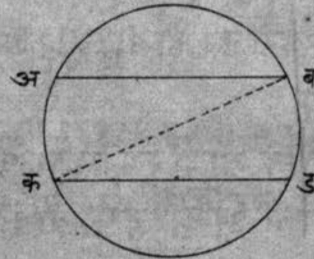


जर अबकड चौबाजू एक वर्तुळांत असेल त्याची एक बाजू अब ई पर्यंत वाढविली तर बाहेरील डअई कोन आंतिलाचे समोरचे क कोना बरोबर होईल

ह्मणोन (६सि०प्र०) डअई आणि डअब याजवळचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे आणि (५४सि० प्र०) क आणि डअब या समोरा समोरचे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे याजकरितां या दोन बरोबर्यांतून साधारण डअब कोन वर्जा केला तर बाकी राहिला क कोन बाकी राहिल्ये डअई कोना बरोबर आहे हें सिद्ध

छप्पंनावा सिद्धांत

एक वर्तुळांत कोणत्याही दोन समांतर ज्या केल्या तर त्यांचे अंतरांतील कौस बराबर आहेत



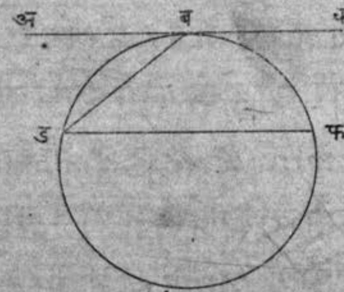
अब आणि कड या दोन समांतर ज्या असतील तर अक बड हे दोन कौस परस्पर बराबर होतील ह्मणजे अक = बड

ह्मणोन

ह्मणोन बक रेघ कर आतां अब कड रेघा परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (१२सि०प्र०) दोन व्युत्क्रम कोन ब आणि क हे परस्पर बराबर आहेत परंतु परिघस्थळींचा ब कोन (४९सि०प्र०) अक कौसाचे अर्धानें मापिला जातो तसें परिघस्थळींचा दुसरा क कोन बड कौसाचे अर्धानें मापिला जातो ह्मणोन अर्धा अक कौस बड कौसाचे अर्धा बरोबर आहे तेव्हां सगळा अक सगळ्या बड चे बराबर आहे हें सिद्ध

सत्तावंनावा सिद्धांत

जेव्हां स्पर्शरेघ आणि त्याच वर्तुळांतील ज्या ह्या परस्पर समांतर आहेत तेव्हां त्यांचे अंतरांतील कौस परस्पर बराबर आहेत



अबक स्पर्शरेघ त्याच वर्तुळांतील डफ ज्याशीं समांतर असेल तर बड बफ हे दोन कौस परस्पर बरोबर होतील ह्मणजे बड = बफ

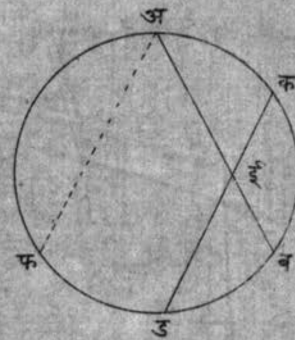
ह्मणोन स्पर्शस्थळापासून ज्याचे शेवटापर्यंत दुसरी बड ज्या कर आतां अक डफ या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत

तेव्हां

तेव्हां (९२सि०प्र०) ड आणि ब हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बरां-बर आहेत परंतु स्पर्शरेघ आणि ज्या यांपासून आलेला ब कोन (४८सि०प्र०) बड कौसाचे अर्धानें मापिला जातो आणि तसा प-रिघस्थळींचाच दुसरा ड कोन (४९सि०प्र०) बफ कौसाचे अर्धा-नें मापिला जातो ह्मणोन अर्धा बड अर्ध्ये बफ चे बराबर आहे याजकरितां सगळा बड सगळ्ये बफ चे बराबर आहे हें सिद्ध

अठ्ठावंनावा सिद्धांत

एक वर्तुळांत दोन ज्या परस्पर छेदितात त्यापासून जो को-न होतो तो त्या दोन ज्यांचे अंतर कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिला जातो



अब कड या दोन ज्या वर्तुळांत **ई** स्थळावर परस्पर छेदितात तर **अईक** कोन अथवा **डईब** कोन **अक डब** या दोन कौसांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिलां जातो

ह्मणोन **अफ** ज्या **कड** ज्याशीं समांतर करआतां **अफ कड** या दोन ज्या समांतर आहेत आणि **अब** रेघ या दोन समां

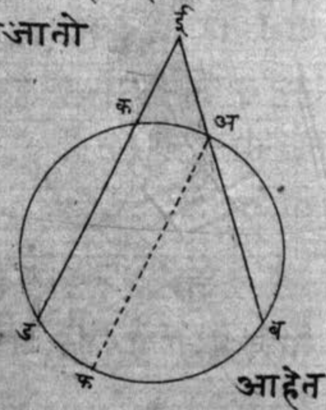
तर

तर रेषांस छेदित्ये याजकरितां (१४ सि० प्र०) अ आणि डईब हे दोन कोन एक बाजूवर आहेत ते परस्पर बराबर परंतु परिघस्थळींचा अ कोन (४९सि० प्र०) बफ कौस ह्मणजे फड आणि बड यांची बेरीज त्याचे अर्धानें मापिलाजातो ह्मणोन याचे बराबरीचा ई कोनही फड आणि बड यांचे बेरिजेचे अर्धानें मापिलाजातो

पुनः अफ कड यादोन ज्या परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (५६सि० प्र०) अक फड हे कौस परस्पर बराबर आहेत ह्मणोन अक डब या दोन कौसांची बेरीज फड डब यादोन कौसांचे बेरिजेचे बराबर आहे याजकरितां जेव्हां ई कोन शेवटील बेरिजेचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम बेरिजेचे अर्धा बराबर आहे हें सिद्ध

एकुणसाठावा सिद्धांत

जो कोन दोन छेदनरेषांपासून वर्तुळाचे बाहेर होतो तो दोन अंतर कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिलाजातो



कोणताही ई कोन ईअब आणि ईकड यादोन छेदनरेषांपासून वर्तुळाचे बाहेर आलाअसेल तर तो कोन अक डब हे दोन कौस जे दोन छेदन रेषांचे आंत आहेत

आहेत त्यांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिलाजातो

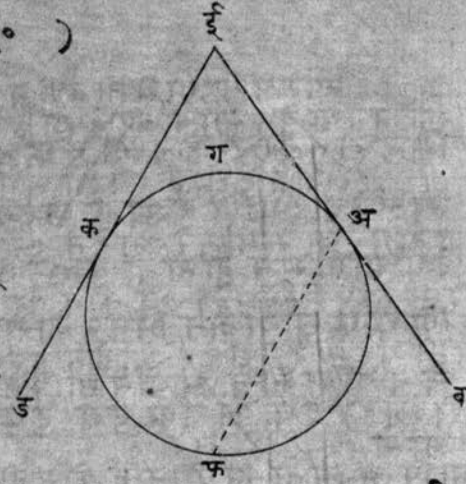
लणोन ईकड रेषेशीं समांतर अफ ज्या करआनां ईड अफ या दोन रेषा समांतर आहेत आणि ईब रेष त्यांस छेदिल्ये याजकरितां (१४सि०प्र०) अ कोन आणि बईड कोन हे एक बाजूचे दोनही परस्पर बराबर आहेत परंतु परिघस्थळींचा अ कोन (४९ सि०प्र०) बफ अथवा डब डफ यांची वजाबाकी याचे अर्धानें मापिलाजातो लणोन ई कोनही डब डफ यांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिलाजातो

पुनः अफ कड या दोन ज्या परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (५६सि०प्र०) कअ डफ हे दोन कौस परस्पर बराबर आहेत लणोन कअ डब यांची वजाबाकी डब डफ यांचे वजाबाकीचे बराबर आहे याजकरितां जेव्हां ई कोन शेवटील वजाबाकीचे अर्धा बराबर आहे तेव्हां प्रथम वजाबाकीचे अर्धा बराबर आहेच हें सिद्ध

साठावा सिद्धांत

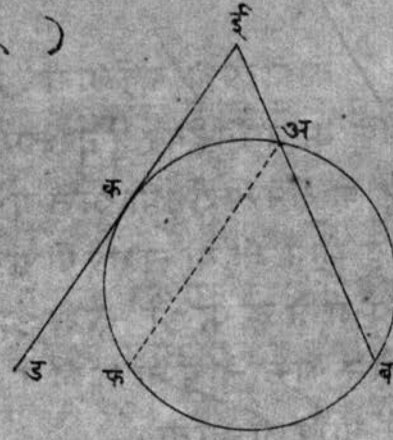
जो कोन दोन स्पर्शरेषानीं होतो तो त्यांचे दोन अंतर कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो ·

कोणत्येही



कोणत्येही वर्तुळास अ आणि क याबिंदूंवर ईब आणि ईड या दोन स्पर्शरेघा असतील तर ई कोन जो या स्पर्शरेघांपासून आला तो कफअ कगअ या दोन कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो

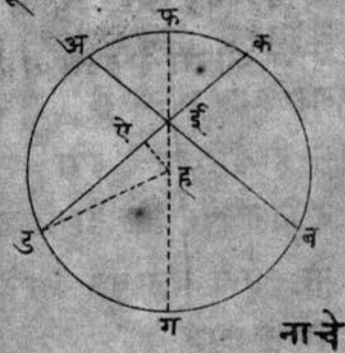
ह्मणोन अफ ज्या ईड शीं समांतर करआतां अफ ईड या दोन समांतररेघा आहेत आणि ईब त्यांस छेदित्ये याजकरितां (२४सि०प्र०) एक बाजूचे अ आणि ई हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत परंतु अ कोन जो अफ ज्या आणि अब स्पर्शरेघ यांपासून होतो तो (४८सि०प्र०) अफ कौसाचे अर्धानें मापिला जातो याजकरितां त्याचे बराबर जो ई कोन तोही त्या अफ कौसाचे अर्धानेंच मापिला जातो ह्मणोन अफ कौस कफअ आणि कफ अथवा (५७सि०प्र०) त्याचे बराबरीचा कगअ यांचे वजाबाकीचे बराबर आहे याजकरितां ई कोन कफअ आणि कगअ या दोन कौसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो हें सिद्ध



कुरलरी यारीतीवरून सिद्ध होतें कीं ई कोन जो ईकड स्पर्शरेघ आणि ईअब छेदन रेघ यांपासून होतो तो कअ आणि कफब या दोन अंतर कोंसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो

एकसष्टावा सिद्धांत

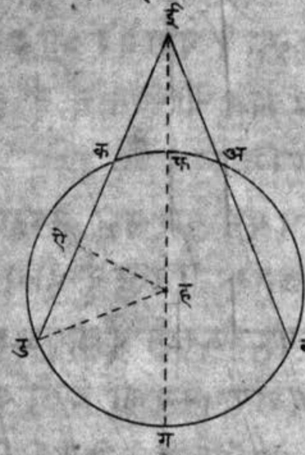
जेव्हां दोनरेघा वर्तुळपरिघास प्रत्येकीं दोनस्थळांवर मिळतात आणि याच दोनरेघा वर्तुळाचे आंत अथवा बाहेर परस्पर छेदितात तर एकीचे अवयवांचा काटकोन चौकोन दुसरीचे अवयवांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे आणि हे अवयव रेघांचे संयोगबिंदूपासून परिघस्थळ बिंदूपर्यंत मोजितात



अब कड या दोनरेघा असतील त्या ई स्थळावर परस्पर छेदितात आणि प्रत्येकीं वर्तुळपरिघास दोनस्थळांवर मिळतात तर अई ईब यांचा काटकोन चौकोन कई ईड यांचे काटकोन चौकोनाचे

नाचे बराबर आहे ह्मणजे अई॰ईब = कई॰ईड

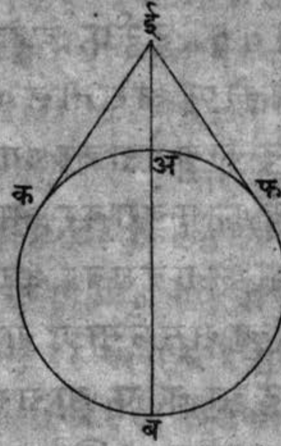
ह्मणोन ई बिंदू छेदून फग व्यास कर आणि ह् वर्तुळमध्यापासून डह् त्रिज्या कर आणि कड वर हऐ लंब कर आतां डईह् त्रिकोण आहे आणि (४९सि॰प्र॰) हऐ लंब कड व्यास दुभागितो याजकरितां कई रेघ डऐ ईऐ या दोन खंडांचे वजाबाकी बराबर



आहे आणि या दोन खंडांची बेरीज डई रेघ आहे पुनः ह् वर्तुळ मध्य आहे आणि डह् फह् गह् या सर्व त्रिज्या परस्पर बराबर आहेत याजकरितां ईग रेघ डह् हई या दोन बाजूंचे बेरिजे बराबर आहे आणि ईफ रेघ त्या दोन बाजूंचे वजाबाकीचे बराबर आहे

परंतु (३५सि॰कु॰प्र॰) काटकोनचौकोन कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांत होतो तो पायाचे खंडांची बेरीज आणि वजाबाकी यांतजो काटकोनचौकोन होतो त्याचे बराबर आहे याजकरितां फई ईग यांतजो काटकोनचौकोन होतो तो कई ईड यांतजो काटकोनचौकोन होतो त्याचे बराबर आहे यारीतीनेंही सिद्ध होतें किं फई ईग यांत

जो काटकोन चौकोन होतो तो अई ईब यांत जो काटकोन चौको-न होतो त्याचे बराबर आहे याजकरितां (९प्र०प्र०) अई ईब यां-चा काटकोन चौकोन कई ईड यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हें सिद्ध

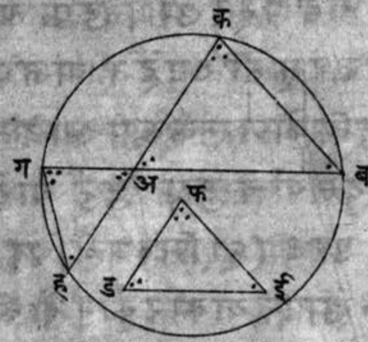


प्रथम कुरलरी जेव्हां असें दुसर्ये आकृतींत डई हीएकरेष ई बिंदूवर फिरून ईक अथवा ईड स्पर्शरेघस्थळीं येत्ये अशी किं क आणि ड हे दोनही बिंदू एकत्र होतात तर कई ईड काटकोन चौकोन कई चा वर्ग होतो कारण कई आणि डई बराबर आल्या याजकरितां छेदनरेघे-चे अवयवांतील काटकोनचौकोन अई ईब हा स्पर्शरेघेचे वर्गा-बराबर आहे ह्मणजे $कई^2$

दुसरी कुरलरी यांतून निघतें किं ईक ईफ या दोन स्पर्श रेघा एकच ई बिंदूपासून वर्तुळास केल्या त्या परस्पर बराबर आहेत कारण यादोहोंचे वर्ग प्रत्येकीं अई ईब यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहेत

बासष्टावा सिद्धांत

समकोन त्रिकोणांत समप्रमाण बाजूंचे अनुक्रमें जे काट-कोन चौकोन होतात ते परस्पर बराबर आहेत ·



अबक डईफ हे दोन समकोन त्रिकोण असतील ज्यांत अ कोन ड कोना बराबर आणि ब कोन ई कोना बराबर आणि क कोन फ कोना बराबर आहे आणि यांचा समप्रमाण बाजू अब डई या क फ या समकोनांसमोर आहेत आणि अक डफ या समप्रमाण बाजू ब ई या समकोनांसमोर आहेत तर अब डफ यांचा काटकोन चौकोन अक डई यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल

आतां अब रेघ वाढीव आणि अग डफ चे बराबर कर आणि ब क ग हे तीन बिंदू छेदून पार एक बकगह वर्तुळ कर असें किं कअ रेघ वाढवून ह बिंदू परिघावर येईल असें कर नंतर गह सांध

आतां ग कोन आणि क कोन जे दोनही बह कौसावर आहेत ते (५०सि०प्र०) परस्पर बराबर तसें ह कोन आणि ब कोन

जें

जे दोन ही एकच कौसावर आहेत तेही याच प्रमाणें परस्पर बराबर आणि (७ सि॰ प्र॰) असल्यावरील समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर आहेत याजकरितां अगह त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं समकोन आणि याजवरूनच डफई त्रिकोणाशींही समकोन आहे परंतु अग डफ या दोन बाजू (वर सांगीतल्याप्रमाणें) परस्पर बराबर आहेत याजकरितां (२ सि॰ प्र॰) अगह डफई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि एकाचा दोन बाजू अग अह दुसर्याचे डफ डई या दोन बाजूंचे बराबर आहेत

परंतु (६१ सि॰ प्र॰) गअ॰ अब हा काटकोनचौकोन हअ॰ अक या काटकोनचौकोनाचे बराबर याजकरितां डफ॰ अब हा काटकोनचौकोन डई॰ अक या काटकोनचौकोना बराबर आहे हें सिद्ध

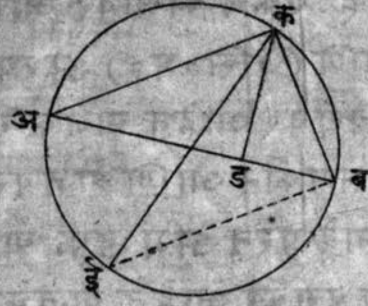
त्रेसष्टावा सिद्धांत

कोणत्येही त्रिकोणाचे दोन बाजूंचा काटकोनचौकोन त्याचत्रिकोणाचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास आणि तिसर्ये बाजूवर समोरील कोनापासून लंब यांचे काटकोनचौकोनाचे बराबर आहे

कोणत्येही अबक त्रिकोणाचे बाहेर वर्तुळ असेल त्याचा

व्यास

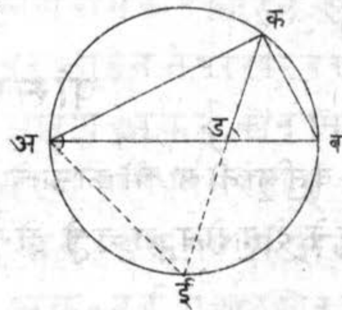
व्यास कई आहे आणि त्या त्रिकोणांत अब बाजूवर तिचे समोरचे क कोनापासून कड लंब असेल तर अक • कब या काटकोनचौकोनाचे = कड • कई हा काटकोनचौकोन आहे



ह्मणोन बई सांध तर अकड आणि ईकब या दोन त्रिकोणांत अ आणि ई हे दोन कोन बक कौसावर आहेत ते (५० सि० प्र०) परस्पर बराबर आणि अडक काटकोन ईबक कोना बराबर आहे कारण हाही (५२ सि० प्र०) काटकोनच आहे या करितां या दोन त्रिकोणांचे तिसरेही कोन बराबर आहेत ते व्हां हे दोनही त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत यांतोन निघनें किं अक आणि कई या बाजू जा ड आणि ब या बराबर कोनांचे समोर आहेत आणि कड कब या बाजू जा <अ आणि <ई यांचे समोर आहेत त्या सर्व समप्रमाण बाजू आहेत या करितां (६२ सि० प्र०) अक • कब हा प्रथम आणि शेवट यांचा काटकोनचौकोन कई • कड या बाकी राहिल्ये दोहोंचे काटकोनचौकोनाचे बराबर आहे हें सिद्ध

चौसष्टावा सिद्धांत

ज्ञीरेघ त्रिकोणाचा कोणताही कोन दुभागिल्ये त्यारेघेचा वर्ग आणि त्यारेघेनें दुभागिल्ये बाजूचे दोन खंडांचा काटकोन चौकोन यांची बेरीज दुभागिल्ये कोनाचे दोहोंकडील राहिल्ये दोन बाजूचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे



अबक त्रिकोण असेल जाचा क कोन कड रेघेनें दुभागिला आहे तर $\text{कड}^2 + \overline{\text{अड}\cdot\text{डब}}$ हा काटकोन चौकोन = अक • कब हा काटकोन चौकोन आहे

ह्मणोन त्रिकोणाचे बाहेर वर्तुळ करून कड रेघ परिघावर ई पर्यंत वाढीव आणि अई सांध

आतां अकई बकड या दोन त्रिकोणांत अकड बकड हे दोन कोन (वरसांगीतले प्र॰) बरोबर आणि अबक अईक हे दोन कोन जे अक कौसावर आहेत ते (५०सि॰प्र॰) परस्पर बराबर आहेत याजकरितां कअई कडब हे तिसरेही दोन कोन (१७सि॰१कु॰प्र॰) बराबर आणि अक कड आणि कई कब यासमप्रमाण बाजू आहेत कारण बरोबर कोनाचे समोर आहेत याजकरितां (६२सि॰प्र॰) अक • कब या काटकोन चौकोनाचे =

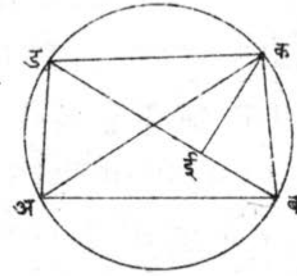
कड

कड • कई हा काटकोन चौकोन आहे परंतु (३०सि०प्र०) कड • कई याचे = कड² + कड • डई हा काटकोन चौकोन आहे याज- करितां अक • कब या काटकोन चौकोनाचे ही = कड² + कड • डई अथवा कड² + अड • डब हा आहे कारण (६१सि०प्र०) कड • डई याचे = अड • डब हा आहे हें सिद्ध

पांसष्टावा सिद्धांत

वर्तुळांतील चौकोनाचे दोन कर्णांच्या काटकोन चौकोन समोरा- समोरचे दोन दोन बाजूचे दोन काटकोन चौकोनांचे बेरिजे बराबर आहे

वर्तुळांत एक अबकड चौ बाजू असेल त्याचा कर्णरेघा अक आणि बड यांचा अक • बड या काटकोन चौकोनाचे = अब • डक हा काटकोन चौकोन + अड • बक हा काटकोन चौकोन आहे



म्हणोन कई रेघ करा अशीकिं बकई कोन डकअ कोना बराब- र होईल आतां अकड आणि बकई हे दोन त्रिकोण समकोन आहे- त कारण अ आणि ब हे दोन कोन डक कौसावर आहेत ते परस्पर

बराबर

बराबर आणि डकअ बकई हे दोन कोन (वरसांगीतल्या॰) बराबर याजकरितां त्यांचे तिसरे अडक बईक हे दोन कोन परस्पर बराबर आहेत आणि अक बक आणि अड बई या समप्रमाण बाजू आ-हेत कारण समकोनांचे समोर आहेत याजकरितां (६२ सि॰प्र॰) अक॰बई या काटकोन चौकोनाचे = अड॰बक हा काटकोन चौकोन आहे

पुनः अबक डईक हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत कारण बअक बडक हे दोन कोन बक कोसावर आहेत ते परस्पर बराबर आणि डकई बकअ हे दोन कोन साधारण अकई कोन मिळवि-ल्यामुळें परस्पर बराबर आहेत याजकरितां यांचे तिसरेही ई आणि अबक हे दोन कोन परस्पर बराबर परंतु अक डक आणि अब डई या समप्रमाण बाजू आहेत याजकरितां अक॰डई हा काटकोन चौकोन (६२ सि॰प्र॰) अब॰डक या काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

यांतून निघतें कि बरोबर मिळवणीनें या काटकोन चौकोनांची बेरीज अक॰बई + अक॰डई याचे = अड॰बक + अब॰डक हा ही आहे परंतु (३॰ सि॰प्र॰) पूर्व दोन काटकोन चौकोनाचे = अक॰बई + अक॰डई = अक॰बड याजकरितां अक॰बड हा काट-कोन चौकोन (१ प्र॰प्र॰) अड॰बक + अब॰डक या शेवटील बेरिजे बराबर आहे हें सिद्ध

गुणोत्तर

गुणोत्तर आणि प्रमाण

व्याख्या

७६ जें एक पद त्याच जातीचे दुसर्‍ये पदास वेळा संख्येकरून प्रमाण आहे त्यावेळा संख्यांकास गुणोत्तर ह्मणतात

टीप दोन संख्यांचे युग्मांत अग्रसराचे बराबरीचे उपाग्रसराचे जितके भाग होतात तें गुणोत्तराचें माप आहे जसें कोणतेंही पद २ दोन यासंख्येनें दाखविलें याचें गुणोत्तर त्याचजातीचें दुसरें पद ६ साहा यासंख्येनें दाखविलें याचे संगातीं जें होतें तें याप्रमाणें दाखविलें जातेंकिं ६ भागिले २ दोहोनी अथवा $\frac{६}{२} = ३$ ह्मणजे २ दोन ६ साहांमध्यें तीनवेळा जातात अथवा त्यांचा तिसरा भाग आहे यासारिखें ३ यापदाचें ६ या समजाति पदासंगातीं गुणोत्तर यारीतीनें मापिलें जातेंकिं $\frac{६}{३} = २$ ४ यापदाचें ६ यासमजाती पदासंगातीं गुणोत्तर $\frac{६}{४} = १\frac{१}{२}$

६ याचें ४ यासमजाती संगातीं गुणोत्तर $\frac{४}{६} = \frac{२}{३}$ याप्रमाणें पुढेंही आणावें

७७ ज्यांचें गुणोत्तर बराबर आहे तीं पदें प्रमाणांत आहेत

७८ तीन पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत जेव्हां प्रथमाचें गुणोत्तर दुसर्‍या संगातीं आहे त्याचे बरोबर दुसर्‍याचें गुणोत्तर तिसर्‍या संगातीं आहे जसें या तीन पदांमध्यें अ (२) ब (४) क (८)

यांत

यांत $\frac{४}{२} = \frac{८}{४} = २$ ह्मणजे या दोनही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे

७९ चारपदें परस्पर प्रमाणांत आहेत जेव्हां प्रथमाचें गुणोत्तर दुसर्या संगातीं आहे त्याचे बरोबर तिसर्याचें गुणोत्तर चौथ्यासंगातीं आहे जसें या चारपदांमध्यें अ (२) ब (४) क (५) ड (१०) यांत $\frac{४}{२} = \frac{१०}{५} = २$ या दोनही युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे

टीप. चारपदें परस्पर प्रमाणांत आहेत जसें अ ब क ड तर त्यांस याप्रमाणें लिहितात जसा अ : ब :: क : ड आणि याप्रमाणें उच्चारितात जसें अ · ब यास होतो तसा क · ड यास होतो परंतु जेव्हां तीन पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत तेव्हां मधील पद लिहिण्याचे व उच्चारण्याचे रीतींत दोनवेळ येतें जसा अ : ब :: ब : क जसा अ · ब यास होतो तसा ब · क यास होतो

८० प्रमाणांत तीनपदें असतील तर मधचेंपद आद्यंतपदांचें मध्यप्रमाण आहे आणि अंतपद प्रथम आणि दुसरें यांचें तिसरें प्रमाण ह्मणतात

८१ प्रमाणांत चारपदें असतील तर अंतपद अनुक्रमानें दुसर्यें तीनपदांचें चतुःप्रमाण ह्मणतात

८२ कित्येक पदें आहेत त्यांत जर जवळजवळचे पदांचें गुणोत्तर बराबर आहे तर तींपदें अखंड प्रमाणांत आहेत असें ह्मणतात जसें पहिलें दुसर्यास तसें दुसरें तिसर्यास तिसरें चौथ्यास याप्रमाणें पुढेंही यासर्वांचें गुणोत्तर बराबर आहे

आणि

आणि जसें या संख्यां मध्यें १ · २ · ४ · ८ · १६ इत्यादि यांत गुणोत्तर २ आहेत याजकरितां हीं सर्व पदें अखंड प्रमाणांत आहेत

८३ जीं कित्येक पदें आहेत त्यांत आद्यंतांचें गुणोत्तर त्या पदांचे गुणोत्तरांचे गुणाकारा बराबर आहे त्यास संयुक्त गुणोत्तर ह्मणतात जसें अ ब क ड यांत आदि अ याचें अंत ड याचे संगातीं जें गुणोत्तर आहे तें अ आणि ब यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें ब क यांचें गुणोत्तर तें पुनः क ड यांचे गुणोत्तरानें गुणिलें या गुणाकाराचे बराबर आहे जसें १ · २ · ४ · ८ · यांत ८ हें संयुक्त गुणोत्तर आहे

८४ जेव्हां प्रमाण पदांत अग्रसरास उपाग्रसर केला आणि उपाग्रसरास अग्रसर केला तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास व्यस्त गुणोत्तर ह्मणतात जसें जर १ : २ : : ३ : ६ तर व्यस्तानें २ : १ : : ६ : ३

८५ जेव्हां अग्रसरा संगातीं अग्रसर आणि उपाग्रसरा संगातीं उपाग्रसर अशारीतीनें पदें मिळवितात तेव्हां त्यास परावृत्त प्रमाण ह्मणतात जर १ : २ : : ३ : ६ तर परावर्त्तानें १ : ३ : : २ : ६

८६ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची बेरीज अग्रसरा संगातीं अथवा उपाग्रसरा संगातीं मिळवितात तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास मिश्र गुणोत्तर ह्मणतात जसें जर १ : २ : : ३ : ६ तर मिश्रणानें

१ + २ : १ : : ३ + ६ : ३ आणि १ + २ : २ : : ३ + ६ : ६

८७ जेव्हां अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची वजा बाकी अग्रसरा संगातीं

गातीं अथवा उपाय्रसरा संगातीं मिळवितात तेव्हां त्यांचे गुणोत्तरास भक्त गुणोत्तर ह्मणतात जसें जर १ : २ : : ३ : ६ तर भागाकारानें २ − १ : १ : : ६ − ३ : ३ आणि २ − १ : २ : : ६ − ३ : ६

टीप या व्यारव्येंत भक्त आणि भागाकार या शब्दांचा अर्थ हा आहे कीं वजाबाकी किंवा भागणें ह्या यशाव्ये व्यारव्येंत मिळवण्याचा प्रकार आहे त्याची उलट वजाबाकी एथे अर्थ होय

सासष्टावा सिद्धांत

कोणत्याही दोन संख्या आणि त्या संख्यांचे समगुणाकार यांचें गुणोत्तर बराबर आहे

अ आणि ब या दोन संख्या आणि त्यांचे समगुणाकार मअ आणि मब असतील ह्मणजे म कोणतीही संख्या असेल तर मअ आणि मब यांचें गुणोत्तर अ आणि ब यांचे गुणोत्तरा बराबर होईल अथवा अ : ब : : मअ : मब कारण $\frac{\text{मब}}{\text{मअ}} = \frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ या दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे हें सिद्द

कुरलरी यांतोन निघतें किं कोणत्येही संख्यांचे सारिख्ये अवयवांचें आणि त्या अवयवांसहित पूर्ण संख्यांचें गुणोत्तर बराबर आहे कारण पूर्णसंख्या त्या सारिख्ये अवयवांचा समगुणाकार आहे ह्मणोन अ आणि ब हे मअ आणि मब यांचे सारिखे अवयव आहेत

सतसष्टावा

सतसष्टावा सिद्धांत

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं परावर्त्तनेंही प्रमाणांत होतील अथवा दोन अग्रसरांचें गुणोत्तर दोन उपाग्रसरांचे गुणोत्तराबराबर होईल

जर अ : ब : : मअ : मब असेल तर अ : मअ : : ब : मब होईल

कारण $\frac{\text{मअ}}{\text{अ}}$ = म आणि $\frac{\text{मब}}{\text{ब}}$ = म हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे

अडसष्टावा सिद्धांत

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं व्यस्तानेंही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब : : मअ : मब होईल तर ब : अ : : मब : मअ होईल

कारण $\frac{\text{मअ}}{\text{मब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे

एकुणहात्तरावा सिद्धांत

जेव्हां चारपदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां तीं मिश्रणानें आणि

भागाकारानें

भागाकारानें ही प्रमाणांत होतील

$$\text{जर अ : ब : : मअ : मब}$$

$$\text{तर ब} \pm \text{अ : अ : : मब} \pm \text{मअ : मअ}$$

$$\text{ब} \pm \text{अ : ब : : मब} \pm \text{मअ : मब}$$

कारण $\frac{\text{मअ}}{\text{मब} \pm \text{मअ}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब} \pm \text{अ}}$ आणि $\frac{\text{मब}}{\text{मब} \pm \text{मअ}} = \frac{\text{ब}}{\text{ब} \pm \text{अ}}$

कुरलरी यांतून दिसतें किं जेव्हां एक जातीचीं चारपदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां अतिह्मोटें आणि अतिलाहान या दोन पदांची बेरीज दोन मध्यपदांचे बेरिजेहून अधिक आहे ह्मणोन $\text{अ : अ + ब : : मअ : मअ + मब}$ यापदांत अतिलाहान पद अ आणि अतिह्मोटें मअ + मब आहे तेव्हां $\text{अ + मअ + मब} = \overline{\text{१+म}}\cdot\text{अ + मब}$ ही बेरीज अतिलाहान आणि अतिह्मोटें या दोन पदांची $\text{अ + ब + मअ} = \overline{\text{१+म}}\cdot\text{अ+ब}$ या दोन मध्यपदांचे बेरिजेहून अधिक आहे हें सिद्ध

सत्तरावा सिद्धांत

जर चारपदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांचे अग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार आणि उपाग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार केले तर तेही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब : : मअ : मब असेल आणि पअ पमअ

हे दोन

हे दोन अग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार असतील तसे कब कमब हे उपाग्रसरांचे कोणतेही समगुणाकार असतील

तर पअ : कब : : पमअ : कमब

कारण $\frac{कमब}{पमअ} = \frac{कब}{पअ}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध

एकाहोत्तरावा सिद्धांत

जर चारपदें प्रमाणांत आहेत आणि त्यांचे दोन उपाग्रसरांत कोणतींही दोनपदें मिळविलीं अथवा वजाकेलीं परंतु त्या दोन पदांचें गुणोत्तर अग्रसरांचे गुणोत्तरा बराबर असावें तरी हीं तीं प्रमाणांत होतील

जर अ : ब : : मअ : मब असेल आणि नअ नमअ हीं कोणतींही दोनपदें असतील ज्यांचें गुणोत्तर दोन अग्रसरांचे गुणोत्तरा बराबर आहे

तर अ : ब ± नअ : : मअ : मब ± नमअ

कारण $\frac{मब \pm नमअ}{मअ} = \frac{ब \pm नअ}{अ}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध

बाहात्तरावा

बाहात्तरावा सिद्धांत

जर कोणतीं कितीही पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांतील को- णत्येही युग्मांचा अग्रसर त्याच युग्मांतील उपाग्रसरास होतो तशी त्या पदांतील सर्व अग्रसरांची बेरीज त्यांतील सर्व उपाग्रसरांचे बेरि- जेस होईल

जर अ : ब :: मअ : मब :: नअ : नब इत्यादि

तर अ : ब :: अ + मअ + नअ : ब + मब + नब

कारण $\frac{ब+मब+नब}{अ+मअ+नअ} = \frac{\overline{१+म+न}\cdot ब}{\overline{१+म+न}\cdot अ} = \frac{ब}{अ}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराब- र हें सिद्ध

त्र्याहात्तरावा सिद्धांत

जर दोन अखंड पदें आणि त्यांचे दोन तुकडे यांचें गुणोत्तर बराबर आहे तर त्या अखंडांशीं त्यांचे तुकडयांची वजाबाकी ही प्रमाणांत होईल अशीं अखंड पदें आहेत

जर अ : ब :: $\frac{म}{न}$ अ : $\frac{म}{न}$ ब

तर अ : ब :: अ − $\frac{म}{न}$ अ : ब − $\frac{म}{न}$ ब

कारण $\frac{ब-\frac{म}{न}ब}{अ-\frac{म}{न}अ} = \frac{\overline{१-\frac{म}{न}}\cdot ब}{\overline{१-\frac{म}{न}}\cdot अ} = \frac{ब}{अ}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध

चौर्‍याहात्तरावा सिद्धांत

जर कोणतींही पदें प्रमाणांत आहेत तर त्यांचें वर्गघनादिक अथवा वर्गघनादि मूळही प्रमाणांत होईल

जर अ : ब : : मअ : मब, तर $\text{अ}^{\text{न}} : \text{ब}^{\text{न}} :: \text{म}^{\text{न}}\text{अ}^{\text{न}} : \text{म}^{\text{न}}\text{ब}^{\text{न}}$

कारण $\frac{\text{म}^{\text{न}}\text{ब}^{\text{न}}}{\text{म}^{\text{न}}\text{अ}^{\text{न}}} = \frac{\text{ब}^{\text{न}}}{\text{अ}^{\text{न}}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर आहे हें सिद्ध

पंचेहात्तरावा सिद्धांत

जर दोन संच प्रमाणांत आहेत तर क्रमानें समोरासमोरच्या पदांचे गुणाकार अथवा काटकोन चौकोनही प्रमाणांत होतील

जर अ : ब : : मअ : मब

आणि क : ड : : नक : नड

तर अक : बड : : मनअक : मनबड

कारण $\frac{\text{मनबड}}{\text{मनअक}} = \frac{\text{बड}}{\text{अक}}$ हें दोहोंचें गुणोत्तर बराबर हें सिद्ध

शाहात्तरावा

शाहान्तराचा सिद्धांत

जर चारपदें प्रमाणांत आहेत तर आद्यंतपदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन दोनमध्यपदांचे गुणाकाराचे अथवा काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

जर अ : ब : : मअ : मब

तर अ × मब = ब × मअ = अमब बराबर हें सिद्ध

सत्याहान्तराचा सिद्धांत

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील तर आद्यंत पदांचा गुणाकार अथवा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गा बरोबर होईल

जर अ मअ म^{2}अ हीं तीनपदें अखंड प्रमाणांत असतील

अथवा अ : मअ : : मअ : म^{2}अ

तर अ × म^{2}अ = म^{2}अ^{2} बराबर हें सिद्ध

अठयेहात्तरावा सिद्धांत

जर कितीएक पदें अखंड प्रमाणांत आहेत तर पहिलें आणि तिसरें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबराबर होईल आणि पहिलें आणि चौथें यांचें गुणोत्तर पहिलें आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे घनाबराबर होईल याप्रमाणें पुढेंही

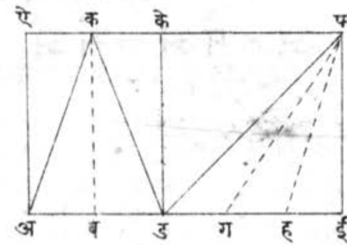
जर अ, मअ, $म^2$अ, $म^3$अ, इत्यादिक पदें अखंड प्रमाणांत असतील

तर $\frac{मअ}{अ} = म$ परंतु $\frac{म^2अ}{अ} = म^2$ आणि $\frac{म^3अ}{अ} = म^3$ इत्यादिक

एकुणऐशीवा सिद्धांत

त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन ज्यांची उंची बराबर आहे ते परस्परांस प्रमाण आहेत जसे त्यांचे पाये

अडक डईफ हे दोन त्रिकोण बराबर उंचीचे अथवा **अई ऐफ** या दोन समांतर रेघांमध्यें असतील तर **अडक** या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ **डईफ** या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळास तसें प्रमाण होईल



जसें

जसें अड पाया डई पायास आहे अथवा जसा अड : डई : : अडक त्रिकोण : डईफ त्रिकोणास

ह्मणोन या आकृतींत अड पाया डई पायास असावा अशी भलती संख्या म (२) दुसरी भलत्ये न (३) या संख्येस होत्ये आणि त्या संख्येप्रमाणें पायास बराबर तुकड्यानीं भाग ह्मणजे याप्रमाणें कीं अब बड डग गह हई हे सर्व परस्पर बराबर कर आणि त्यांचे भाग बिंदूपासून दोन त्रिकोणांचे क आणि फ याशिरोबिंदूपर्यंत बक गफ हफ ऐशा तीनरेघा कर ह्मणजे या रेघा अडक डईफ या दोन त्रिकोणांचे तितके भाग करितात जितके भाग यांचे पायांत आहेत आणि हे सर्वभाग त्रिकोण अबक त्रिकोणाचे बराबर आहेत कारण (२५ सि० २ कु० प्र०) त्यासर्व त्रिकोणाकृति तुकड्यांचे पाये आणि उंची बराबर आहे ह्मणोन अबक त्रिकोण बडक डगफ गहफ हईफ यांचे प्रत्येकीं बराबर आहे यास्तव अडक त्रिकोण डईफ त्रिकोणास प्रमाण आहे असे अडक त्रिकोणाचे तुकडे म (२) डईफ त्रिकोणाचे तुकडे न (३) यांस आहेत ह्मणोन (७९ व्या० प्र०) जसा अड पाया डई पायास

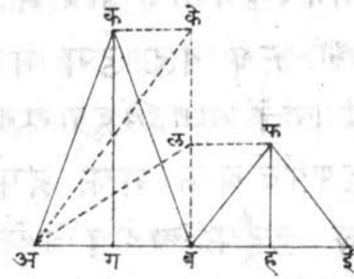
याचरीतीनेंही अडकेए हा समांतरबाजू चौकोन डईफके या समांतरबाजू चौकोनास आहे जसा अड पाया डई पायास आहे कारण यांचें गुणोत्तर भागाचे बराबर आहे जसा म (२) न (३) ला आहे हें सिद्ध

ऐशीवा

ऐशीवा सिद्धांत

समांतर बाजू चौकोन आणि त्रिकोण ज्यांचा पाया बराबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची

अबक बईफ हे दोन त्रिकोण असतील ज्यांचे पाये अब बई हे दोन बराबर आहेत आणि ज्यांची उंची कग फह हे दोन लंब आहेत तर अबक त्रिकोण : बईफ त्रिकोण : : कग : फह



ह्मणोन बके रेघ अब रेघेवर कग चे बराबर लंबकर यांत फह चे बराबर बल कर नंतर अके अल सांध

आतां (२५ सि० २ कु० प्र०) ते त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत ज्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे या करितां अबके त्रिकोण अबक त्रिकोणाचे बराबर आहे आणि अबल त्रिकोण बईफ त्रिकोणाचे बराबर आहे परंतु अबके आणि अबल हे दोन त्रिकोण बके आणि बल या दोन पायांवर आहेत आणि त्यांची उंची बराबर अब आहे अशे विचारानें पाहा तर (७९ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण परस्पर प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे पाये ह्मणोन अबके त्रिकोण : अबल त्रिकोण : : बके : बल

परंतु

परंतु अबके त्रिकोण = अबक त्रिकोण आणि अबल त्रिकोण = बईफ त्रिकोण आहे आणि बके = कग आणि बल = फह आहे

याजकरितां अबक त्रिकोण : बईफ त्रिकोण : : कग : फह आहे

आणि (२६ सि० प्र०) समांतरबाजू चौकोन त्यात्रिकोणाचे दुपट आहे ज्याचा पाया आणि उंची याचे बराबर आहे

याजकरितां समांतरबाजू चौकोन ज्यांचा पाया बराबर आहे तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची हें सिद्ध

कुरलरी यापासून सिद्ध जालें कीं त्रिकोण आणि समांतर बाजू चौकोन ज्यांचा पाया बराबर आहे तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जशी त्यांची उंची आणि (७९ सि० प्र०) जेव्हां त्यांची उंची बराबर आहे तेव्हां ते प्रमाणांत आहेत जसा त्यांचा पाया याजकरितां सर्वत्र उंची आणि पाया हींदोन ज्यांचीं बराबर नाहींत तेपरस्पर प्रमाणांत आहेत जसा पाया आणि उंची यांचे प्रत्येक काटकोन चौकोन अथवा गुणाकार

एक्यायशीवा सिद्धांत

जर चाररेघा प्रमाणांत असतील तर प्रथम आणि शेवटील

या दोन रेघांचा काटकोन चौकोन दोनमध्यरेघांचे काटकोन चौको- नाचे बराबर होईल आणि याचे उलटें जर प्रथम आणि शेवटील या दोनरेघांचा काटकोन चौकोन दोनमध्यरेघांचे काटकोन चौको- नाचे बरांबर असेल तर त्याचाररेघा प्रमाणांत आहेत

अब कड या चाररेघा प्र माणांत असतील अथवा अ : ब : : क : ड तर अ आ णि ड यांचा काटकोन चौकोन ब आणि क यांचे काटकोन चौकोना चे बराबर होईल ह्मणजे अ • ड = ब • क

ह्मणोन या चाररेघा अशाकर कीं त्यांचे शेवट एकबिंदूवर मिळोन त्याबिंदूस्थळीं चारकाटकोन होतील आणि त्या रेघांशीं दुस र्या समांतररेघाकर अशाकीं त्यांपासून प क आणि र असेतीन काटकोन चौकोन होतील

आतां प आणि र यादोन काटकोन चौकोनांची उंची बराबर ह्मणजे समांतर रेघांचे एक जोडामध्यें आहेत याजकरितां (७९ सि॰ प्र॰) परस्पर प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे पाये अ आणि ब तसे क आणि र हे दोन काटकोन चौकोन समांतर रेघांचे एक जोडामध्ये आहेत• अथवा त्यांची उंची बराबर याजकरितां ते परस्परांस प्रमाण आहेत जसे त्यांचे पाये क आणि ड परंतु (वरसांगीतल्याप्रमाणे)

अआणिब

अ आणि ब यांचें गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे ह्मणोन प आणि र याकाटकोन चौकोनाचें गुणोत्तर क आणि र या काटकोन चौकोनाचे गुणोत्तराबराबर आहे याजकरितां प आणि क हे दोन काटकोन चौकोन बराबर आहेत हें सिद्ध

पुनः जर अ आणि ड यांचा काटकोन चौकोन ब आणि क यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर असेल तर अ · ब · क · ड या चार रेघा प्रमाणांत आहेत अथवा अ : ब : : क : ड

ह्मणोन पूर्वप्रमाणें रेघा करून काटकोन चौकोन करावे आतां हे समांतरबाजू चौकोन समांतररेघांचे एकच जोडामध्यें होऊन परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्यांचे पाये याजकरितां प : र : : अ : ब आणि क : र : : क : ड परंतु पूर्वी सांगीतल्याप्रमाणें प आणि क हे परस्पर बराबर आणि र चे संगातीं या दोहोंचें गुणोत्तर बराबर याजकरितां अ आणि ब यांचें गुणोत्तर क आणि ड यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे ह्मणजे अ : ब : : क : ड हें सिद्ध

प्रथम कुरलरी जर दोन मध्यपदें ह्मणजे दुसरें आणि तिसरें हीं बरोबर आहेत तर यांचा काटकोन चौकोन दुसर्‍ये पदाचा वर्ग होतो ह्मणजे हा वर्ग दुसरें आणि तिसरें या पदांचे ठिकाणीं होतो यांतून निघतें कीं जेव्हां तीनरेघा प्रमाणांत आहेत तेव्हां दोन शेवट पदांचा काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गा बराबर आहे

आहे आणि याचें उलटें जेव्हां दोन शेवट पदांच्या काटकोन चौकोन मध्यपदाचे वर्गाबराबर आहे तेव्हां त्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत

दुसरी कुरलरी अंकगणित आणि बीजगणित या दोहोंतील प्रमाणरीतीवरून कळतें कीं जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां त्यांचे दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्यपदांचे गुणाकाराबराबर आहे आणि भूमितींतील या सिद्धांतावरून कळतेंकीं दोन शेवट पदांवर केला काटकोन चौकोन दोन मध्य पदांवर केल्ये काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे यापासून निघतें कीं काटकोन चौकोनाचें क्षेत्र ह्मणजे पातळी त्याचे लांबी रुंदीचे गुणाकारानें दाखविलीआहे आणि सामान्यतः भूमितीमध्यें काटकोन चौकोन यासारिखा आहे जे लांबी आणि रुंदी या दोन मापांचा गुणाकार अथवा पाया आणि उंची या दोन मापांचा गुणाकार आणि चौरस यासारिखा आहे जे एकबाजूचे मापाचा वर्ग ह्मणजे त्याणें तेंच गुणिलें यांचें नांव वर्ग यावरून मनांत आणावें कीं काटकोन चौकोन आणि चौरस हे गुणाकाराबराबर आहेत

तिसरी कुरलरी जसा या सिद्धांतांतील कारण विस्तार काटकोन चौकोनावर लागतो तसाच समांतर बाजू चौकोनावरही लागतो याजकरितां एकच गुण सर्व समांतर बाजू चौकोनांवर लागतो ज्यांचे कोन परस्पर बराबर आहेत आणि त्रिकोण समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धा आहे ह्मणोन जा त्रिकोणांचे कोन परस्पर बराबर आहेत त्यां

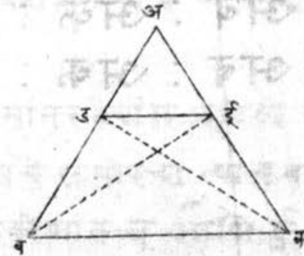
जवरही लागतो एकच गुण ह्मणजे जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण यांचे बरोबर कोनांच्या बाजू अनुक्रमाने प्रमाणांत असतील तर ते समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत आणि याचे उलटें जर समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत तर त्यांचे बराबर कोनांकडील बाजू अनुक्रमें प्रमाणांत आहेत

चौथी कुरलरी समांतर बाजू चौकोन अथवा त्रिकोण जांचा प्रत्येकीं एक कोन बराबर आहे ते परस्पर प्रमाणांत आहेत असे त्या बरोबर कोनाचे दोहोंकडील बाजूंचे अनुक्रमें काटकोन चौकोन

ब्यायशीवा सिद्धांत

कोणत्येही त्रिकोणांत एक बाजूशीं समांतर रेघ केली तर ती त्या त्रिकोणाचे दुसर्ये दोन बाजूंस प्रमाणानें छेदील

अबक त्रिकोण असेल आंत डई रेघ बक शीं समांतर केली तर
अड : डब : : अई : ईक



ह्मणोन बई आणि कड सांध आतां डबई डकई हे दोन त्रिकोण

त्रिकोण (२५सि०प्र०) परस्पर बराबर आहेत कारण त्यांस डई पाया आहे आणि डई बक यासमांतर रेघांचे एकच जोडामध्यें आहेत परंतु अडई बडई हे दोन त्रिकोण अड डब पायांवर आहेत त्यांची उंची बराबर आहे आणि अडई कडई हे दोन त्रिकोण अई ईक या पायांवर आहेत त्यांचीही उंची बराबर आहे आणि (७९सि०प्र०) ज्यांची उंची बराबर ते त्रिकोण परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये याजकरितां

अडई त्रिकोण : बडई त्रिकोण : : अड : डब

आणि अडई त्रिकोण : कडई त्रिंकोण : : अई : ईक

परंतु बडई त्रिकोण (वरचा सिद्ध जाल्यावरून) कडई त्रिकोणाबराबर आहे आणि बराबरांचें बराबरांशीं गुणोत्तर निश्चय एकच आहे याजकरितां अड : डब : : अई : ईक हें सिद्ध

कुरलरी यांतून निघतें कीं (६६सि०कु०प्र०) अब अक या दोन अखंड रेघा प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे खंड अनुक्रमानें ह्मणजे

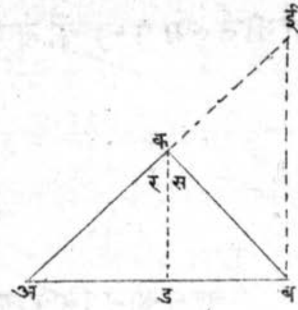
अब : अक : : अड : अई

आणि अब : अक : : बड : कई



न्यायशीचा सिद्धांत

जीरेघ त्रिकोणाच्या कोणताही कोन दुभागित्ये ती त्याचे समोर चे बाजूचे दोनखंड करित्ये हे खंड दुसर्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत



अबक त्रिकोण असेल ज्याचा अकब कोन कड रेघेनें दुभागिला असांकीं र कोन स कोना बराबर आला तर अड खंड डब खंडास होईल अशी अक बाजू कब बाजूस आहे अथवा अड : डब : : अक : कब

ह्मणोन कड शीं बई समांतर रेघ करून अक वाढीव अशी कीं ई स्थळावर मिळेल

आतां बक रेघ कड बई या दोन समांतर रेघांस मिळत्ये याजकरितां (१२सि०प्र०) कबई कोन त्याचेच व्युत्क्रम स कोना बराबर आहे ह्मणोन (वरसांगीतल्या प्र०) त्याचे बराबरीचा र कोना बराबर ही आहे

पुनः अई रेघ डक बई या दोन समांतर रेघांस छेदित्ये याजकरितां (१४सि०प्र०) ई कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचा त्याच बाजूचे र कोना बराबर आहे याजवरून बकई त्रिकोणांत ब आणि ई हे दोनकोन प्रत्येक र कोना बराबर आहेत याजकरितां परस्पर बराबर आहेत

आणि

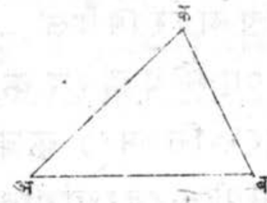
आणि (२ सि॰प्र॰) त्यांचे समोरचा कब कई या बाजूही बराबर

परंतु अबई त्रिकोणांत कड रेष बई रेषेशीं समांतर आहे याजकरितां (८२ सि॰प्र॰) हीरेष अब अई या दुसर्या दोन बाजूंस प्रमाणानीं छेदिल्ये ह्मणजे अड : डब : : अक : कई अथवा कब (वर सांगीतल्या प्र॰) कब बाजू कई बराबर आहे

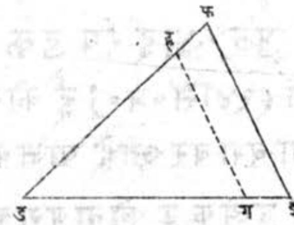
चौर्यायशीवा सिद्धांत

समकोन त्रिकोण परस्पर सरूप आहेत अथवा त्यांचा सजाति बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत

अबक डईफ हे दोन समकोन त्रिकोण असतील ह्मणजे अ कोन ड कोना बराबर आणि ब कोन ई कोना बराबर आणि यास्तवच क कोन फ कोना बराबर तर अब. अक : : डई : डफ



ह्मणोन डग अब चे बराबर कर आणि डह अक चे बराबर कर नंतर गह सांध आतां अबक डगह या दोन त्रिकोणांत एकाचा



अब अक या दोन बाजू दुसऱ्याच्या डग डह या दोन बाजूं बरोबर आहेत आणि (वरसांगीतल्या प्र०) एकाच्या या बाजूंचे आंतील कोन दुसऱ्याच्या त्या बाजूंचे आंतील कोनां बराबर आहे याजकरितां (१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत ह्मणजे एकाचे ग आणि ह हे दोन कोन दुसऱ्याचे ब आणि क या दोन कोनां बराबर आहेत परंतु (वरसांगीतल्या प्र०) ब आणि क हे दोन कोन अनुक्रमानें ई आणि फ या दोन कोनां बराबर आहेत याजकरितां ही (१ प्र० प्र०) ग आणि ह हे दोन कोन ई आणि फ या दोन कोनां बराबर आहेत आणि यापासून निघतें कीं (१४ सि० १ कु० प्र०) गह रेघ ईफ रेघेशीं समांतर आहे

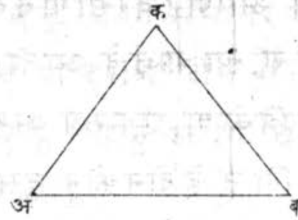
आतां यावरून डईफ या त्रिकोणांत गह रेघ ईफ रेघेशीं समांतर आहे याजकरितां डई डफ या दोन बाजूंस प्रमाणानें छेदिते ह्मणोन (८२ सि० कु० प्र०) डग : डह : : डई : डफ परंतु डग आणि डह अनुक्रमानें अब आणि अक यांचे बरोबर आहेत याजकरितां ही अब : अक : : डई : डफ हें सिद्ध

पंचायशीवा सिद्धांत

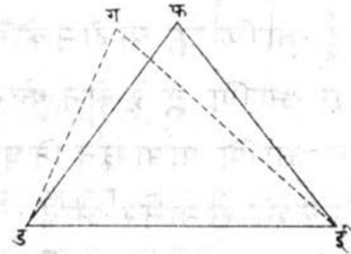
ज्या त्रिकोणांच्या बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक परस्पर प्रमाणांत आहेत ते त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत

अबक

अबक डईफ या दोन त्रिकोणांत जर अब : डई : : अक : डफ : : बक : ईफ तर हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत



ह्मणोन जर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोन नसेल तर मनांत कल्पना करकीं डईग त्रिकोण त्याशीं समकोन आहे परंतु हें अशक्य कारण



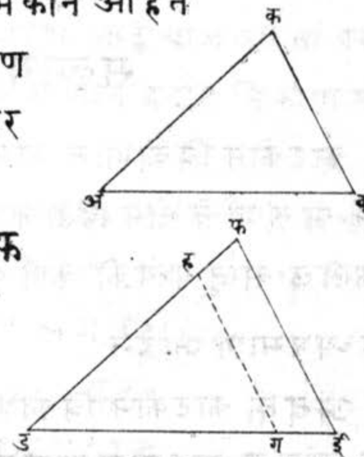
जर अबक डईग हे दोन त्रिकोण समकोन असतील तर (८४ सि॰ प्र॰) त्यांच्या बाजू प्रमाणांत असतील अशा कीं अब : डई : : अक : डग आणि अब : डई : : बक : ईग यापासून निघतें कीं डग हें अब डई अक या तीन पदांचें चतुःप्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीतल्या प्र॰) या तीन पदांचें चतुःप्रमाण डफ आहे तसें ईग हें अब डई बक या तीन पदांचें चतुःप्रमाण निघालें परंतु (वरसांगीतल्या प्र॰) यांचें चतुःप्रमाण ईफ आहे यारीतीनें डग डफ चे बराबर जाली आणि ईग ईफ चे बराबर याप्रमाणें डईफ आणि डईग या दोन त्रिकोणांच्या तीनही बाजू अनुक्रमें बराबर जाल्या तेव्हां हे दोन त्रिकोण (५ सि॰ प्र॰) एक

रूप

रूप असावे ते आकृती पाहातां परस्पर विषमकोन आहेत तेव्हां हे समकोन हे ह्मणणें परम अशक्य हें सिद्ध

शायशीवा सिद्धांत

जर कोणत्ये एक त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एक कोना बराबर आहे आणि त्या बरोबर कोनाचे दोहों कडील बाजू प्रमाणांत आहेत तरते दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत



अबक डईफ हे दोन त्रिकोण असतील आंत अ कोन ड कोना बराबर आहे आणि या बरोबर कोनांचे दोहों कडील अब अक या बाजू डई डफ या दोन बाजूंचे संगातीं प्रमाणांत असतील तर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोन होईल

ह्मणोन डग अब चे बराबर कर आणि डह अक चे बराबर कर नंतर हग सांध

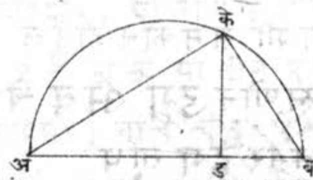
आतां अबक डगह या दोन त्रिकोणांत प्रत्येकाचा दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील कोन बराबर आहेत याजकरितां (१सि० प्र०) हे दोनही त्रिकोण एकरूप आहेत यास्तव ग आणि हे दोन कोन

ब आणि क या दोन कोनांचे बरोबर आहेत परंतु (वरसांगीतल्या०) अब अक या दोन बाजू अथवा त्यांचे बरोबर डग डह या दोन बाजू डई डफ या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत यापासून (८२ सि॰प्र॰) निघतें कीं गह रेघ ईफ शीं समांतर रेघ आहे याजकरितां (१४सि॰प्र॰) ई आणि फ हे दोन कोन ग आणि ह या दोन कोनांचे बरोबर आहेत अथवा त्यांचे बरोबरीचे ब आणि क या दोन कोनांचे बरोबर आहेत हें सि॰द्ध

सत्यायशीवा सिद्धांत

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला तर तो लंब त्या कर्णाचे दोन खंडांचें मध्यप्रमाण आहे आणि काटकोनाचे दोहोंकडील बाजू प्रत्येकीं कर्ण आणि त्या बाजूकडील कर्णाचा खंड यांचें मध्यप्रमाण आहेत

अबक काटकोन त्रिकोण असेल जांत क काटकोनापासून अब कर्णावर कड लंब केला तर



कड हें अड आणि बड यांचें मध्यप्रमाण आहे
अक हें अब आणि अड यांचें मध्यप्रमाण आहे
बक हें अब आणि बड यांचें मध्यप्रमाण आहे

अथवा

अथवा

अड : कड : : कड : बड

अब : अक : : अक : अड

अब : बक : : बक : बड

ह्मणोन अबक अडक या दोन त्रिकोणांत क आणि ड हे दोन काटकोन बराबर आहेत आणि अ कोन त्या दोनही त्रिकोणांस साधारण आहे याजकरितां (२७ सि० १ कु० प्र०) त्यांचे तिसरेही कोन बराबर आहेत ह्मणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत या रीतीवरून अबक बडक या दोन त्रिकोणांचे क आणि ड हे दोन काटकोन बराबर आहेत आणि ब कोन दोहोंस साधारण आहे याजकरितां वरचेरीतीनें यांचे तिसरेही कोन बराबर आहेत ह्मणोन हे दोन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत

यापासून कळलें कीं अबक अडक आणि बडक हे तीन त्रिकोण परस्पर समकोन आहेत याजकरितां (८४ सि० प्र०) यांचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येक प्रमाणांत आहेत ह्मणजे

अड : डक : : डक : बड

अब : अक : : अक : अड

अब : बक : : बक : बड

हें सिद्ध

कुरलरी (५२ सि० प्र०) अर्धवर्तुळांत जे कोन आहेत ते काटकोन आहेत यापासून

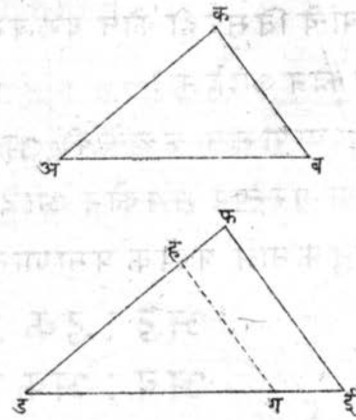
निघनें

निघतें कीं जर अर्धपरिघांत कोणतेंही स्थळ जसें येथें क यापासून अब व्यासावर लंब केला आणि त्या क पासून व्यासाचे दोन शेवटांपर्यंत दोन ज्या केल्या तर अक बक कड या तीन रेषा त्या सिद्धांताप्रमाणें मध्यप्रमाणें आहेत अथवा (७७ सि॰ प्र॰) $कड^2$ = अड • बड आणि $अक^2$ = अब • अड आणि $बक^2$ = अब • बड

अठयायशीवा सिद्धांत

समकोन अथवा सरूप जे त्रिकोण ते परस्परांस आहेत असे त्यांचे प्रत्येक सजाति बाजूंचे वर्ग

अबक डईफ हे दोन समकोन अथवा सरूप त्रिकोण असतील जांत अब डई या दोन सजाति बाजू आहेत तर अबक हा त्रिकोण डईफ या त्रिकोणास आहे जसा अब चा वर्ग डई चे वर्गास अथवा जर $अब^2 : डई^2$



ह्मणोन (वर सांगीतल्या प्र॰) हे दोन त्रिकोण समकोन अथवा सरूप आहेत याजकरितां (८४ सि॰ प्र॰) त्यांचा सजाति बाजू प्रत्येकीं प्रमाणांत आहेत आणि (८१ सि॰ ४ कु॰ प्र॰) हे दोन त्रिकोण परस्परांस

आहेत

आहेत जसे त्या समान कोनांचे दोहोंकडील सजाति बाजूंचे काटकोन चौकोन याजकरितां

(८४ सि० प्र०) अब : डई : : अक : डफ

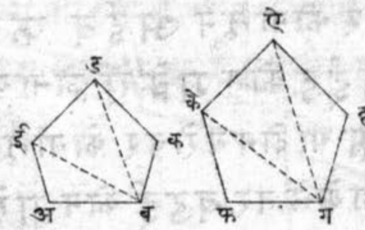
आणि अब : डई : : अब : डई ह्मणजे हीं दोन युग्में एकच आहेत यास्तव प्रमाण एकच आहे याजकरितां

(७५ सि० प्र०) अब² : डई² : : अब • अक : डई • डफ परंतु (८१ सि० ४ कु० प्र०) अबक▷ : डईफ▷ : : अब • अक : डई • डफ याजकरितां अबक▷ : डईफ▷ : : अब² : डई² हें सिद्ध

नव्यायशीवा सिद्धांत

सर्व सरूपाकृती परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग

अबकडई फगहऐके या दोन सरूपाकृती असतील जांत अब फग या दोन सजाति सरूप बाजू आणि बक गह या दोन सजाति सरूप बाजू याप्रमाणें पुढेंही



तर अबकडई ही आकृति फगहऐके या आकृतीस होईल जसा अब² : फग²

ह्मणोन ब आणि ग याबरोबर कोनांपासून रेघा करून बई, बड

बड · गके · गऐ · सांध अशा कीं दोनही आकृतींत तीन तीन त्रिकोण होतील

(वरसांगीतल्याप्र०) या दोन आकृती सरूप आहेत यांजकरितां (७० व्या०प्र०) समकोन आहेत आणि त्यांचे कोनांचा दोहोंकडील सजाति सरूप बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत आहेत

आतां अ कोन फ कोना बराबर आहे आणि त्या दोन कोनांचे दोहोंकडील अब अई या बाजू फग फके या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत

याजकरितां अबई फगके हे दोन त्रिकोण (८६ सि०प्र०) समकोन आहेत यारीतीनें बकड गहऐ हे दोन त्रिकोणही समकोन आहेत कारण क कोन ह कोना बराबर आहे आणि बक कड या क कोनाचे दोहोंकडील बाजू गह हऐ या ह कोनाचे दोहोंकडील बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत पुनः जर अईड फकेऐ या दोन बराबर कोनांतून अईब फकेग हे दोन बराबर कोन वजा केले तर बईड कोन गकेऐ कोना बराबर राहील आणि जर कडई हऐके या दोन बराबर कोनांतून कडब हऐग हे दोन बराबर कोन वजा केले तर बडई कोन गऐके कोना बराबर राहील यापासून बडई गऐके या दोन त्रिकोणांत दोन कोन बराबर आहेत यास्तव ते समकोन आहेत यांतून निघतें कीं एक आकृतीचे सर्व त्रिकोण दुसर्‍ये आकृतीचे सर्व त्रिकोणांशीं अनुक्रमें प्रत्येक सरूप आहेत

परंतु

परंतु समकोन त्रिकोण सरूप आहेत आणि (८८ सि॰प्र॰) ते परस्परांस प्रमाण आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग

याजकरितां अबई ▷ : हगके ▷ : : अब^2 : फग^2 : :

आणि बकड ▷ : गहऐ ▷ : : बक^2 : गह^2

आणि बडई ▷ : गऐके ▷ : : डई^2 : ऐके^{2}

परंतु या बहुकोन आकृति (वरसांमीनल्या प्र॰) सरूप आहेत यास्तव यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत आणि त्या सजाति बाजूंचे वर्गही (७४ सि॰प्र॰) प्रमाणांत आहेत यापासून या सर्व युग्मांचे गुणोत्तर बराबर ह्मणजे अब^2 : फग^2 बक^2 : गह^2 आणि डई^2 : ऐके^{2} याजकरितां त्या त्या युग्मांचे त्रिकोणांचें गुणोत्तरही बराबर ह्मणजे अबई : फगके बकड : गहऐ आणि बडई : गऐके आणि या त्रिकोणांचें गुणोत्तर हेंच आहे जसें अब^2 : फग^2 यांतून निघतें कीं (७२ सि॰प्र॰) सर्व अग्रसरांची बेरीज ह्मणजे अबकडई हीं आकृती सर्व उपाग्रसरांचे बेरिजेस ह्मणजे फगहऐके या आकृतीस आहे जसा अब^2 : फग^2 हें सिद्ध.

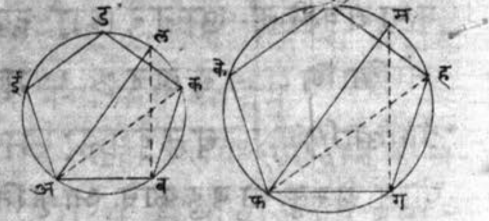
नवदाया सिद्धांत

वर्तुळांतील सरूपाकृतींचा सजाति बाजू आणि त्या आकृतींचा परिमिती यांचें गुणोत्तर त्या दोन वर्तुळांचे व्यासांचे गुणोत्तरा

बरोबर

बरोबर आहे

अबकडई फगहऐके या दोन सरूपाकृती वर्तुळांत असतील जा वर्तुळांचे व्यास अल फम आहेत तर एक आकृतीचा अब बक इत्यादिक बाजू अनुक्रमानें दुसर्या आकृतीचे फग गह इत्यादिक



सजाति बाजूंस होतील अथवा एक आकृतीची परिमिति ह्मणजे अब + बक + कड इत्यादिक ती दुसर्ये आकृतीचे परिमितीस ह्मणजे फग + गह + हऐ इत्यादिकेस होत्ये जसा अल व्यास फम व्यासास

ह्मणोन अक फह या दोन सजाति कर्णरेषा कर आणि बल गम सांध

आतां (वरसांगीतल्या प्र०) या दोन बहुकोन आकृती सरूप आहेत याजकरितां (७० व्या० प्र०) समकोनही आहेत आणि त्यांचे सजाति बाजूंचें गुणोत्तर एकच आहे याजकरितां अबक फगह या दोन त्रिकोणांत ब कोन ग कोना बराबर आहे आणि अब बक या दोन बाजू फग गह या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत याजकरितां (८६ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत यास्तव अकब कोन फहग कोना बराबर आहे परंतु अकब कोन अलब कोना बराबर आहे कारण हे दोनही कोन एकच अब

कौसा बर

कोंसावर आहेत आणि फहग कोन फमग कोनाबराबर आहे कारण हे दोन कोन एकच फग कोंसावर आहेत याजकरितां (प्र० प्र० प्र०) अलब कोन फमग कोनाबराबर आहे आणि पुनः अबल आणि फगम हे दोन काटकोन आहेत कारण अर्धवर्तुळांत आहेत याजकरितां अबल फगम या दोन त्रिकोणांत दोन कोन बराबर स-णोन हे समकोन आणि (८४ सि० प्र०) यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आ-हेत ह्मणजे अब : फग : : अल ह्मणजे एक वर्तुळाचा व्यास : फम ह्मणजे दुसर्‍यें वर्तुळाचे व्यासाला

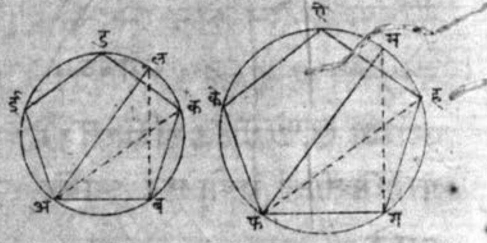
यारीतीनें दाखविलें जातें कीं एका आकृतीचा प्रत्येक बाजू बक कड इत्यादिक यांचें दुसर्‍यें आकृतीचे गह हए इत्यादिक प्र-त्येक सजाति बाजूंशीं गुणोत्तर अल फम यांचे गुणोत्तराबराबर आहे आणि (७२ सि० प्र०) या बाजूंचे बेरिजांचें गुणोत्तरही अल फम यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे ह्मणजे अब + बक + कड इत्यादि-क : फग + गह + हए इत्यादिक : : अल व्यास : फम व्यासास हें सिद्ध

एक्यांणवावा सिद्धांत

वर्तुळांतील सरूपाकृती परस्परांस आहेत जसे त्या दोन वर्तु-ळांचे व्यासांचे वर्ग

अबक

अबकडई फगहऐके या दोन सरूपाकृति दोन वर्तुळांत असतील जा वर्तुळांचे व्यास अल फम आहेत तर अबकडई या बहुकोनाचें क्षेत्र फगहऐके या बहुकोनाचे क्षेत्रास आहे जसा अल^2: फम^2



ह्मणोन या दोन आकृती सरूप आहेत याजकरितां (८९ सि०प्र०) परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचेवर्ग अब^2: फग^2 इत्यादिक परंतु (९० सि०प्र०) अब फग या बाजू परस्परांस आहेत जसे त्या वर्तुळांचे दोन व्यास अल: फम याजकरितां (७४ सि०प्र०) या बाजूंचे वर्ग ह्मणजे अब^2: फग^2: : वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग ह्मणजे अल^2: फम^2 याजकरितांही (प्र०प्र०प्र०) अबकडई ही बहुकोन आकृति: फगहऐके या बहुकोन आकृती : : अल^2: फम^2 हें सिद्ध

ब्यांणवावा सिद्धांत

सर्व वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यास

द आणि ध हे दोन वर्तुळांचे व्यास आहेत अशी कल्पना कर तसेंच क आणि ख हे दोन त्याच वर्तुळांचे परिघ आहेत तर

द:

द : ध : : क : ख

अथवा

(८५ व्या०प्र०) द : क : : ध : ख

म्हणोन (९०सि०प्र०) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृतीचे परिमितींचें गुणोत्तर आणि त्या वर्तुळांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच आहे

आतां हा गुणप्रकार सर्वसरूप बहुकोन आकृतींवर लागतो त्या बहुकोन आकृतींस कितीही बाजू असोत मनांत आणकीं बाजूं ची संख्या अतिबहुत आणि त्या बाजूंची प्रत्येक लांबी अतीच लाहान अशीकीं त्या बाजू केवळ लाहान यामुळें ती बहुकोन आकृती केवळ वर्तुळ परिघाकारच होउन गेली आहे तर तशी बहुकोन आकृतीचे बाजूंची परिमिति आणि वर्तुळाचा परिघ एकच आहे यांतून निघतें किं वर्तुळांचे परिघ परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यास हें सिद्ध

प्यांणवावा सिद्धांत

वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचे वर्ग

अ आणि आ हीं दोन वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें आहेत असें मनां त

तधर नसें द आणि ध हे दोन त्या वर्तुळांचे व्यास असें ही तर

अ : आ :: दे : धे

ह्मणोन (११ सि॰ प्र॰) वर्तुळांतील सरूप बहुकोन आकृती परस्परांस आहेत जसे त्या वर्तुळांचे व्यासांचे वर्ग.

आतां मनांत आण कीं बहुकोनाचे बाजूंची संख्या वाढवि-ल्यामुळें त्या बाजू अतिच लाहान जाल्या यापासून ती बाजूंची प-रिमिति केवळ परिघाचेंच माप आली ह्मणून ती परिघाचे बरोबर जाली तर यापासून निघतें किं वर्तुळाचें आणि बहुकोनाचें क्षेत्र-फळ एकच आलें याजकरितां वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आहे-त जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग हें सिद्ध

कुरलरी (१२ सि॰ प्र॰) वर्तुळपरिघांचें आणि त्यांचे व्यासांचें गुणोत्तर एकच याजकरितांही वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्परांस आ-हेत जसे त्यांचे परिघांचे वर्ग

चौर्याणवावा सिद्धांत

कोणत्येही वर्तुळाचें क्षेत्रफळ त्या वर्तुळाचा अर्धाव्यास आ-णि अर्धापरिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

मनांत आण किं एक वर्तु
ळांत समबाजू बहुकोन आकृती

केली

केली आणि वर्तुळ मध्यापासून त्या बहुकोन आकृतीचे कोनापर्यंत त्रिज्या केल्या अशा कीं त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके त्रिकोण होतील नंतर त्यांतील एक अबक त्रिकोणांत अब बाजूचे ड मध्यावर क शिरापासून कड लंब केला आहे



आतां (२६ सि० २ कु० प०) अबक त्रिकोण एककाटकोन चौकोनाचे बराबर आहे जो काटकोनचौकोन त्यात्रिकोणाचा अर्धा पाया आणि उंची यांत होतो ह्मणोन अबक त्रिकोण अड आणि कड यारेघांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे याजकरितां सगळें बहुकोन अथवा त्यांतील सर्व त्रिकोणांची बेरीज साधारण उंची कड आणि त्या आकृतीचे सर्वबाजूंचे अर्धांची बेरीज अथवा अर्ध परिमिति यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे

आतां मनांत आण कीं त्या बाजूंची संख्या अतिवाढविली यामुळें त्या बाजू अतिशयच लाहान होउन केवळ परिघरूपच जाल्या यास्तव परिमिति परिघाशीं मिळाली याजकरितां वर्तुळाचें क्षेत्रफळ अथवा वरसांगीतल्या या परिघरूप बहुकोनाचें क्षेत्रफळ त्रिज्या आणि अर्धापरिघ यांचे काटकोन चौकोनाचे बराबर आहे हे सिद्ध

पातळी आणि भरिवांचा व्याख्या

८८ दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्नरेघ होय त्या दोनही जेथें भिडून परस्पर छेदितात

८९ पातळीवर लंब ती रेघ होय जी रेघ त्या पातळींतील सर्व रेघांवर लंब आहे

९० एक पातळी दुसर्ये पातळीवर लंब आहे जर त्या दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्नावर केलेले लंब परस्परांवर लंब होतील

९१ एक पातळीचा दुसर्ये पातळीवर झोंक अथवा कोन तो होय म्हणजे दोन पातळ्यांचे छिन्नरेघेवर जे दोन पातळ्यांवरील लंब एकत्र मिळतात त्या लंबरेघांचे अंतराचें माप होय

९२ समांतर पातळ्या त्याच होत ज्या कितीही वाढविल्या तरीं परस्परांस मिळत नाहिंत अथवा ज्यांचेमध्यें लंबांतर सर्वत्र बराबर राहातें

९३ भरींव कोन तोच होय जो बहुत पातळ्या एक बिंदूवर मिळाल्या यापासून होतो त्या अतिथोड्या अशा तीन

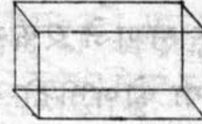
९४ सरूप भरींवें तींच होत ज्यांचे सर्व भरींव कोन अनुक्रमें प्रत्येकाशीं बराबर आहेत आणि त्यांचा मर्यादा सर्व पातळ्या बराबर सरूपाकृति सारख्या आहेत

९५ पृजंम ह्मणजे एक भरींव आहे ज्याचे दोनी शेवट समांतर पातळी बरोबर सरूपाकृति आहेत आणि त्याच्या बाजू या शेवटांस संलग्न असोन समांतर बाजू चौकोन आहेत

९६ पृंजमांस त्याचे शेवटांचें आकृतीवरून नांवें अनेक आहेत जसें त्रिकोणपृजंम चौकोनपृजंम पंचकोणपृंजंम इत्यादिक

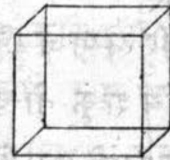
९७ काटकोन पृजंम तेंच होय किं ज्याचे बाजूंचीपातळी त्याचेपायाचे अथवा शेवटाचे पातळीवर लंब आहे

९८ समांतर भरींव एकपृजंम आहे ज्याचा मर्यादा साहा समांतर बाजू चौकोन पातळी आहेत आणि बाजूंचे जोड समांतर आणि सारिखे आहेत



९९ काटकोन समांतर भरींव तेंच होय ज्याचीमर्यादा पातळी सर्व काटकोन चौकोन आहे आणि हे काटकोन चौकोन परस्परांवर लंब आहेत

१०० घन ह्मणजे चौरस पृजंम होय ज्याचा मर्यादा साहा बरोबर चौरस पातळी आहेत आणि हे चौरस परस्परांवर लंब आहेत



१०१ शिलिंदर ह्मणजे वर्तुळ पृजं म होय ज्याचे दोन शेवट वर्तुळ आ हेत आणि मनांत येतें कीं या दोन शेवटांचे परिघांबरोबर आसाशीं समांतर त्याचे भोंवती एक रेघ के ल्यापासून बनलें आहे



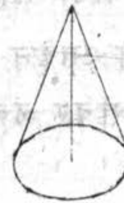
१०२ शिलिंदराचा आंस तीच रेघ होय जी शिलिंदराचे समांतर वर्तु-ळ शेवटांचे मध्यबिंदू सांधित्ये

१०३ शांकु ह्मणजे एक भरींव आ हे ज्याचा पाया कोणतीही सरळरेघा कृति पातळी आहे आणि ज्याचा सर्व बाजू त्रिकोण आहेत आणि त्या बाजूंचे शिरोबिंदू पायाचेवर एक बिंदूंत मिळतात त्याबिंदूस शांकू-चें शिरह्मणतात



१०४ शांकूचीं नावें पृजंमासारिखीं अनेक आहेत जशी त्यांचे पाया-ची आकृती ह्मणजे त्रिकोणशांकू चौकोनशांकू पंचकोनशांकू इत्यादिक

१०५ वर्तुळशांकू तोच होय ज्याचा पाया वर्तुळआहे आणि ज्याचे आं साचे वरल्ये शेवटावर निश्चळ रेघे चें एकटोंक आणि दुसरें टोंक पाया



चे

चे वर्तुळ परिघावर बरोबर त्या आंसा भोंवतें फिरविल्या पासून उत्पन्न आला असें मनांत आण

१०६ शंकूचा आंस तीच रेघ होय जीरेघ शंकूचें वर्तुळ पायाच्या मध्य बिंदू आणि शंकूच्या शिरोबिंदू यांनें साधिले

१०७ सरूप शंकू आणि सरूप शिलिंदर तेच होत ज्यांची उंची आणि पायाच्या व्यासहीं परस्पर प्रमाणांत आहेत

१०८ गोल एक भरींव आहे ज्याची मर्यादा वांकडी पातळी त्या गोलांतील एक बिंदूपासून सर्वत्र सारिख्ये अंतरानें आहे आणि त्या आंतील बिंदूस गोलमध्य ह्मणतात मनांत आणिलें कीं अर्धवर्तुळ त्याचेच व्यासा भोंवतें फिरलें यापासून हें गोल उत्पन्न जालें

१०९ गोलाचा आंस तीच सरळरेघ होय कीं जीचेवर अर्धवर्तुळ फिरतें आणि गोलाचा मध्य तोच होय जो अर्धवर्तुळाचा मध्य ह्मणजे गोल आणि अर्धवर्तुळ यांचा मध्य एकच आहे कीं ज्यापासून त्यांची मर्यादा वांकडी पातळी सर्वत्र बराबर अंतरानें आहे

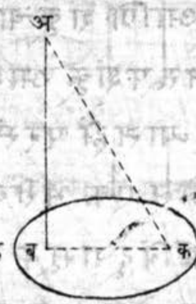
११० गोलाचा व्यास कोणतीही सरळरेघ आहे जीरेघ एकीकडील मर्यादा वांकडी पातळीपासून गोलमध्य बिंदू छेदून पार दुसर्‍येकडील मर्यादा वांकडी पातळी पर्यंत आहे

१११ भरींवांची उंची तीच रेघ होय जीरेघ भरींवाचे शिरापासून पायावर लंब आहे

पंचांणबाबा

पंचांणवावा सिद्धांत

कोणत्येही बिंदूपासून पातळीवर जीरेघ सर्वांहून लाहान करि-तां येत्ये तीरेघ त्या पातळीवर लंब आहे



डई कोणतीही पातळी अ-सेल आणि तिजवर कोण त्येही अ बिंदूपासून अब रेघ लंब असेल तर दुसरी कोणतीही रेघ जशी एथे अक त्याच अ बिंदूपासून पातळी पर्यंत केलीती अब रेघेहून लांब होईल

ह्मणोन पातळीवर ब आणि क हे दोनबिंदू रेघेकरून सांध

आतां अब रेघ डई पातळीवर (८९ व्या प्र०) लंब आहे याज-करितां ब कोन काटकोन आहे यास्तव क कोनाहून मोटा आहे याज-करितां (२१ सि०प्र०) अब रेघ लाहान क कोना समोर आहे ती दुसर्या कोण त्याही रेघेहून ह्मणजे एथे जशी अक रेघ मोटये कोना समोरची तिचेहून लाहान आहे हें सिद्ध

शाहांणवावा सिद्धांत

कोणत्येही बिंदूपासून कोणतीही पातळी पर्यंत अंतर मापि-

तात

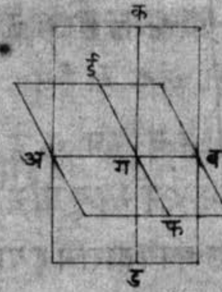
तात तें लंब आहे

एक बिंदूपासून दुसरा बिंदुपर्यंत अंतर सरळरेघेनें मापिलें आ तें जीरेघ दोन बिंदू सांधित्ये (६ व्या॰प्र॰) जीरेघ सर्वांहून लाहान एक बिंदूपासून दुसरा बिंदूपर्यंत करितां येत्ये अशारीतीनें कोणत्याही बिंदूपासून कोणतीही रेघपर्यंत अंतर त्याच रेघेवर त्या बिंदूपासून केलेले लंबानें मापितां येईल कारण त्या बिंदूपासून त्या रेघेवर जा रेघा करितां येतात त्यांत (२१ सि॰प्र॰) लंब अति लाहान रेघ आहे यारीतीनें कोण त्येही बिंदूपासून पातळी पर्यंत जें अंतर आहे तें त्या बिंदूपासून त्या पातळी पर्यंत केलेले लंबानें मापितां येतें कारण (१५ सि॰प्र॰) ही लंबरेघ सर्वांहून लाहान आहे जा रेघा बिंदूपासून पातळीपर्यंत करितां येतात त्यासर्वांहून हें सिद्ध

सत्यांणवावा सिद्धांत

दोन पातळ्यांचें साधारण छिन्न सरळ रेघ आहे

अकबडअ अईबफअ या दोन पातळ्या असतील जा परस्पर छेदितात आणि अ ब हे दोन बिंदू असतील कीं जांत दोन पातळ्या परस्पर मिळाल्या आहेत आणि हे

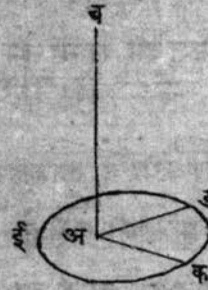


दोन बिंदू अ ब सरळरेघेनें सांधिले तर ही सरळ रेघ त्या दोनही पातळ्यांचें साधारण छिन्न होईल

ह्मणोन ही सरळरेघ अ आणि ब या दोन बिंदूंवर दोन पातळ्यांस स्पर्शकरिते याजकरितां (२० व्या० प्र०) हीसरळरेघ दोनपातळ्यांस अ ब या दोन बिंदूंवर स्पर्श करिते त्याप्रमाणें सर्वबिंदूंवर स्पर्शकरिते यास्तव हीरेघ दोनही पातळ्यांस साधारण आहे ह्मणोन दोन पातळ्यांचें साधारणछिन्न सरळ रेघ आहे हें सिद्ध

अठ्यांणवावा सिद्धांत

जर एकरेघ दोनरेघांचे संयोग बिंदूवर लंब असेल तर तीरेघ त्या दोन रेघांचे पातळीवर लंब होईल



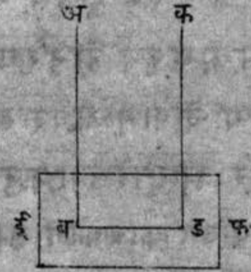
जर अब रेघ अड अक या दोन रेघांशीं काटकोन करिते तर ती अब रेघ अड अक या दोन रेघांचे पार जी कडई पातळी आहे तीचेवरही लंब होईल

जर अब रेघ कडई पातळीवर लंब नसेल तर दुसरी कोणतीही पातळी अ बिंदूपार असावी कीं जीचेवर अब रेघ लंब होईल परंतु हें अशक्य कारण (वरसांगीतल्याप्र०) बअड ८ अक हे दोन

हे दोन काटकोन आहेत तेव्हां दुसरी पातळी क आणि ड या दोन बिंदू पारच्छिन्न असली पाहिजे यावरून ही पातळी अ क या दोन बिंदूंचे तसें अ ड या दोन बिंदूंचेही पारगेली आहे तेव्हां अक अड या दोन रेघांचेही पारगेली याजकरितां या दोन रेघांची पातळी आहे हें सिद्ध

नव्यांणवावा सिद्धांत

जर दोन रेघा एकच पातळीवर लंब असतील तर त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर रेघा होतील



अब कड या दोन रेघा ईबडफ पातळीवर लंब असतील तर अब रेघ कडशीं समांतर रेघ होईल

ह्मणोन पातळीवरील ब ड बिंदू बड रेघेकरून सांध

आतां अब कड या दोन रेघा (वरसांगीतल्याप्र०) ईफ पातळीवर लंब आहेत याजकरितां (८९ व्या०प्र०) ईफ पातळीवरील बड रेघेवरही लंब आहे आणि ह्मणोनच (१३ सि० कु० प्र०) या दोन रेघा परस्पर समांतर रेघा आहेत हें सिद्ध

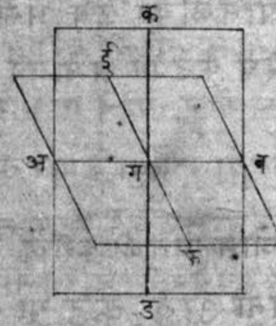
कुरलरी

कुरलरी दोन रेघा परस्पर समांतर असतील आणि त्यांतून एकरेघ कोणत्येही पातळीवर लंब असेल तर त्याच पातळीवर दुसरी रेघही लंब होईल

शंभरावा सिद्धांत

जर दोन पातळ्या परस्पर छेदितात यापासून काटकोन जाला आणि एक पातळींवर रेघ केली ती त्यांचे साधारण छिन्नावर लंब असेल तर तीच रेघ दुसर्‍ये पातळीवरही लंब होईल

अकबड अईबफ या दोन पातळ्या असतील अशा कीं त्या परस्पर छेदितात त्यापासून काटकोन जाला आहे आणि अकबड पातळींत त्या दोन पातळ्यांचे साधारण छिन्नावर कग रेघ लंब असेल तर अईबफ या दुसर्‍ये पातळीवर ही ती कड रेघ लंब होईल



ह्मणोन अईबफ पातळींत अब साधारण छिन्नावर ईग लंब कर आतां गक गई या दोन रेघा अब साधारण छिन्नावर

लंब

लंब आहेत याजकरितां (९९ व्या० प्र०) त्या दोन पातळ्यांच्या झोंक कोन कगई आहे याजकरितां हा कगई झोंक कोन काटकोन आहे आणि यावरून गअ गई या दोन रेघा अईबफ पातळींत आहेत याजकरितां (९८ सि० प्र०) कग रेघ अईबफ पातळीवर लंब आहे हें सिद्ध

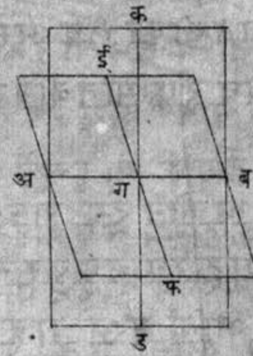
---

१०१ सिद्धांत

एक पातळी दुसऱ्ये पातळीवर मिळाली असतां तेथे दोन कोन होतात ते दोन कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत

अकबड पातळी अईबफ पातळीवर मिळेल तर तेथे दोन कोन होतील त्यांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे

म्हणोन त्यांचे साधारण अब छिन्नावर ग स्थळाचे पारकड ईफ या दोन रेघा लंब कर यापासून कग रेघ ईफ रेघेवर मिळाली तीं तेथे दोन कोन करित्ये ते (६ सि० प्र०) दोन काटकोनां बराबर आहेत परंतु (९९ व्या० प्र०) हे दोन कोन दोन



पातळ्यांचे

पातळयांचे झोंककोन आहेत याजकरितां या दोन पातळया दोनकोन करितात त्यांचीबेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे हें सिद्ध

कुरलरी यारीतीवरून सिद्ध होतें कीं जेव्हां दोन पातळया परस्पर छेदितात तेव्हां त्यांचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर होतात आणि जेव्हां एकपातळी दुसर्यां दोन समांतर पातळयांस छेदित्ये तेव्हां त्यांचे व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर होतात जसें समांतर रेघांत

१०२ सिद्धांत

दोन पातळया परस्पर समांतर आहेत त्यांत एक पातळीवर जीरेघ लंब आहे तीदुसर्ये पातळीवरही लंब होईल



ईफ कड या दोन समांतर पातळया असतील आणि अब रेघ कड पातळीवर लंब असेल तर ही अब रेघ ईफ पातळीवर ही लंब होईल

म्हणोन ईफ पातळींतील कोणत्येही ग स्थळापासून कड पातळीवर गह रेघ लंब कर नंतर अह बग सांध

आतां बअ गह या दोनरेघा कड पातळीवर लंब आहेत या-

अंकरितां

ज करितां अ आणि ह हे दोन कोन काटकोन आहेत आणि कड ईफ या दोन समांतर पातळ्या आहेत याजकरितां (१२ व्या० प्र०) बअ गह हे दोन लंब बराबर आहेत यांतून निघतें कीं (९ व्या० प्र०) बग अह या दोनरेघा समांतर आहेत आणि अब रेघ अह रेघेवर लंब आहे याजकरितां (१२ सि० कु० प्र०) तिशीं समांतर बग रेघेवर ही लंब आहे

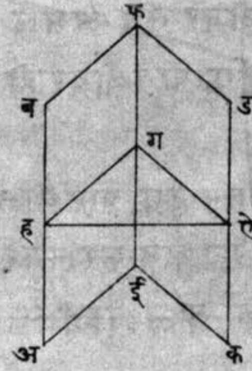
याशीतीवरून सिद्ध होतें कीं अब रेघ दुसऱ्या कोणत्या रेघांवरही ह्मणजे जा ईफ पातळीवर ब स्थळापर्यंत करितां येतील त्या सर्वांवर ही लंब आहे याजकरितां (९० सि० प्र०) ही अब रेघ सर्व ईफ पातळी-वर लंब आहे हें सिद्ध

---

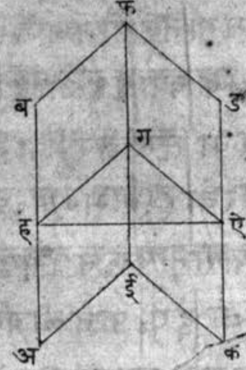
१०३ सिद्धांत

जर कोणत्याही दोनरेघा तिसऱ्ये एक्ये रेघेशीं समांतर आहेत आणि ती तिसरी रेघ जरी या दोन रेघांचे पातळीवर नसेल तरीही त्या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत

अब कड या दोनरेघा तिसऱ्ये ईफ रेघेशीं समांतर असतील जरी ईफ रेघ अब कड या दोन रेघांचे पातळीवर नसेल तरिही अब कड शीं समांतर होईल



ह्मणोन



ह्मणोन ईफ रेघेंत कोणत्ये ही स्थळापासून ह्मणजे असें ग स्थळापासून ईब ईड या दोन पातळ्यांत गह गऐ हे दोन ईफ रेघेवर लंब कर

आतां ईफ रेघ गह गऐ या दोनरेघांवर लंब आहे याजकरितां (९८ सि० प्र०) त्यारेघांचे गहऐ पातळीवर लंब आहे यावरून ईफ रेघ गहऐ पातळीवर लंब आहे याजकरितां ईफ शीं समांतर अब रेघही (९९ सि० कु० प्र०) गहऐ पातळीवर लंब आहे याच कारणास्तव कड रेघही गहऐ पातळीवर लंब आहे यांतून निघतें कीं अब कड या दोनरेघा एकच गहऐ पातळीवर लंब आहेत याजकरितां (९९ सि० प्र०) त्या दोनरेघा परस्परांशीं समांतर आहेत हें सिद्ध

---

१०४ सिद्धांत

जर दोनरेघा परस्पर मिळतात यांशीं अनुक्रमें समांतर दुसऱ्या दोनरेघा परस्पर मिळतात कदाचित् त्या आणि या रेघा एकपात

ळी

ळीवर नसतील तरीही यारेघांचे आंतील कोन परस्पर बराबर होती
ल



अब बक यारेघा अनुक्रमें डई ईफ यारेघांशीं समांतर असतील कदाचित् त्या आणि या एकच पातळीवर नसतील तरीही अबक कोन डईफ कोना बराबर होईल

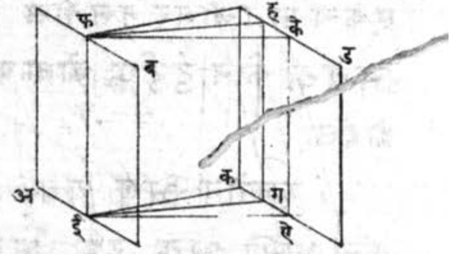
ह्मणोन अब बक डई ईफ यासर्व रेघा परस्पर बराबर कर आणि अक डफ अड बई कफ सांध

आतां अब डई या दोन रेघा समांतर आणि बरोबर आहेत नंतर अड बई या दोनरेघा त्या समांतर बरोबर रेघांस सांधितात याजकरितां (२४सि०प्र०) याही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत याचकारणास्तव कफ बई या दोनरेघा बरोबर आणि समांतर आहेत याजकरितां (१५सि०प्र०) अड कफ या परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत आणि (२४सि०प्र०) अक डफ याही परस्पर समांतर आणि बरोबर आहेत यांतून निघतेंकीं अबक डईफ या दोन त्रिकोणांच्या सर्वबाजू अनुक्रमें प्रत्येक बरोबर याजकरितां यांचे कोनही अनुक्रमें बराबर यास्तव अबक कोन डईफ कोना बराबर आहे हें सिद्ध

---

१०५ सिद्धांत

एकपातळी दुसऱ्या दोन समांतर पातळ्यांस छेदिल्ये तर तीं छिन्नें परस्पर समांतर होतात



अब कड या समांतर पातळ्या असतील जा ईफहग या तिसर्‍ये पातळीनें ईफ हग रेघांचे स्थळीं छेदिल्या तर ईफ गह हीं दोन छिन्नें समांतर होतील

मनांत आणकीं ईफहग पातळीनें ईग फह या दोन रेघा परस्पर समांतर केल्या आहेत आणि कड पातळीवर ईऐ फके हे दोन लंबकर नंतर ऐग केह सांध

आतां ईग फह या समांतर रेघा आहेत आणि ईऐ फके या दोन रेघा कड पातळीवर लंब आहेत याजकरितां (९९ सि० प्र०) त्या परस्पर समांतर आहेत याजकरितां (१०४ सि० प्र०) हफके कोन गईऐ कोना बराबर आहे परंतु फकेह कोन ईऐग कोना बराबर आहे कारण हे दोन कोन काटकोन आहेत यास्तव फहके ईगऐ हे दोन त्रिकोण (१७ सि० १ कु० प्र०) समकोन आहेत आणि (९२ व्या० प्र०) यांचा फके ईऐ या दोन बाजू समांतर पातळ्यांची

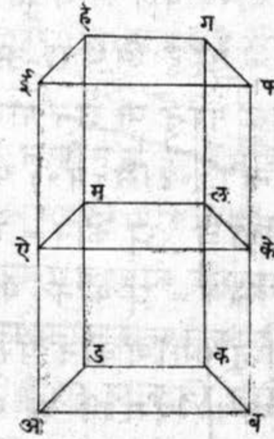
लंबांतरें

लंबांतरें आहेत यास्तव परस्पर बराबर यापासून निघतें कीं (२ सि० प्र०) फह ईग बाजूही बराबर आहेत परंतु या दोन बाजू (वरसांगीतल्या प्र०) समांतर आणि बरोबर याजकरितां ईफ गह या रेघा जा फह ईग या समांतर बरोबर रेघांस सांधितात त्याही (२४ सि० प्र०) बरोबर आणि समांतर आहेत हें सिद्ध

---

१०६ सिद्धांत

जर कोणतेंही पृजंम पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें तर तें छिन्न पायाशीं बरोबर एकरूप होईल



अग एक पृजंम असेल आणि त्यास अक पायाशीं समांतर ऐल पातळीनें छेदिलें तर ऐल पातळी अक पायाशीं बरोबर एकरूप होईल अथवा या दोन पातळ्यांच्या सर्वबाजू आणि सर्वकोन अनुक्रमें परस्पर बराबर आहेत

ह्मणोन (वरसांगीतल्या प्र०)

अक

अक ऐल या दोन पातळ्या परस्पर समांतर आहेत आणि (१०५ सि० प्र०) एकपातळी दुसऱ्यें दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये तर तीं छिन्नें परस्पर समांतर आहेत यास्तव ऐके अब शीं समांतर आहे आणि केल बक शीं समांतर आहे आणि लम कड शीं समांतर आणि ऐम अड शीं समांतर



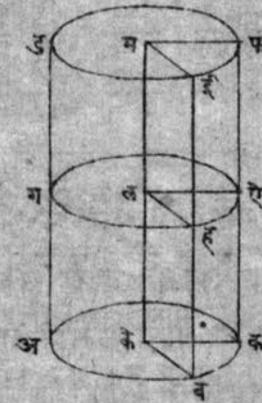
आहे परंतु (९५ व्या० प्र०) अऐ बके या बाजू समांतर आहेत याजकरितां अब केऐ समांतर बाजू चौकोन आहे याजकरितां (२२ सि० प्र०) समोरा समोरच्या बाजू अब ऐके या बरोबर आहेत यारीतीनें दाखविलें आतें कीं केल = बक आणि लम = कड आणि ऐम = अड अथवा अक ऐल या दोन पातळ्या परस्पर समबाजू आहेत परंतु या दोन पातळ्यांच्या सजाति बाजू समांतर आहेत याजकरितां (२०४ सि० प्र०) या बाजूंचे आंतील कोन परस्पर बराबर आहेत ह्मणजे अ कोन = ऐ कोन ब कोन = के कोन क कोन = ल कोन ड कोन = म कोन यावरून अक ऐल या दोन पातळ्यांच्या सजाति बाजू आणि कोन परस्पर बराबर आहेत याजकरितां या दोन पातळ्या परस्परांशीं बराबर एकरूप आहेत हें सिद्ध

---

१०७ सिद्धांत

जर एक शिलिंदर पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें तर तें छिन्न वर्तुळ आणि पाया यांशीं बरोबर होईल

अफ एक शिलिंदर असेल आणि गहऐ कोणतेंही छिन्न अबक पायाशीं समांतर असेल तर गहऐ वर्तुळ आणि अबक पाया यांचे बरोबर होईल



ह्मणोन केई केफ या दोन पातळ्या असाव्या जा मके या शिलिंदर आंसाचे पार आलात आणि गहऐ छिन्नावर है ऐ ल या तीन बिंदुस्थळांवर मिळतात

आतां (१०१ व्या०प्र०) केल कऐ समांतर आहेत आणि केऐ हीपातळी अबक गहऐ या दोन समांतर पातळ्यांस मिळत्ये याजकरितां (१०५ सि०प्र०) केक लऐ या दोन छिन्नरेषा समांतर आहेत ह्मणोन केलऐक हें समांतरबाजू चौकोन आहे याजकरितां त्याचा समोरासमोरचा लऐ केक या बाजू बराबर आहेत आणि केक ही पायाचे वर्तुळाची त्रिज्या आहे

यारीतीनें

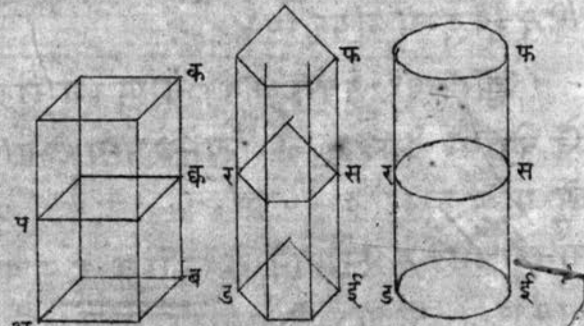
यारीतीनें दाखविलें जातें कीं लह पायाचे वर्तुळाचे केंद्र त्रिज्याचे बरोबर आहे आणि ल स्थळापासून गहऐ पानळीचे परिघापर्यंत जा कोणत्याही रेघा केल्या त्या सर्व पायाचे त्रिज्याचे बरोबर आहेत याजकरितां गहऐ ही पानळी वर्तुळ आणि अबक पायाचे बरोबर आहे हें सिद्ध

---

१०८ सिद्धांत

सर्व पृजमें आणि सर्व शिलिंदरें जांचा पाया आणि उंची बरोबर तीं परस्पर बराबर आहेत

अक डफ दोन पृजमें आणि एक शिलिंदर असेल जांचे पाये अब डई बरोबर असतील जांची उंची बक ईफ बरोबर तर अक डफ हीं दोन भरिवें बराबर होतील



होतील

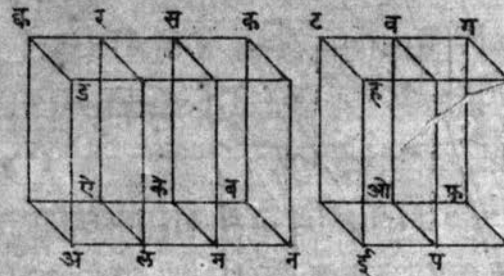
ह्मणोन पक रस हीं दोन छिन्नें बराबर अंतरानें पायाशीं समांतर असावीं तर (पूर्वदोन सिद्धांतां प्र०) पक छिन्न अब पायाचे बरोबर आहे आणि रस छिन्न डई पायाचे बरोबर आहे परंतु (वर सांगीतल्या प्र०) अब डई हे पाये परस्पर बराबर आहेत याजकरितां पक रस हीं छिन्नें ही परस्पर बराबर आहेत याचरीतीनें दाखविलें जातें कीं दुसरीं कोणतीं ही समान अंतराचीं छिन्नें ही परस्पर बराबर

यापासून सिद्ध होतें कीं अक पृजंमाचीं प्रत्येक छिन्नें डफ दुसरें पृजंम अथवा शिलिंदर याचे त्या छिन्नांशीं समान अंतराचे प्रत्येक छिन्नाचे बराबर आहेत आणि यावरून हीं पृजंमें आणि शिलिंदर बरोबर मानांचे अनेक छिन्नांचे बराबर संख्येनें बनलीं आहेत ह्मणोन हीं भरींवें निश्चय परस्पर बरोबर आहेत हें सिद्ध

कुरलरी सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें काटकोन समांतर भरींवांचे बरोबर आहेत जर त्यांचा पाया आणि उंची याचे बरोबर आहे

१०९ सिद्धांत

बराबर उंचीचीं काटकोन समांतर भरींवें परस्परांस आहे-त जसे त्यांचे पाये



अक ईग हीं दोन काटकोन समांतर भरींवें असतील आणी उंची अड ईह बराबर आहे तर अक भरींव : ईग भरींव : : अब पाया : ईफ पायास

ह्मणोन अब पाया ईफ पायास प्रमाण असावा जशी भलती संख्या म (३) भलती संख्या न (२) यांस ह्मोत्ये नंतर कल्पना करकीं त्या संख्याप्रमाणानें अब पायास बराबर काटकोन चौकोन तुकड्यांनीं भागिला ह्मणजे अऐ लके मब हे तीन तुकडे काटकोन-चौकोन परस्पर बराबर जाले तसें ईफ पायास त्या संख्या प्रमाणानें बराबर काटकोन चौकोन तुकड्यांनीं भागिला ह्मणजे ईओ पफ हे दोन तुकडे काटकोन चौकोन जाले ह्मणजे दोनही पायांचे सर्व भाग (वरसांगीतल्या प्र०) बराबर

जालें

आले आणि पायांचे ऐल केम ओप या भागरेषांवर रल सम वप छिन्नपातळी अक्ष आणि ईट यांशीं समांतर कर

आतां अर लस मक ईब पग हीं सर्व काटकोन समांतर भरींवें परस्पर बराबर आहेत कारण त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे याजकरितां अक भरींव ईग भरींवांस आहे जसे अक भरींवाचे म (३) बराबर तुकडे त्यांचे बराबर ईग भरींवाचे न (२) तुकडयांस होतात अथवा जसे अब चे ३ तुकडे ईफ चे २ तुकडयांस होतात अथवा जसा अब सगळा पाया सगळे ईफ पायास होतो हें सिद्ध

कुरलरी हा सिद्धांत आणि पूर्वसिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं बराबर उंचीचीं सर्व पृजमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये कारण सर्व पृजमें आणि शिलिंदरें काटकोन समांतर भरींवाचे बरोबर आहेत जांचा पाया आणि उंची याचे बरोबर आहे

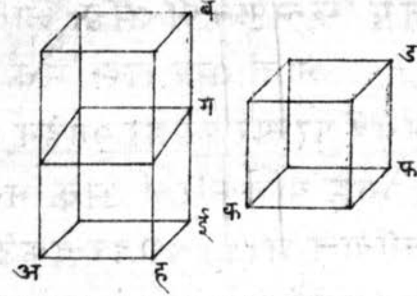
---

११० सिद्धांत

बरोबर पायाचीं काटकोन समांतर भरींवें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची

अब कड

अब कड हीं दोन काट कोन समांतर भरींवें असतील अई कफ या दोन बराबर पायांवर तर अब भरींव : कड भरींव : : ईब उंची : फड उंची



ह्मणोन अग काटकोन समांतर भरींव अई पायावर असेल ज्याची उंची ईग कड काटकोन समांतर भरींवाचे फड उंची बराबर आहे

आतां अग कड हीं दोन भरींवें बरोबर आहेत कारण हीं दोन पृजमें आहेत ज्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे परंतु मनांत आणकीं अब अग या दोन भरींवाचे पाये हब हग आहेत तर दोहोंची उंची अह आहे याजकरितां (१०९ सि०प्र०) तीं परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये हब हग परंतु हब हग हे दोन पाये समांतर बाजू चौकोन आहेत ज्यांची उंची बरोबर हई रेघ आहे याजकरितां ते परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये ईब ईग परंतु अग भरींव कड भरींवाचे बरोबर आहे आणि ईग रेघ फड चे बरोबर आहे याजकरितां अब कड हीं पृजमें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची ईब फड ह्मणजे अब : कड : : ईब : फड हें सिद्ध

प्रथम

प्रथम कुरलरी हा सिद्धांत आणि एकशें आठव्ये सिद्धांताची कुरलरी यांपासून सिद्ध होतें कीं बरोबर पायाचीं सर्व पृजंमे आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची

दुसरी कुरलरी या प्रथम कुरलरीपासून सिद्ध जालें कीं बरोबर पायाचीं सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जशी त्यांची उंची आणि पूर्वसिद्धांताचे कुरलरीपासून सिद्ध जालें कीं बरोबर उंचीचीं सर्व पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाये याजकरितां जेव्हां पाया आणि उंची हीं दोनही बराबर नाहींत तेव्हां सामान्यतः पृजंमें आणि शिलिंदरें हीं सर्व परस्परांस आहेत जसे त्यांचे पाया आणि उंची याचे गुणाकार आणि यापासून निघतें कीं हे गुणाकार त्यांचे महत्वांचे मापांची संख्या आहेत

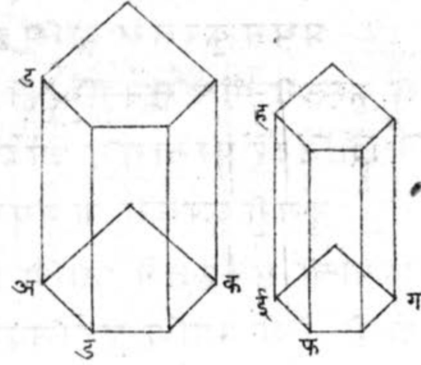
---

११९ सिद्धांत

सरूप पृजंमें आणि शिलिंदरें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे उंचीचे घन अथवा त्यांचे सजाति रेघांचे घन

अबकड

अबकड ईफगह
हीं दोन सरूप पृजंमें असतील
तर कड पृजंम गह पृजंमास
होईल जसा अब^2 : ईफ^2 अथ
वा जसा अड^2 : ईह^2



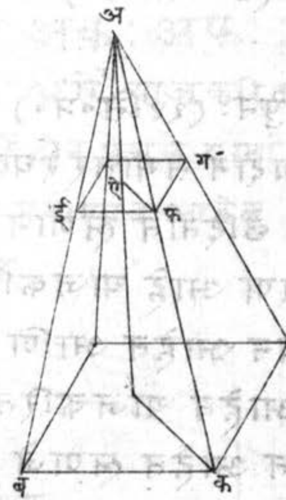
ह्मणोन (११०सि०२कु०प्र)
हीं दोन भरीवें परस्परांस आहेत
जसे त्यांचे पाया आणि उंची यांचे गुणाकार ह्मणजे जसा अक.
अड : ईग. ईह परंतु अक ईग हे दोनपाये सरूप पातळी
आहेत याजकरितां (८९सि०प्र०) तेपरस्परांस आहेत जसे त्यां-
चे सजाति बाजूंचें वर्ग ह्मणजे अक : ईग : : अब^2 : ईफ^2
याजकरितां कड भरींव : गह भरींव : : अब^2. अड : ईफ^2.
ईह परंतु बड फह सरूप पातळ्या आहेत याजकरितां त्यांचा
सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत ह्मणजे अब : ईफ : : अड : ईह
अथवा अब^2 : ईफ^2 : : अड^2 : ईह^2 याजकरितां अ̿ब̿. अ̿ड :
ई̿फ̿. ई̿ह̿ : : अब^3 : ईफ^3 अथवा जसा अड^3 : ईह^3 याजकरि-
तां कड भरींव गह भरींवांस आहे जसा अब^3 : ईफ^3 अथवा
अड^3 : ईह^3 हें सिद्ध

(७०सि०रीतीप्र०) त्या दोहोंचे समगुणाकारही प्रमाणांत आहेत

२१२ सिद्धांत

कोणत्येही सरळ शंकूचें पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलें छिन्न पायाशीं रूपआहे आणि या दोन पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया परस्परांस आहेत असे त्यांजवर शंकुशिरापासून केल्ये लंबांचे वर्ग

अबकड कोणताही सरळरेघ शंकू असेल आणि ईफग छिन्न बकड पायाशीं समांतर असेल आणि अऐह रेघ दोन पातळ्यांवर ह ऐ स्थळीं लंब असेल तर बड ईग या दोन सरूप पातळ्या होतील आणि बड पातळी ईग पातळीस होईल जसा अह : अऐ



ह्मणोन कह फऐ सांध आतां (२०५ सिद्धांताप्र॰) जेव्हां एकपातळी दोन समांतर पातळ्यांस छेदित्ये तेव्हां छिन्नें समांतर होतात याजकरितां अबक पातळी बड ईग या दोन समांतर पातळ्यांस मिळत्ये तर बक ईफ छिन्नें समांतर करित्ये या

रीतीनें

रीतीनें अकड पातळी कड फग हीं छिन्नें समांतर करित्ये पुनः (२०४ सि०प्र०) रेघांचे दोन समांतर जोड दोन अंतर कोन करितात याजकरितां ईफ फग रेघांचे जोडांतील ईफग कोन त्याजोडां-शीं समांतर बक कड रेघांचे जोडांतील बकड कोनाबराबर आहे यारीतीनें दाखविलें जातें कीं ईग आकृतीचे प्रत्येक कोन बड आकृतीचे प्रत्येक कोनांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत याज करितां (७० व्या०प्र०) या दोन आकृती परस्परांशीं समकोन आ-हेत

पुनः (२४ सि०प्र०) अब अक अड यातीन रेघा बक ईफ यादोन समांतर रेघांस आणि कड फग यादोन समांतर रेघांस छेदितात ह्मणोन बरोबर कोन करितात आणि अ कोन साधारण आहे याजकरितां अबक अईफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत आणि अकड अफग हेदोन त्रिकोण सम-कोन आहेत याजकरितां (८४ सि०प्र०) त्यांचा सजाति बाजू प्र-माणांत आहेत ह्मणजे अक : अफ : : बक : ईफ : : कड : फग आणि यारीतीनें दाखविलें जातें कीं ईग पातळीं-तील सर्वरेघा बड पायांतील सजाति सर्वरेघांशीं प्रमाणांत आ-हेत यांतून निघतें कीं यादोन पातळींतील सर्वकोन परस्पर बराबर आणि त्या कोनाचे दोहोंकडील बाजू परस्पर प्रमाणां-त आहेत तेव्हां या दोनपातळ्या (७० व्या०प्र०) परस्परांशीं सरू

प आहेत

परंतु (८९ सि० प्र०) सरूप पातळ्या परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग ह्मणजे बड : ईग : : बक^2 : ईफ^2 अथवा (वर लिहिल्या प्र०) जसा अक^2 : बफ^2 नंतर अहक आणि अऐफ या दोन त्रिकोणांत (९८ सि० प्र०) ह ऐ हे दोन काटकोन आहेत आणि अ कोन दोहोंस साधारण आहे याजकरितां हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत आणि त्यांचा सजाति बाजू प्रमाणांत आहेत ह्मणजे अक : अफ : : अह : अऐ अथवा अक^2 : अफ^2 : : अह^2 : अऐ^2 याजकरितां या दोन पातळ्या ह्मणजे पाया आणि छिन्न हीं दोन प्रथम युग्मांशीं प्रमाणांत आहेत तेव्हां दुसर्‍ये युग्माशींही प्रमाणांत आहेत ह्मणजे बड : ईग : : अह^2 अऐ^2 हें सिद्ध

---

२२३ सिद्धांत

कोणात्येही वर्तुळ शंकूचें पायाशीं समांतर पातळीनें छेदिलेलें छिन्न वर्तुळ आहे आणि या दोन पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया परस्परांस आहेत जसे त्यांजवर शंकुशिरापासून

केलेले

केलेले लंबांचे वर्ग

अबकड एक वर्तुळ शंकू असेल असेल आणि गहऐ हें त्याचें छिन्न बकड पायाशीं समांतर असेल तर गहऐ वर्तुळ होईल आणि बकड गहऐ या दोन पातळ्या परस्परांस होतील असे त्यांजवर शंकुशिरापासून केले ल्ये लंबांचे वर्ग

ह्मणोन या दोन समांतर पातळ्या ह्मणजे छिन्न आणि पाया यांजवर अलफ रेघ लंब कर आणि अकई अडई या दोन पातळ्या शंकूचे अकेई आंसापार होउंदे अशा कीं छिन्नपातळीस हऐके या बिंदूवर मिळतील

आतां (वर सांगीतल्याप्र०) गहऐ छिन्न बकड पायाशीं समांतर आहे आणि कके डके या दोन पातळ्या त्या दोन समांतर पातळ्यांस मिळतात याजकरितां (१०५ सि०प्र०) हके रेघ कई रेघेशीं समांतर आहे आणि ऐके रेघ डई रेघेशीं समांतर आहे पुनः अईक अकेह हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं समकोन आणि अईड अकेऐ हे दोन त्रिकोण परस्परांशीं समकोन आहेत याजकरितां

केह : ईक : : अके : अई

आणि केऐ : ईड : : अके : अई

याजकरितां केह : ईक : : केऐ : ईड

परंतु ईक ईड या दोन रेघा बरोबर आहेत कारण दोनही एक वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत याजकरितां केह केऐ याही परस्पर बराबर आहेत यारीतीनें दाखविलें जातें कीं के स्थळापासून गहऐ पातळीवर मर्यादे पर्यंत जा रेघा केल्या त्या सर्वही परस्पर बराबर याजकरितां (४५ व्या०प्र०) ही गहऐ पातळी वर्तुळ आहे

पुन: सरूपत्रिकोणापासून अल : अफ : : अके : अई

आणि केऐ : ईड : : अके : अई

याजकरितां अल : अफ : : केऐ : ईड

अथवा (७४ सि०प्र०) अल^2 : अफ^2 : : केऐ^2 : ईड^2

परंतु (९२ सि०प्र०) गहऐ वर्तुळ : बकड वर्तुळ : : केऐ^2 : ईड^2

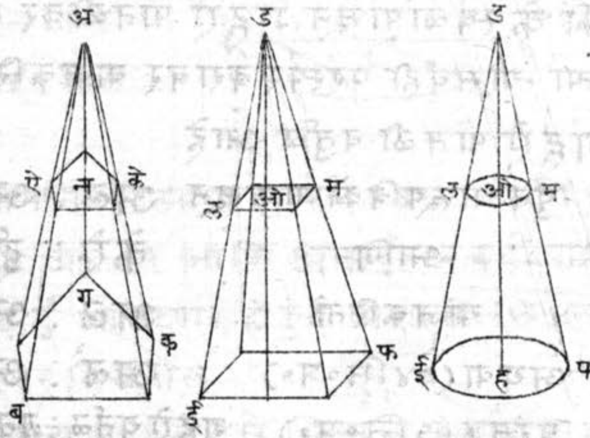
याजकरितां गहऐ वर्तुळ : बकड वर्तुळ : : अल^2 : अफ^2

हें सिद्ध

११४ सिद्धांत

बराबर पायाचे आणि बराबर उंचीचे सर्वसरळरेघ शंकू आणि वर्तुळशंकू परस्पर बराबर आहेत

अबक डईफ हे कोणतेही सरळरेघशंकू आणि वर्तुळशंकू असतील जांचे पाये बक ईफ आणि उंची अग डह बरोबर आहे तर अबक सरळरेघशंकू आणि डईफ वर्तुळशंकू हे बराबर होतील



ह्मणोन मनांत आणकीं ऐके लम या दोन पातळ्या पायाशीं समांतर आणि शिरापासून अन डओ याबरोबर अंतरानें केल्या आहेत

आतां (पूर्वदोनसि॰ पासून) डओ॑ : डह॑ : : लम पातळी : ईफ पातळी

आणि अन॑ : अग॑ : : ऐके पातळी : बक पातळी

परंतु

परंतु (वरसांगीतल्याप्र०) अन आणि अग हे अनुक्रमें डओ आणि डह यांचेबरोबर आहेत याजकरितां ऐके पातळी: धक पातळी : : लम पातळी : ईफ पातळी नंतर (वरसांगीतल्या०) बक पातळी ईफ पातळी बरोबर आहे याजकरितां ऐके पातळी लम पातळी बराबर आहे यारीतीनें दाखविलें आतेंकीं दुसरीं कोणतींही छिन्नें जीं शिरापासून बराबर अंतरानें केलींतीं सर्वपरस्परबराबर

यांतून निघतेंकीं वर्तुळशंकूचीं प्रत्येक छिन्नें यासरळरेघशंकूचे शिरापासून त्यांशीं समानअंतरांचे प्रत्येक छिन्नांचेबरोबर आहेत आणि अबक डईफ हीं दोन भरींवें अशाप्रकारच्या बरोबर छिन्नांहींच बनलीं आहेत याजकरितां हीं सर्व भरींवें निश्चय परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध

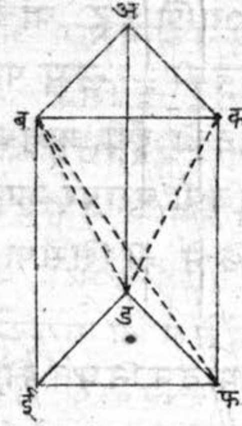
---

११५ सिद्धांत

सर्व सरळरेघशंकू पृजंमाचे तृतीयभाग आहेत ज्याचापाया आणि उंची त्यासरळरेघ शंकूचे बराबर आहे

अबकडईफ

अबकडईफ एक पृजंभ आणि बडईफ एकसरळरेघ शंकू अशीं हीं दोन डईफ यात्रि कोण पायावर असतील जांची उंची ईब आहे तर बडईफ सरळरेघ शंकू अबकडईफ पृजंमाचा तृतीयभाग होईल



ह्मणोन पृजंमाचे तीन बाजूंचे पातळ्यांवर बफ बड डक अशा तीन कर्णरेघा कर आतां बडफ बकड यादोन पातळ्या सर्व पृजंमास छेदून त्याचे बडईफ डअबक डबकफ ऐसेतीन सरळरेघ शंकू करितात हे सर्व परस्पर बरोबर आहेत ते कसे तें पुढें सांगतो

आतां पृजंमाचीं दोन शेवटें बराबर आहेत याजकरितां (११४सि॰प्र॰) ज्याचा पाया अबक आणि शिर ड हा सरळरेघ शंकू त्याचे बरोबर आहे कीं ज्याचा पाया डईफ आणि शिर ब आहे कारण यादोहोंचा पाया आणि उंची बराबर आहे

परंतु ज्याचा पाया डईफ आणि शिर ब तसें ज्याचा पाया बईफ आणि शिर ड हे दोनही सरळरेघ शंकू एकच भरींव आहे आणि हा शेवटील सरळरेघ शंकू तिसर्या सरळरेघ शंकूचे बरोबर आहे कारण त्यांची उंची शिर ड आणि पाये बईफ बकफ

बरोबर

बरोबर आहेत याजकरितां हे सर्व सरळरेघ शंकू कीं जांपासून पृजंम्म बनलें आहे तेपरस्पर बराबर आहेत आणि तेप्रत्येक त्या पृजंमाचे तृतीयभाग आहेत अथवा तें पृजंम त्याप्रत्येक शंकूचे तिपट आहे हें सिद्ध

यांतून निघतें कीं कोणत्येही आकृतीचे सर्व सरळरेघ शंकू त्यापृजंमाचे तृतीयभाग आहेत ज्याचापाया आणि उंची त्या शंकूचे बराबर आहे कारण पृजंमाचा पाया कोणत्येही आकृतीचा असेल तो भागून त्याचे त्रिकोण करितां येतील आणितें सर्व भरींव त्रिकोण शंकूं हीं भागतां येईल

कुरलरी कोणताही वर्तुळशंकू शिलिंदर अथवा पृजंम याचा तिसरा भाग आहे जर शंकूचा पाया आणि उंची त्याचे बराबर असेल कारण वर सिद्ध जालेंआहे कीं सर्वशिलिंदरें पृजंमाचे बराबर आहेत जेव्हां त्यांचा पाया आणि उंची बराबर आहे तसें वर्तुळशंकू सरळरेघ शंकूंचे बराबर आहेत जेव्हां त्याचा पाया आणि उंची बराबर आहे

स्कोल्यंम पृजंम आणि शिलिंदर यांजविषयीं जेंवर सिद्ध होउन गेलें तेंसर्व सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळशंकू यांजवर लागतें कारण पृजंमें आणि शिलिंदरें हीं सर्व सरळरेघ शंकू आणि वर्तुळ शंकू यांचेतिपट आहेत ह्मणोन असें सरळरेघ शंकू अथवा वर्तुळशंकू हेपरस्परांस आहेत जशा त्यांचा सरळरेघ बाजू अथवा

व्यास

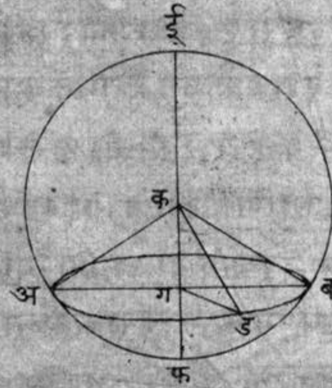
व्यास अथवा उंची इत्यादिक सरळरेघांचा घन हेंच सर्व सरूप भ-रींवा वरही लागतें ह्मणजे सर्व सरूप भरीवें परस्परांस आहेत त-से त्यांचे सजाति सरळरेघ बाजूंचे घन कारण हीं सरूप भरीवें सर-ळरेघ शंकू करूनच बनलीं आहेत जे शंकू परस्पर सरूप आहेत

---

११६ सिद्धांत

जर पातळीनें गोल छेदिलें तर छिन्नवर्तुळ होईल

अईबफ एक गोल असेल त्यास अडब पातळीनें छेदिलें तर अडब छिन्नवर्तुळ होईल.



ह्मणोन अब ज्या छिन्नाचा व्यास कर आणि यारेघेवर अथवा अडब छिन्नावर गोलाचा ईकगफ आंस गोलाचे क मध्यस्थळापार लंब कर ह्मणजे हा आंस (४१ सि॰प्र॰) ग स्थळीं अब ज्यास दुभागील नंतर कअ कड सांध आणि अडब छिन्नाचे

छिन्नाचे परिमितीवर ह्मणजे कोणत्येही ड स्थळापर्यंत कड गड रेषा कर

आतां (वरसांगीतल्याप्र०) कग रेघ अडब पातळीवर लंब आहे याजकरितां (९० व्यां० प्र०) पातळींतील गह गड या दोन रेघांवरही लंब आहे यापासून कळतें कीं कगअ कगड हे दोन काटकोन त्रिकोण आहेत जांत कग रेघ साधारण. आहे आणि त्यांचा कअ कड या दोन कर्णरेघा परस्पर बराबर कारण या दोनही आंसाच्या त्रिज्या आहेत याजकरितां (३४ सि० २ कु० प्र०) त्यांच्या तिसर्याही बाजू गअ गड बराबर आहेत या रीतीनें दाखविलें जालें कीं ग मध्यस्थळापासून अडब छिन्नाचे पातळीवर मर्यादेपर्यंत दुसर्या कितीही रेघा केल्या तरीं त्या सर्व गअ चे अथवा गड चे बराबर आहेत याजकरितां हें छिन्न वर्तुळ आहे हें सिद्ध

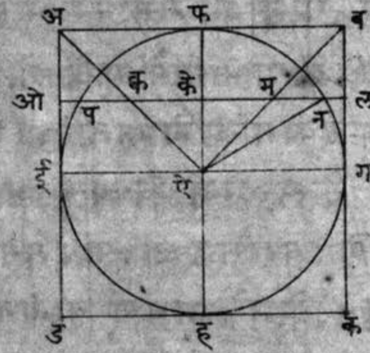
कुरलरी गोलाचे मध्यापार जें छिन्न केलें तें वर्तुळ आहे त्याचा मध्यबिंदू आणि व्यास गोलाचा मध्यबिंदू आणि व्यास यांचे बराबर आहे. आणि या छिन्नास गोलाचें मोठें वर्तुळ ह्मणतात आणि गोलाचे दुसर्ये सर्व छिन्नांस गोलाचीं लाहान वर्तुळें ह्मणतात

---

१२७ सिद्धांत

गोलाचे भोंवती गोलाचे चार आंगां बराबर संलग्न जें शिलिंदर त्याचे दोन तृतीयांश तें गोल आहे

अबकड शिलिंदर असेल जें ईफगह गोलास भोंवती चारी आंगां बराबर स्पर्शलें आहे तर ईफगह गोल अबकड शिलिंदराचे दोन तृतीयांश होईल



ह्मणोन शिलिंदराची अक पातळी आणि गोल यांचे ऐ मध्य स्थळापार छिन्नअसेल आणि अऐ बऐ सांध नंतर फऐह रेघ अड शीं अथवा बक शीं समांतर कर आणि ईऐग ओकेल या दोन अब शीं किंवा डक शीं समांतर रेघा कर ह्मणजे ओकेल रेघ बऐ रेघेस म स्थळीं मिळेल आणि गोल छिन्नास न स्थळीं मिळेल नंतर ऐन सांध

आतां कल्पना करकीं हफबक पातळी हफ आंसावर फिरविल्यास फग चौरसापासून अग शिलिंदर बनेल तसें

ऐफग

ऐफग वर्तुळ पादापासून ईफग अर्धगोल बनेल आणि ऐफब त्रिकोणापासून ऐअब वर्तुळशंकू बनेल याफिरवण्यापासून केल केन केम यातीनरेषा अग शिलिंदराचें ओल छिन्न ईफग अर्धगोलाचें पन छिन्न आणि ऐअब शंकूचें क्म छिन्न या सर्व वर्तुळ छिन्नांच्या अनुक्रमें त्रिज्या होतात

आतां फब फऐ अथवा ऐग याचेबरोबर आहे आणि केल फब शीं समांतर आहे याजकरितां (८२सिद्धांतप्र०) सरूप त्रिकोण मार्गानें ऐके केम चे बराबर आहे नंतर ऐकेन या काटकोन त्रिकोणांत (३४ सि०प्र०) $ऐन^2$=$ऐके^2$+$केन^2$ आहे पुनः केल ऐग त्रिज्येचे अथवा ऐन त्रिज्येचे बरोबर आहे आणि (वरसिद्धझाल्यावरून) केम=ऐके याजकरितां $केल^2$=$केम^2$+$केन^2$ अथवा यातीन वर्तुळ छिन्नांचे सर्वांहून लांब त्रिज्येचा वर्ग दोन दुसऱ्यै छिन्नांचे त्रिज्यांचे वर्गांचे बेरिजे बराबर आहे आणि (९३सि०प्र०) वर्तुळें परस्परांस आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे अथवा त्रिज्यांचेवर्ग याजकरितां जें वर्तुळ केल त्रिज्येचे फिरवण्यापासून होतें तें केन केम यात्रिज्यांचे फिरवण्यापासून जीं दोन वर्तुळें होतात त्यांचे बेरिजे बराबर आहे अथवा ओल हें शिलिंदराचें छिन्न गोलाचें पन छिन्न आणि वर्तुळशंकूचें क्म छिन्न यांचे बेरिजेबराबर आहे आणि केल रेघ फब किंवा ऐग यांशीं समांतर कोठेही ठेविलीतरीं शिलिंदराचें छिन्न त्या

दोन

दोन छिन्नांचे बेरिजे बराबर होईल यांतून निघतें कीं ईब शिलिंद-र जें पूर्व सर्व छिन्नांपासून बनलें गेलें तें ईफग अर्धगोल आणि ऐअब वर्तुळशंकू या दोहोंचे बेरिजेबराबर आहे

परंतु (११५ सि० २ कु० प्र०) ऐअब वर्तुळशंकू त्याचे बरोबर पायाचे आणि बरोबर उंचीचे ईब शिलिंदराचा तृतीय भाग आहे याजकरितां ईफग अर्धगोल त्या शिलिंदराचे बाकी राहिल्ये दोन तृतीय भागां बरोबर आहे अथवा ईफगह हें सर्वगोल अबकड या सर्व शिलिंदराचे दोन तृतीयभाग आहेत हें सिद्ध

प्रथम कुरलरी वर्तुळशंकू अर्धगोल आणि शिलिंदर हीं सर्व बरोबर पायाचीं आणि बरोबर उंचीचीं परस्परांस आहेत यापुढील संख्या १ २ ३ याप्रमाणें

दुसरी कुरलरी सर्वगोल परस्परांस आहेत असे त्यांचे व्यासांचे घन कारण (११२ सि० प्र०) हे व्यास त्या गोलांचे सभोंवत्या शिलिंदरांचा सजाति सरळरेघा आहेत

तिसरी कुरलरी वरसांगीतल्ये सिद्धांतापासून कळतें कीं ईगनप गोलखंड ईगलओ शिलिंदर आणि ऐमक वर्तुळ यांचे वजाबाकीचे बरोबर आहे ह्मणजे सर्वांची उंची ऐके बराबर आहे आणि पफन गोलखंड अबलओ शिलिंदर आणि अकमब वर्तुळशंकूखंड यांचे वजाबाकी बराबर आहे या सर्वांची उंची फके बराबर आहे

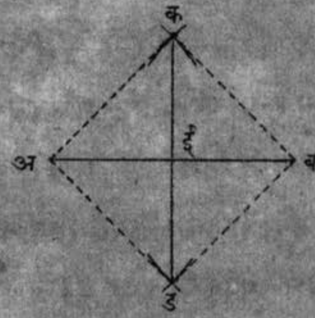
═══

कृत्यें

प्रथम कृत्य

कोणतीही अब सरळ रेघ दुभागण्याचें ह्मणजे तीचे बरा-बर दोनतुकडे करण्याचें

अ आणि ब हीं दोन मध्य स्थळें आणोन कोणत्येही बरोबर त्रिज्येनें दोनदोन कौंस कर असे कीं क आणि ड यास्थळीं परस्पर छेदितील नंतर कड रेघ कर ह्मणजे हीरेघ सांगीतल्ये अब रेघेस ई स्थळीं दुभागील



ह्मणोन अक बक अड बड या चार त्रिज्या कर आतां या चार त्रिज्या बरोबर आहेत आणि अकड बकड या दोन त्रि-कोणांत कड बाजू साधारण आहे याजकरितां हे दोन त्रिकोण समबाजूआहेत आणि ह्मणोनच (५ सि॰ प्र॰) समकोनही आहे-त ह्मणजे अकई कोन बकई कोना बराबर आहे

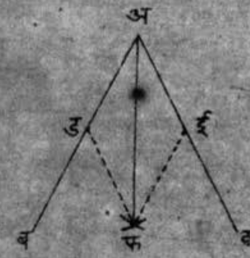
नंतर अकई बकई या दोन त्रिकोणांत एकाचा अक कई

या बाजू अनुक्रमें दुसऱ्यांचे बक कई या बाजूचे बराबर आहेत आणि त्यांचे आंतील अकई बकई हे कोन (वरसिद्ध झाल्यापासून) बराबर आहेत याजकरितां (१ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत यापासून अई बाजू बई बाजूचे बराबर आहे हें सिद्ध

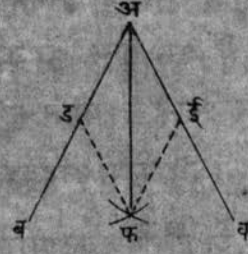
दुसरें कृत्य

कोणताही बअक कोन दुभागावयाचें

कोणत्येही एकत्रिज्येनें अ मध्यस्थळ मानून अब अक रेघांतून अड अई बराबर भाग कर आणि त्याच त्रिज्येनें ड ई हीं दोन मध्यस्थळें करून दोन कोंस कर असे कीं फ स्थळीं परस्परांस छेदितील नंतर अफ रेघ कर ह्मणजे ही रेघ बअक कोनास दुभागील



ह्मणोन डफ ईफ सांध आतां अडफ अईफ या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड डफ या दोन बाजू दुसर्याचे अई ईफ या दोन बाजूंचे बराबर आहेत कारण यासर्व बरोबर त्रिज्या आहेत



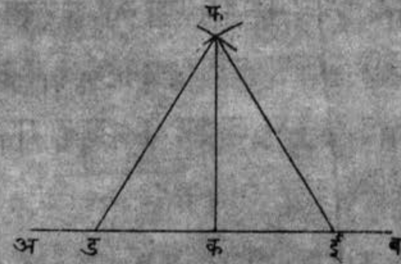
आणि अफ बाजू दोहोंसही साधारण आहे याजकरितां हे दोनही त्रिकोण समबाजू आणि ह्मणोनच (५सि०प्र०) समकोनही आहेत ह्मणजे बअफ कोन कअफ कोनाबराबर आहे हें सिद्ध

स्कोल्यंम याचरीतीनें वर्तुळाचा कौंस दुभागिला जातो

तिसरें कृत्य

कोणत्येही अब सरळरेषेचे सांगीतल्ये क स्थळावर लंब करावयाचें

सांगीतलें क स्थळ मध्यकरून कोणत्येही एक त्रिज्येनें अब रेषेवर कड आणि कई हे बराबर भागकर आणि ड ई हीं दोन



मध्यस्थळें

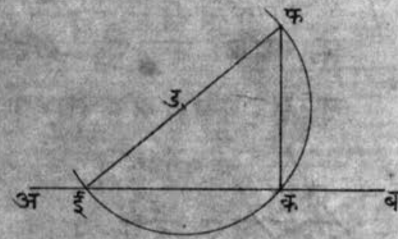
मध्यस्थळें करून कोणत्येही त्रिज्येनें दोन कौस कर असे कीं फ स्थळीं परस्पर छेदितील नंतर कफ सांध ह्मणजे हीरेघ इच्छिलालंब होईल

ह्मणोन डफ ईफ या दोन बरोबर त्रिज्याकर आतां कडफ कईफ या दोनत्रिकोणांत एकाचा कड डफ या दोन बाजू दुसऱ्याचे कई ईफ या दोन बाजूंचे बराबर आहेत आणि कफ दोहोंस साधारण आहे ह्मणोन हे दोन त्रिकोण समबाजूं आणि ह्मणोनच (५सि०प्र०) समकोनही आहेत तेव्हां क स्थळींचे दोनही कोन बराबर आहेत याजकरितां (११व्या०प्र०) कफ रेघ अब रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध

दुसऱ्या रीतीनें

जेव्हां सांगीतला क बिंदू रेघेचे शेवटाजवळ आहे

अब रेघेचे वरल्या आंगास कोणताही ड बिंदू मध्यकरून क बिंदूपार एक वर्तुळ कौस कर असा कीं अब रेघेस ई स्थळींही छेदील नंतर ड बिंदूमध्यापार ईडफ व्यास करून कफ सांध ह्मणजे हा अब रेघेवर इछिला लंब होईल



आतां क कोन अर्धवर्तुळांत आहे ह्मणोन (५२ सि०प्र०)

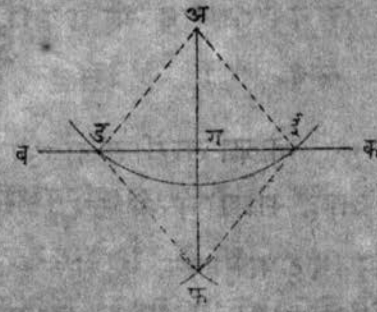
काटकोन

काटकोन आहे याजकरितां (२५ व्या० प्र०) कफ रेघ लंब आहे हें सिद्ध

चवथें कृत्य

कोणत्येही अ बिंदूपासून सांगितल्ये बक रेघेवर लंब उतरावयाचें

सांगितला अ बिंदू मध्य आणून कोणत्येही त्रिज्येनें एक कौस कर असा कीं बक रेघेस ई आणि ड या दोन स्थळीं छेदील नंतर ड आणि ई हीं दोन मध्यस्थें आणून दोन कौस कर असे कीं फ स्थळीं परस्पर छेदितील आतां अगफ रेघ कर ह्मणजे ही रेघ बक रेघेवर लंब जाला

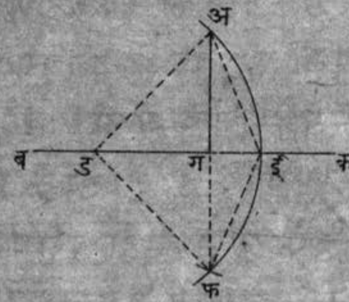


ह्मणोन अड अई या दोन बरोबर त्रिज्या कर आणि तशाच डफ ईफ याही बरोबर त्रिज्या कर आतां अडफ अईफ या दोन त्रिकोणांत एकाच्या अड डफ या दोन बाजू दुसर्याचे अई ईफ या दोन बाजूंचे बराबर आहेत आणि अफ साधारण आहे

आहे याजकरितां हे दोन त्रिकोण समबाजू आणि ह्मणोनच (५ सि० प्र०) समकोनही आहेत ह्मणोन डअग कोन ईअग कोना बरोबर आहे पुनः अडग अईग या दोन त्रिकोणांत एकाचा अड अग या दोन बाजू दुसऱ्याचे अई ईग या दोन बाजूंचे बराबर आहेत आणि यांचे आंतील कोनही परस्पर बराबर ह्मणोन (४ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत ह्मणजे ग स्थळींचे दोन कोन बराबर काटकोन आहेत याजकरितां (११ व्या० प्र०) अग रेघ बक रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध

दुसऱ्ये रीतीनें

जेव्हां सांगीतला अ बिंदू रेघेचे शेवटाकडील स्थळाचे समोर आहे सांगीतल्ये बक रेघेवर कोणतेंही ड मध्यस्थळ आणून अ बिंदूपार एक कौस कर असा कीं बक रेघेस ई स्थळीं छेदील आतां ई स्थळ मध्यकरून ईअ त्रिज्येनें एक कौस कर असा कीं पूर्व कौसास फ स्थळीं छेदील नंतर अगफ रेघ कर ह्मणजे ही रेघ बक रेघेवर इछिला लंब होईल

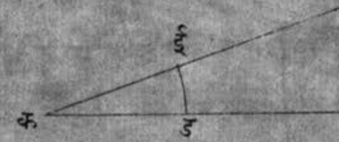


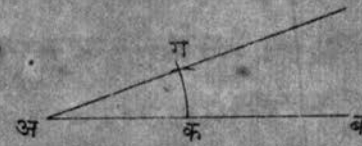
ह्मणोन

ह्मणोन डअ डफ या दोन बराबर त्रिज्या कर आणि ईअ ईफ या दोन बराबर त्रिज्या कर आतां डअई डफई हे दोन त्रिकोण समबाजू आणि (५ सि० प्र०) समकोनही आहेत याजकरितां ड स्थळींचे दोनही कोन बराबर आहेत यांतून निघतें कीं डअग डफग या दोन त्रिकोणांत एकाचा डअ डग या दोन बाजू दुसर्याचे डफ डग या दोन बाजूंचे बराबर आणि त्यांचे आंतील कोनही बराबर ह्मणोन (१ सि० प्र०) ग स्थळींचे दोन कोन बराबर याजकरितां हे दोन काटकोन आहेत ह्मणोन अग रेघ बक रेघेवर लंब आहे हें सिद्ध

पांचवें कृत्य

अब रेघेवर अ बिंदूस्थळीं सांगीतल्ये क कोना बराबर कोन करावयाचें





अ आणि क हे दोन बिंदू मध्य करून कोणत्येही त्रिज्येनें डई फग हे दोन कौस कर नंतर डई त्रिज्येनें फ मध्य करून दुसरा एक कौस कर असा कीं फग ला

ग स्थळीं छेदील आतां ग बिंदूपार अग रेघ कर हीरेघ इच्छित कोन करील

म्हणोन कल्पना कर कीं डई फग या दोन बरोबर रेघा अथवा त्रिज्या केल्या आहेत तर कडई अफग हे दोन त्रिकोण परस्पर समबाजू आणि (५ सि० प्र०) समकोनही आहेत याजकरितां अ कोन क कोना बराबर आहे हें सिद्ध

साहावें कृत्य

सांगीतल्ये बक रेघेशीं अ बिंदूपार एक समांतर रेघ करावी

अ बिंदूपासून सांगीतल्ये बक रेघेवर कोणत्येही ड स्थळापर्यंत एक अड रेघ कर नंतर (५ कृत्याचे रीतीनें) ईअफ रेघ कर अशी कीं फअड कोन बडअ कोना बराबर होईल. तर ईफ रेघ बक रेघेशीं समांतर होईल

ई अ फ
ब ड क

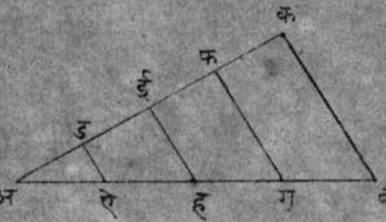
म्हणोन बडअ कोन त्याचे व्युत्क्रम फअड कोना बराबर आहे

आहे याजकरितां (१३ सि॰प्र॰) बक ईफ यारेषा परस्पर समां-तर आहेत हें सिद्ध

सातवें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेषेचे हावे तेवढे भाग बराबर करावयाचें

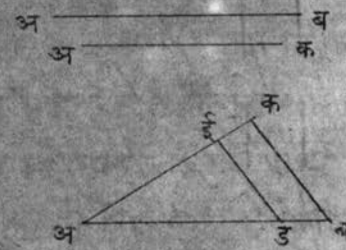
अब रेषेशीं अ बिंदूस्थळीं कोणताही कोन करील अशी एक अक रेघकर आतां अब रेषेचे जितके बराबर भाग करायाचे आहेत तितके यथेछ अंतरानें अड डई ईफ फक असे बराबर भागकर आतां बक सांध नंतर बक शीं फग ईह डऐ या समांतर रेषाकर या सर्व अब रेषेस इछे प्रमाणें भागितील कारण (८२ सि॰प्र॰) या समांतर रेषा अब अक या दोन बाजूंस प्रमाणानें भागितात हें सिद्ध



आठवें कृत्य

आठवें कृत्य

सांगीतल्ये अब अक रेघांचें तिसरें प्रमाण काढायांचें



सांगीतल्या अब अक या दोनरेघा अ स्थळीं कोणता हीकोन करितील अशा ठेव अब वर अक चेबराबर अड भाग कर आतां बक सांध आणि या बक शीं डई समांतर रेघ कर ह्मणजे अई इछिलें तिसरें प्रमाण होईल

ह्मणोन बक डई या दोनरेघा परस्पर समांतर आहेत याजकरितां त्यांहीं (८२सि॰प्र॰) अब अक या दोन बाजू प्रमाणानें छेदिल्या ह्मणजे अब : अक : : अड अथवा तिचेबराबरीची अक : अई याजकरितां अब अक या दोहोंचें तिसरेंप्रमाण अई आहे हें सिद्ध



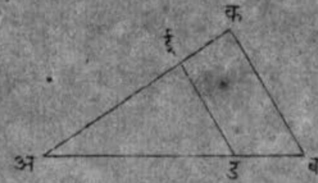
नववें कृत्य

नववें कृत्य

अब अक अड या सांगीतल्या तीन रेघांचें चतुःप्रमाण काढायाचें

अ ———— ब
अ ———— क
अ ———— ड

सांगीतल्ये तीन रेघांतून अब अक या दोन रेघा अस्थळीं कोणताही कोन करितील अशा ठेव आणि अब वर तिसरी रेघ अड कर नंतर बक सांधून तिशीं समांतर रेघ डई कर नंतर अई रेघ इच्छिलें चतुःप्रमाण होईल

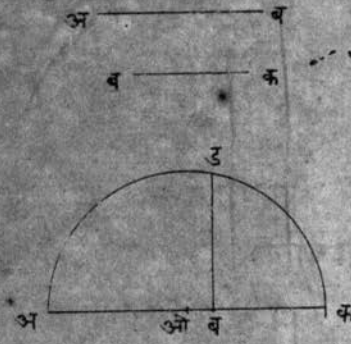


ह्मणोन बक डई या दोन रेघा परस्पर समांतर आहेत याजकरितां त्यांहीं (८२ सि॰प्र॰) अब अक या दोन बाजू प्रमाणानें छेदिल्या ह्मणजे अब : अक : : अड : अई हें सिद्ध

दाहावें कृत्य

सांगीतल्ये अब बक या दोन रेघांचें मध्यप्रमाण काढायाचें

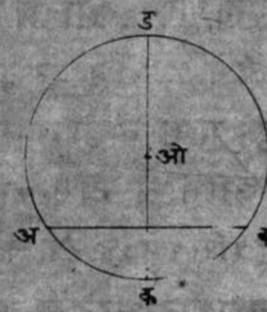
अब



अब बक यासांगीतल्या दोन रेघांची एकत्र अबक रेघ कर आणि हीरेघ व्यासकरून त्याजवर अडक अर्धवर्तुळ कर नंतर त्या अबक रेघेवर बस्थळीं लंबकर असा कीं अर्धवर्तुळास डस्थळीं मिळेल आतां (८७ सि० कु० प्र०) ही बड रेघ अब बक यांचें मध्यप्रमाण आहे हें सिद्ध

अकरावें कृत्य

कोणत्येही वर्तुळाच्या मध्य काढायाचें

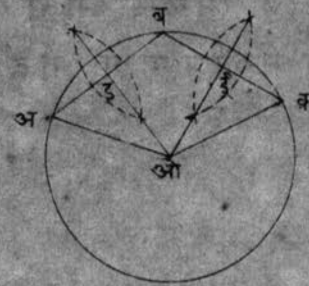


कोणतीही अब ज्या कर आणि तीस डक लंबानें दुभाग म्हणजे हा लंब (४१ सि० प्र०) व्यास होईल याजकरितां कड व्यास दुभागिल्यास दुभागचिन्ह ओ स्थळ मध्य होईल हें सिद्ध

बारावें कृत्य

सांगीतल्ये अ ब क यातीन बिंदूंचे पार वर्तुळ परिघ करायाचें

ब मध्यबिंदूपासून बअ बक या दोन ज्याकर आणि त्यास लंबोनी दुभागून ते लंब वाढीव असे कीं ओ स्थळीं परस्पर मिळतील तें ओ स्थळ वर्तुळ परिघाचा मध्य होईल आतां या ओ मध्यापासून कोणत्ये ही बिंदूपर्यंत ह्मणजे जसें ओअ



या त्रिज्येनें एकवर्तुळ कर हें वर्तुळ राहिल्ये ब क या बिंदूचे पार जाईल

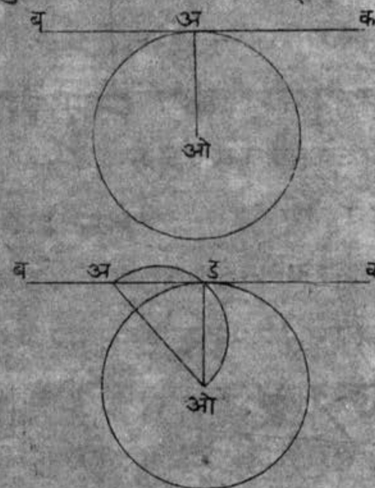
ह्मणोन ओअड ओबड या दोन त्रिकोणांत (याच कृत्यरीतीनें) अड डब या दोन बाजू बराबर आहेत आणि ओड बाजू दोहींस साधारण आहे आणि ड स्थळींचे त्या बाजूंचे आंतील दोन काटकोन परस्पर बराबर आहेत या जकरिनां (१सि०प्र०) त्यांचा तिसर्याही बाजू ओअ ओब या परस्पर बराबर आहेत याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं ओक बाजू

ओब

ओब चे अथवा ओअ चे बराबर आहे ह्मणजे ओअ ओब ओक या सर्व बराबर याजकरितां या रेघा एकच वर्तुळाचीं त्रिज्या आहेत हें सिद्ध

तेरावें कृत्य

सांगीतल्ये अ बिंदूपार वर्तुळास स्पर्शरेघ करायाचें जेव्हां सांगीतला अ बिंदू वर्तुळ परिघावर आहे



अ बिंदू आणि ओ वर्त्तुळमध्य हे दोन्ही सांध आणि या. अओ त्रिज्येवर बअक रेघ लंब कर ह्मणजे ही रेघ (४६ सि॰ प्र॰) वर्तुळास अ बिंदूपार स्पर्शरेघ होईल

परंतु जेव्हां अ बिंदू वर्तुळाचे बाहेर आहे तेव्हां त्यापासून वर्तुळाच्या ओ मध्य पर्यंत अओ रेघ कर आणि या अओ रेघेस व्यास करून एक अर्धवर्तुळ कर असें कीं वर्तुळ

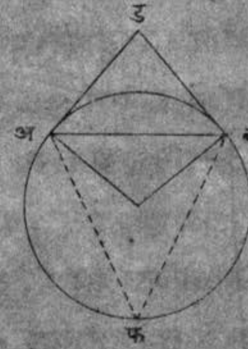
परिघास

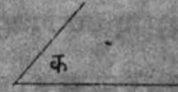
परिघास ड स्थळीं छेदील नंतर या ड छेदन बिंदूपार बअडक रेघ कर म्हणजे हीरेघ अ बिंदूपार वर्तुळास इछिली स्पर्शरेघ होईल

म्हणोन डओ सांध तर अडओ हाकोन अर्धवर्तुळांत काट कोन आहे याजकरितां अड रेघ डओ त्रिज्येवर लंब आहे म्हणजे हीरेघ (४६ सि॰ प्र॰) वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे हें सिद्ध

चौदावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेघेवर वर्तुळ खंड करायाचें जा वर्तुळ खंडांत सांगीतल्ये कोना बराबर कोन होईल





सांगीतल्ये अब रेघेचे दोन शेवटांवर डअब डबअ हे दोन कोन सांगीतल्ये क कोनाचे बरोबर कर नंतर अड बड यांजवर अई बई हे दोन लंब कर आणि ई वर्तुळ मध्य करून ईअ अथवा ईब यात्रिज्येनें एक वर्तुळ कर तर अफब वर्तुळखंड होईल जांत कोणता ही

फ कोन केलातर सांगीतल्ये क कोनाबराबर होईल

ह्मणोन अड बड या दोनरेघा (याच कृत्यानें) ईअ ईब या दोन त्रिज्यांवर लंबआहेत याजकरितां (४६ सि० प्र०) त्यारेघा वर्तुळास स्पर्शरेघा आहेत आणि डअब कोन अथवा डबअ कोन जो (याकृत्यानें) सांगीतल्ये क कोनाबराबर आहे तेव्हां तेकोन (५२ सि० प्र०) व्युत्क्रमखंडांतील कोणत्येही अफब कोनाबरोबर आहेत हें सिद्ध

पंधरावें कृत्य

वर्तुळाचें खंड करायाचें जाखंडांत सांगीतल्ये क कोनाबराबरच कोन होईल

वर्तुळास कोणतीही स्पर्शरेघ जशी अब कर आणि अ स्थळापासून वर्तुळांत अड ज्या कर अशीकीं डअब कोन सांगीतल्ये क कोनाबराबर होईल तर डईअ इछिलें वर्तुळखंड होईल जांत परिघावर कोणत्येही स्थळीं केला कोन जसा अईड कोन तो

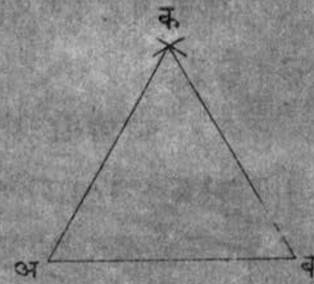
क कोन बराबरंच होईल

ह्मणोन ज्या आणि स्पर्शरेघ यांपासून आलेला डअव कोन (यान्च कृत्यरीतीनें) क कोनाबराबर आहे आणि हाही (५३सि॰प्र॰) व्युत्क्रम खंडांतील डईअ कोनाबराबर आहे हें सिद्ध

सोळावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेघेवर समबाजू त्रिकोण करावयाचें

अ आणि ब हे दोन मध्य जाणून अब त्रिज्येनें दोन कौस कर असेकीं क स्थळीं परस्पर छेदितील नंतर अक बक सांध ह्मणजे अबक इछिला समबाजू त्रिकोण होईल

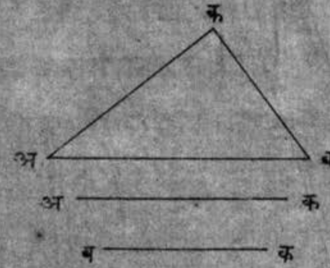


ह्मणोन अक बक या दोन बराबर त्रिज्या प्रत्येकीं अब चे बराबर आहेत हें सिद्ध

सत्रावें कृत्य

अब अक बक यासांगीतल्ये तीनरेघांकरून एक त्रिकोण करायाचें

अ मध्यकल्पून अक त्रिज्येनें एककौसकर आणि ब मध्यकल्पून बक त्रिज्येनें दुसरा एक कौसकर असाकीं पूर्वकौसास क स्थळीं छेदील नंतर अक बक सांध ह्मणजे इछिला त्रिकोण होईल



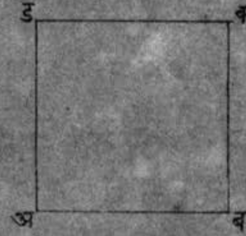
ह्मणोन त्रिज्या अथवा त्रिकोणाचा बाजू अक बक या दोन (याचकृत्यानें) सांगीतल्ये अक बक रेघांचे बरोबर आहेत हें सिद्ध

अठरावें कृत्य

सांगीतल्ये अब रेघेवर चौरस करायाचें

अब

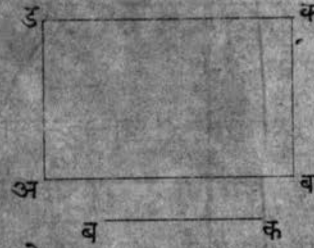
अब रेषेवर अ ब या दोनस्थळीं प्रत्येक अब चे बराबर अड बक हे दोन लंब करून डक सांध ह्मणजे अबकड हें इछिलें चौरस होईल



ह्मणोन अब अड बक या तीन बाजू (याच कृत्यानें) बराबर आहेत आणि (२४ सि॰प्र॰) डक अब चे बराबर आणि अब शीं समांतरही आहे यापासून सिद्ध होतें कीं सर्व चारही बाजू बराबर आणि समोरासमोरच्या समांतरही आहेत पुनः समांतरबाजू चौकोनाच्या अ कोन अथवा ब कोन काटकोन आहे याजकरितां (२२ सि॰१ कु॰प्र॰) त्याचे सर्व कोन काटकोन आहेत यापासून निघतें कीं या आकृतीच्या सर्व बाजू बराबर आणि सर्वही कोन काटकोन आहेत याजकरितां (३४ व्या॰प्र॰) ही आकृती चौरस आहे हें सिद्ध

एकुणिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अब लांबीचा आणि बक रुंदीचा काटकोन चौकोन अथवा समांतर बाजू चौकोन करायाचें



अब वर अड बक लंब चढीव असें कीं प्रत्येक बक चेब राबर होतील नंतर डक सांध म्हणजे समांतर बाजू चौकोन झाला

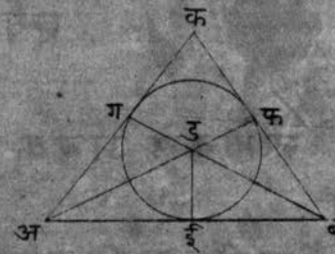
याचा प्रत्यय पूर्वकृत्याप्रमाणें आहे

आणि यारीतीनेंच तिर्कस समांतर बाजू चौकोन केला जातो परंतु त्यांत भेद इतकाच आहे कीं अब वर लंबनकरावे तर त्याशीं सांगीतल्ये कोनाबराबर कोनकरावे

विसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणांत एक वर्तुळ करावयाचें

सांगीतल्ये त्रिकोणाचे कोण तेही दोनकोन ह्मणजे अ आणि ब हे अड बड रेषांनीं दुभाग नंतर यादोनरेषा जेथें परस्पर छेदितील तो छेदनबिंदू ड मध्यस्थळ झालें त्यापासून त्रिकोणाचे तीनही



बाजूंवर

बाजूंवर डग डफ डई हे तीन लंबकर ह्मणजे हे लंब वर्तुळाच्या त्रिज्या होतील

ह्मणोन (याच कृत्यानें) डअई कोन डअग कोनाबराबर आहे आणि ई ग या स्थळींचें दोन कोन काटकोन आहेत याजकरितां अडई अडग हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत. आणि अड बाजू दोहोंस साधार आहे याजकरितां (२ सि॰ प्र॰) त्यांचा डई डग या बाजू परस्पर बराबर आहेत याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं डफ डई चे अथवा डग चे बराबर

याजकरितां ड मध्य करून डई अंतरानें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ ई फ ग या तीन बिंदूंचे पार जाईल आणि तें वर्तुळ या तीन बिंदुस्थळीं त्रिकोणाचे तीन बाजूंस स्पर्श करील कारण (४६ सि॰ प्र॰) डई डफ डग या तीन त्रिज्या तीन बाजूंवर लंब आहेत हें सिद्ध

एकविसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे भोंवती संलग्न वर्तुळ करायाचें

सांगीतल्ये त्रिकोणाचा कोणत्याही दोन बाजू दोन लंबांनी

दुभाग

दुभाग असें डग आणि डफ अथवा डई नंतर त्या दोन लंबां च्या छेदन बिंदू ड मध्यस्थळ होई ल

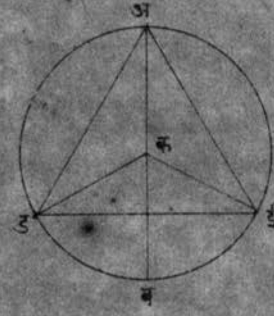


म्हणोन डअ डक डब सांध तर डअई डबई या दोन काटकोन त्रिकोणांत एकाच्या डई डअ या दोन बाजू दुसऱ्याच्या डई ईब या दोन बाजूंचे बराबर आहेत आणि यांचे आंतील दोन ई कोन परस्पर बराबर याजकरितां हे दोन त्रिकोण (१सि० प्र०) एकरूप आहेत म्हणजे डअ बाजू डब बाजू बराबर याच रीतीनें दाखविलें जातें कीं डक बाजू डअ चे अथवा डब चे बराबर आहे यावरून सिद्ध होतें कीं डअ डक डब या सर्व बराबर आहेत याजकरितां या एक वर्तुळाच्या बराबर त्रिज्या आहेत ज्याचा परिघ अबक त्रिकोणाचे तीन बिंदूंपार आईल हें सिद्ध

बाविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजू त्रिकोण करायाचें

सांगीतल्ये

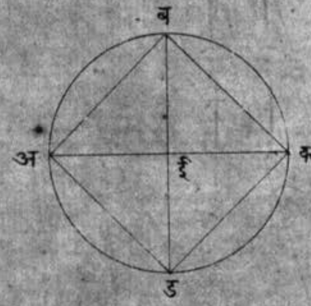


सांगीतल्ये वर्तुळाचे क मध्यस्थळा पार अब व्यास कर नंतर ब मध्य करून त्या वर्तुळाचे बक त्रिज्येनें एक डकई कौस कर असा कीं परिघास ड ई या दोन स्थळीं छेदील नंतर अड अई डई सांध ह्मणजे त्या वर्तुळांत अडई इछिला समबाजू त्रिकोण होईल

ह्मणोन डब डक ईक ईब सांध आतां डकब समबाजू त्रिकोण आहे कारण त्याच्या प्रत्येक बाजू त्या वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर आहेत तसाच बकई समबाजू त्रिकोण आहे परंतु अडई कोन अबई अथवा कबई कोना बराबर आहे कारण अई कौसावर आहे आणि अईड कोन अबड अथवा कबड कोना बराबर कारण अड कौसावर आहे यापासून सिद्ध होतें कीं डअई त्रिकोणाचे अडई अईड हे दोन कोन पूर्व समबाजू त्रिकोणाचे कोनां बराबर आहेत याजकरितां अ स्थळींचा तिसरा कोन ही तसाच आहे अशा रीतानें हा त्रिकोण समकोन आणि ह्मणोनच समबाजू ही आहे हें सिद्ध

तेविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत चौरस करायाचें



सांगीतल्ये वर्तुळांत अक बड दोन व्यास कर असे कीं एक मेकावर लंब असोन ई मध्यस्थळीं परस्परांस छेदितील नंतर अ ब क ड हे व्यासांचे चार शेवट सरळ रेघांनीं सांध ह्मणजे या सरळ रेघांपासून त्या वर्तुळांत इछिलें चौरस होईल

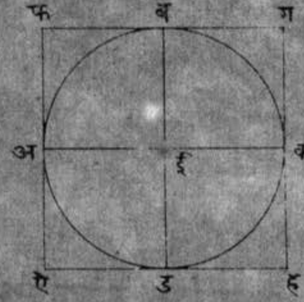
ह्मणोन अईब बईक कईड डईअ हे चार काटकोन त्रिकोण एकरूप आहेत कारण त्यांचा ईअ ईब ईक ईड या बाजू परस्पर बरोबर ह्मणजे या वर्तुळाचा त्रिज्या आहेत आणि ईस्थळींचे चार कोन (याच कृत्यानें) काटकोन केले ते परस्पर बराबर आहेत ह्मणोन त्यांचा तिसर्या बाजूही अब बक कड डअ या सर्व परस्पर बराबर याजकरितां अबकड आकृती समबाजू आहे पुनः अ ब क ड हे चार कोन काटकोन आहेत कारण हे प्रत्येक अर्धवर्तुळांत आहेत यास्तव ही आकृती चौरस आहे हे सिद्ध

चोविसावें

चोविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवती संलग्न चौरस करायाचें

सांगीतल्ये वर्तुळांत अक बड दोन व्यास कर असे कीं एक मेकावर लंब असोन ई मध्यस्थ ळीं परस्परांस छेदितील नंतर त्यांचे चार शेवटांपार फग ऐह या दोन अक शीं समांतर आणि गह फऐ या दोन बड शीं समांतर अशा चार रेघा कर ह्मणजे फगहऐ हें त्या वर्तुळा भोंवती संलग्न इछिलें चौरस होईल



ह्मणोन समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोरच्या बाजू बराबर याजकरितां फग ऐह या प्रत्येकीं अक व्यासाचे बरोबर आणि फऐ गह या प्रत्येकीं बड व्यासाचे बराबर आहेत ह्मणूनच ही आकृति समबाजू आहे

पुनः समांतर बाजू चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन बराबर याजकरितां फ ग ह ऐ हे चार कोन जे त्यांचे समोरचे ई कोना-बराबर आहेत ते सर्व काटकोन आहेत यापासून सिद्ध होतें कीं फगहऐ या आकृतीचा सर्व बाजू सम आणि कोन काटकोन आहेत

याजकरितां

याजकरितांही आकृति चौरस आणि वर्तुळास अ ब क ड या चा रबिंदूंवर स्पर्शल्ये कारण याचा सर्व बाजू त्या त्या स्पर्शीं त्रिज्यांवर लंब आहेत हें सिद्ध

पंचविसावें कृत्य

सांगीतल्ये चौरसांत वर्तुळ करायाचें

सांगीतल्ये चौरसाचा फग फऐ या दोन बाजू ब आणि अ या दोन स्पर्शीं दुभाग नंतर याबिंदूपार फग शीं अथवा ऐह शीं समांतर अक कर आणि फऐ शीं अथवा गह शीं समांतर बड कर नंतर या दोन समांतर रेषांचा छेदन बिंदू ई मध्यस्थळ होईल आणि ईअ ईब ईक ईड याचार रेषा आंतील वर्तुळाचा त्रिज्या होतील

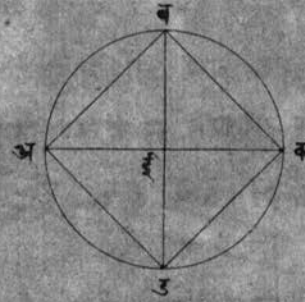
ह्मणोन ईफ ईग ईह ईऐ या चार समांतर बाजू चौकोनाचा समोरासमोरचा बाजू आणि कोन बराबर आहेत याजकरितां ईअ ईब ईक ईड या चार रेषा परस्पर बराबर आहेत कारण या प्रत्येकीं चौरसाचे एकेक बाजूचे अर्धा बरोबर आहेत यापासून सिद्ध होतें कीं ई मध्य करून ईअ त्रिज्येनें वर्तुळ केल्यास त्याचाप

परिघ अ ब क ड यासर्वबिंदूंचेपार जाईल आणि हें वर्तुळ चौरसांत होईल ह्मणजे त्याचे चारबाजूंस चारबिंदुस्थळीं स्पर्श करील कारण तेथे सर्वकोन काटकोन आहेत हें सिद्ध

सविसावें कृत्य

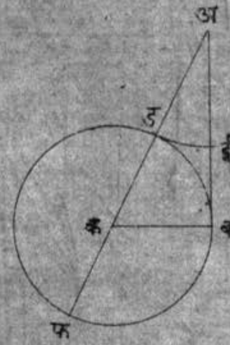
सांगीतल्ये चौरसाचे भोंवती संलग्नवर्तुळ करायाचें

सांगीतल्ये चौरसांत अक बड दोन कर्णरेघा कर त्यांचा छेदनबिंदू ई मध्यस्थळ होईल ह्मणोन (४० सि० प्र०) चौरसाचा कर्णरेघा परस्पर दुभागितात याजकरितां ईअ ईब ईक ईड यासर्व एकवर्तुळाचा बराबर त्रिज्याआहेत जेंवर्तुळ अ ब क ड या चारबिंदूस्थळांपार जाईल हें सिद्ध



सत्ताविसावें कृत्य

सांगीतल्ये रेघेस अंत्य मध्य गुणोत्तराकरितां छेदायाचें



अब एक सांगीतली रेघ असेल जीस अंत्य मध्य गुणोत्तराकरितां भागावयाची आहे ह्मणजे अशारीतीनेंकीं सर्वरेघ तिच्ये अतिमोठ्ये खंडास होईल जसातो अतिमोठा खंड अतिल्हान खंडास आहे

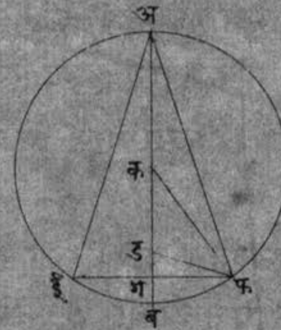
अबवर तिच्या अर्धा बराबर बक लंबकर नंतर अक सांध आणि क मध्यकरून कब त्रिज्येनें बडफ वर्तुळकर तें अक रेघेस ड स्थळीं छेदील आतां अ मध्यकरून अड त्रिज्येनें डई कौसकर तर अब रेघ ई स्थळीं भागिली जाईल अंत्य मध्य गुणोत्तरप्रमाणानें ह्मणजे अशीकीं अब : अई : : अई : ईब

ह्मणोन परिघावर फ बिंदूपर्यंत अक वाढीव आतां ही अडफ वर्तुळाची छेदनरेघ आहे आणि अब त्यावर्तुळास स्पर्शरेघ आहे कारण ब कोन काटकोन आहे याजकरितां

(६१ सि० १ कु० प्र०) हा काटकोन चौकोन अफ•अड = अब^{2} ह्मणोन (७७ सि० प्र०) यांचीं मध्य आणि शेवटीलपदें प्रमाणांत आहेत ह्मणजे अब : अफ अथवा अड + डफ : : अड : अब परंतु (याच कृत्यानें) अई = अड आहे आणि अब = २ बक = डफ याजकरितां अब : अई + अब : : अई : अब नंतर (६९ सि० प्र०) भागाकारानें अब : अई : : अई : ईब हें सिद्ध

अठ्ठाविसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत समद्विबाजू त्रिकोण करायाचें जात्रि-कोणाचे पायाकडील दोन कोन प्रत्येक शिरकोनाचे दुपट होतील



सांगीतल्ये वर्तुळांत कोठेही अब व्यासकर आणि (पूर्वकृत्य रीतीनें) कब त्रिज्येस ड स्थळीं अंत्यमध्य गुणोत्तर प्रमाणानें भाग नंतर कड अति मोटे भागाबरोबर ब बिंदूपासून वर्तुळांत बई बफ दोनज्याकर आणि अई अफ ईफ सांध ह्मणजे अईफ

इछिला

इच्छिला त्रिकोण होईल

म्हणोन बई बफ या दोन ज्या बराबर याजकरितां त्यांचीं मापें कौसही बराबर आहेत म्हणोन त्यांचे सग्मेंट कोस आणि सग्मेंट ज्याही अई ईफ बराबर यास्तव अईफ त्रिकोण समद्विबाजू आणि ई कोन फ कोना बराबर आहे आणि ग स्थळींचे दोन कोन काटकोन आहेत

फक डफ सांध आतां (पूर्वकृत्या प्र०)

बक : कड : : कड : बड

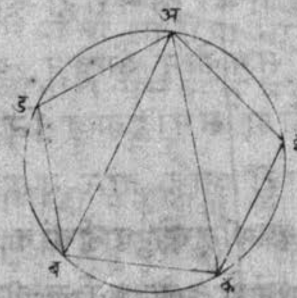
{ अथवा (याकृत्यानें) बक : बफ : : बफ : बड १प्र०
{ आणि (८७सि०प्र०) बअ : बफ : : बफ : बग २प्र०

याजकरितां प्रथम प्रमाणांत बफ^2 = बक • बड अथवा २ बक • $\frac{2}{2}$ बड दुसऱ्यें प्रमाणांत बफ^2 = बअ • बग अथवा २ बक • बग म्हणून बग = $\frac{2}{2}$ बड = गड याजकरितां गबफ गडफ हे दोन त्रिकोण (१सि०प्र०) एकरूप आहेत आणि प्रत्येक दोन कोन बराबर आहेत तेव्हां तिसराही कोन बराबर अबफ अगफ या त्रिकोणांशीं समकोन आहेत याजकरितां त्यांचे दुपट बफड अफई हे त्रिकोण समद्विबाजू आणि समकोनही आहेत तसाच बकफ त्रिकोणही आहे जांत बक कफ या दोन बाजू बराबर आणि त्यांचा ब कोन बफड त्रिकोणाशीं साधारण आहे परंतु कड = डफ अथवा बफ याजकरितां (४सि०प्र०) क कोन डफक कोना बराबर

बर आहे ह्मणोन बडफ कोन जो (१६ सि० प्र०) या दोन बरोबर कोनांचें बेरिजे बराबर आहे तो त्या दोहोंतून एकाचे दुपट आहे अथवा बरोबर ब कोनाचे अथवा कफब कोनाचे दुपट आहे अशारीतीनें सिद्ध आलें कीं कबफ समद्विबाजू त्रिकोण आहे ज्याचे बराबर दोन कोन प्रत्येक तिसर्ये क कोनाचे दुपट आहेत वरसिद्ध जालें कीं अईफ कबफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत याज करितां अईफ त्रिकोणाचे पायाकडील दोन कोन प्रत्येक अ शिर कोनाचे दुपट आहेत हें सिद्ध.

एकुणतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळां समबाजू पंचकोन करायाचें



त्या वर्तुळांत अबक सम द्विबाजू त्रिकोण कर असा कीं जाचे पायाकडील अबक अकब हे दोनकोन प्रत्येक बअक शिरकोना चे दुपट होतील नंतर अडब अईक या दोन कोंसांस ड ई स्थ

कीं

ळीं दुभाग नंतर अड डब अई ईक याज्याकर ह्मणजे अडबकई हें इछिलें समबाजू पंचकोन होईल

ह्मणोन बराबर कोन बराबर कौसावर आहेत आणि त्यांचे दुपटकोन दुपटकौसावर आहेत आणि अबक अकब हे दोन कोन बअक कोनाचे दुपट आहेत याजकरितां अडब अईक हे दोनकौस ज्यांजवर पूर्वदोनकोन आहेत ते कौस बक कौसाचे दुपट आहेत ज्यांजवर शेवटील कोन आहे आतां पूर्व दोन कौस ड ई स्थळीं दुभागिले आहेत यांतून निघतें कीं अड डब बक कई ईअ हे सर्व कौस परस्पर बराबर आहेत याजकरितां त्यांच्या ज्या ही परस्पर बराबर आहेत ह्मणून या पंचकोनाच्या पांचबाजू परस्पर बराबर आहेत हें सिद्ध

टीप कृत्य करित्येसमयीं ड ई हीं दोनस्थळें सत्यांत मिळतात जे बड कई यांचीलांबी बक करावी

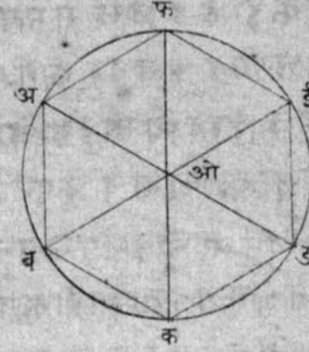
तिसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळांत समबाजू षट्कोण करायाचें

सांगीतल्ये वर्तुळाची अओ

त्रिज्या जसें अब बक इत्यादिक

ज्या करून वर्तुळ परिघावर फिरून फिरून ठेव ह्मणजे वर्तुळांत ही अबकडईफअ समबाजू षट्कोण करील

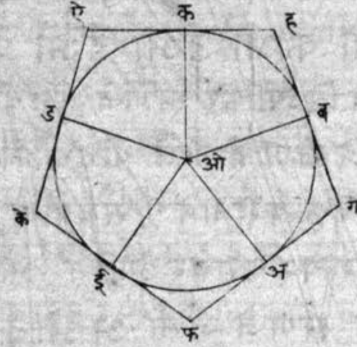


ह्मणोन त्या वर्तुळांत अओ बओ कओ डओ ईओ फओ ऐशा त्रिज्या कर ह्मणजे बराबर साहा त्रिकोण होतील यांतून कोणताही एक त्रिकोण जसा अबओ (याच कृत्यरीतीनें) समबाजू आहे (३ सि० २ कु० प्र०) त्याचे तीन कोन परस्पर बराबर आहेत आणि या तीन कोनांतील कोणताही एक कोन ह्मणजे जसा अओब कोन सर्व कोनांचे बेरिजेच्या तृतीय भाग आहे ह्मणोन (२७ सि० प्र०) दोन काटकोनांच्या तृतीय भाग आहे अथवा चार काटकोनांच्या साहावा भाग आहे परंतु (६ सि० ४ कु० प्र०) सगळा परिघ चार काटकोनांचें माप आहे याजकरितां अब कौस जो अओब कोनाचें माप आहे तो सर्व परिघाच्या साहावा भाग आहे ह्मणोन त्या कौसाची ज्या अब ही वर्तुळांतील समबाजू षट्कोणाची एक बाजू आहे तशाच दुसऱ्याही ज्या हें सिद्ध

कुरलशी समबाजू षट्कोणाची कोणतीही एक बाजू त्याचे भोंवती संलग्न वर्तुळाचे त्रिज्ये बराबर अथवा सर्व परिघाचे साह्याव्ये भागाचे ज्याचे बराबर आहे

एकतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये वर्तुळाचे भोंवती संलग्न समबाजू पंचकोण अथवा षट्कोण करायाचें



वर्तुळा भोंवती जितक्या बाजूंची समबाजू आकृती करायाची ती (पूर्वदोन कृत्यरीतीनें) वर्तुळाचे आंनकर जशी एथे अबकडई पंचकोण केली नंतर तिचे सर्वकोन बिंदुस्थळीं वर्तुळास (१३ कृत्यरीतीनें) स्पर्शरेघा करयासर्व स्पर्शरेघांपासून वर्तुळा भोंवती संलग्न इछिलें बहुकोन होईल

ह्मणोन सर्वज्या अथवा आंतील बहुकोनाचा बाजू अब बक इत्यादिक परस्पर बराबर आणि सर्व त्रिज्या ओअ ओब इत्यादिक परस्पर बराबर आहेत याजकरितां सर्वत्रिकोणांचें ओ स्थळीं शिरकोन बराबर आहेत परंतु ओईफ ओअफ ओअग ओबग हे कोन स्पर्शरेघा आणि त्रिज्या यांपासून जाले यास्तव तेसर्व काटकोन आहेत याजकरितां ओईफ + ओअफ दोन काटकोनां बराबर आणि ओअग + ओबक दोन काटकोनां बराबर आहे याजकरि

तां

तांही (१८सि०२कु०प्र०) अओई + अफई दोन काटकोनांबराबर आणि अओब + अगब दोन काटकोनांबराबर आहेत यापासून निघतेंकीं अओई + अफई = अओब + अगब आणि यांत अओब = अओई कोन यास्तव राहिले दोनकोन अफई अगब हेही परस्पर बराबर आहेत यारीतीनें दाखविलेंजातेंकीं फ ग ह ऐ के हेसर्वकोन परस्पर बराबर आहेत

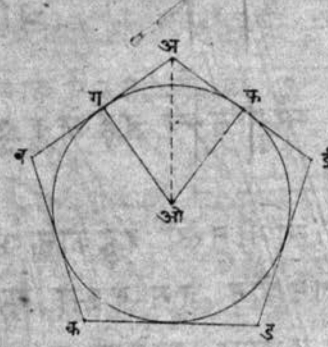
पुनः (६१सि०२कु०प्र०) एक बिंदूपासून केल्या दोन स्पर्शरेघा फई फअ परस्पर बराबर आहेत तशाच गअ गब याही परस्पर बराबर आणि अफई अगब या दोन समद्विबाजू त्रिकोणांत फ ग हे दोनकोन परस्पर बराबर आणि त्यांचेसमोरचा अई अब याबाजू परस्पर बराबर आहेत याजकरितां हे दोन त्रिकोण (७सि०प्र०) एकरूप आहेत आणि त्यांच्या दुसर्याही फई फअ गअ गब याबाजू परस्पर बराबर आणि यांतून कोणतीचेही दुपट फग आहे याचरीतीनें दाखविलें जातेंकीं त्या बहुकोनाच्या बाकीराहिल्या गह हऐ एके केफ यासर्व फगचेबराबर अथवा गब बह इत्यादिक प्रत्येक स्पर्शरेघांचे दुपट आहेत यापासून निघतेंकीं बाहेरील बहुबाजू आकृती समबाजू आणि समकोनही आहे हें सिद्ध

कुरलरी आंतील वर्तुळ बाहेरील आकृतीचे बाजूंस बराबर मध्यस्थळीं स्पर्शतें

बतिसावें

बत्तिसावें कृत्य

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे आंत संलग्नवर्तुळ करायाचें



सांगीतल्ये बहुकोनाच्या कोणत्याही दोन बाजू गओ फओ दोन लंबांनीं दुभाग नंतर त्या दोन लंबांच्या छेदनबिंदू आंतील इछिले वर्तुळाचें मध्यस्थळ होईल आणि गओ फओ या दोन बराबर त्रिज्या होतील

ह्मणोन (४७ सि० प्र०) अफ अग या दोन स्पर्शरेषांवरील लंब वर्तुळाचे मध्यपार आतात आणि (पूर्वकृत्याचे कु० प्र०) आंतील वर्तुळ बहुकोनाचे अई अब बाजूंस फ ग मध्यस्थळीं स्पर्शतें पुनः अओग काटकोन त्रिकोणांत अग अओ या बाजू अओफ काटकोन त्रिकोणाचे अओ अफ बाजूंचे बराबर याअकरितां (४५ सि० कु० प्र०) त्यांचा तिसर्याही बाजू ओग ओफ बराबर आहेत यास्तव ओ मध्यआणि ओग त्रिज्यो याणी वर्तुळ केल्यास त्याच्यापरिघ फ बिंदूपार जाईल आणि बहुकोनाचे अब अई बाजूंस ग फ स्थळीं स्पर्शकरील तसाच बाकी राहिल्ये सर्व

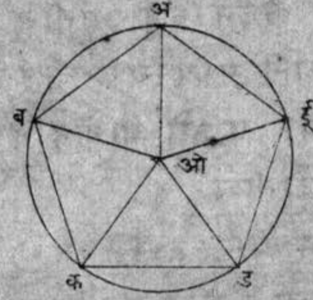
बाजू

बाजूंसही हें सिद्ध

त्रेतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये बहुकोन आकृतीचे भोंवती संलग्न वर्तुळ करायाचें

सांगीतल्यें बहुकोन आकृतीचे दोनकोन जसे डओ कओ रेघांनीं दुभाग त्यारेघांचा ओ छेदनबिंदू तो बाहेरील वर्तुळाचा मध्य होईल आणि कओ डओ त्रिज्या होतील



ह्मणोन ओब ओई इत्यादिक रेघा त्या बहुकोनाचे कोन बिंदूंपर्यंत कर आतां ओकड त्रिकोणांत क ड हे दोनकोन जे बहुकोनाचे बकड कडई कोनांचे अर्धा बराबर आहेत ते परस्पर बराबर याजकरितां (४सि०प्र०) त्यांचे समोरचा कओ डओ बाजू परस्पर बराबर आहेत ह्मणोन ओकड समद्विबाजू त्रिकोण आहे परंतु ओकड ओकब या दोन त्रिकोणांत एकाचा ओक कड बाजू आणि त्यांचे आंतील क कोन दुसर्याचे ओक कब बाजूंचे

आणि

आणि त्यांचे आंतील क कोनाचे बराबर आहेत याजकरितां (१सि०प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत आणि त्यांच्या तिसर्या ही बओ ओड बाजू परस्पर बराबर आहेत यारीतीनेंच दाखविलें आतें कीं ओअ ओब ओक ओड ओई या सर्व रेघा परस्पर बराबर आहेत याजकरितां ओ मध्य करून ओअ त्रिज्येनें वर्तुळ केल्यास त्याचा परिघ बहुकोनाचे अ ब क इत्यादिक कोनबिंदूंचे पार जाईल आणि तें त्या बहुकोन आकृतीचे भोंवतीं संलग्न इछिलें वर्तुळ होईल हें सिद्ध.

चौतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये दोन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बराबर एक चौरस करायाचें

सांगीतल्ये चौरसांच्या बाजू अब अक बराबर असतील तर कोणत्याही अफ अछ दोन रेघा परस्परांवर लंबकर आणि त्यांजवर सांगीतल्ये चौरसांच्या अब अक बाजू देव नंतर बक सांध म्हणजे बक रेघेवर चौरस केल्यास तें (३४ सि०प्र०) अब अक यारेघावरील दोन चौरसांचे बराबर

होईल.

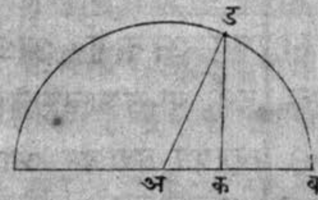
होईल

याचरीतीनें तीन अथवा त्यांहून अधिक चौरसांचे बेरिजे बराबर एक चौरस करितां येईल

ह्मणोन जर अब अक अड या तीनरेषा सांगीतल्ये तीन चौरसांचा बाजू असतील तर पूर्व दोन चौरसांचे बेरिजेबराबर चौरसाचे बक बाजू बराबर एक रेषेवर अई कर आणि राहिल्ये तिसर्ये चौरसाची अड बाजू दुसर्ये रेषेवर ठेव आणि डई सांध तर डई रेषेवर चौरस केल्यास स्पष्ट दिसतें कीं तें (३४सि०प्र०) अब अक अड या रेषांवरील तीन चौरसांचे बेरिजे बराबर होईल आणि याचप्रमाणें अधिक चौरसांचेही हें सिद्ध

पंसतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये दोन चौरसांचे वजाबाकी बराबर एक चौरस करायाचें



अब अक एक सरळरेघें न केल्या त्या सांगीतल्ये दोन चौरसांचा बाजू असतील तर अ मध्यकरून अब त्रिज्येनें एक अर्धवर्तुळ कर नंतर अब वर कड लंबकर

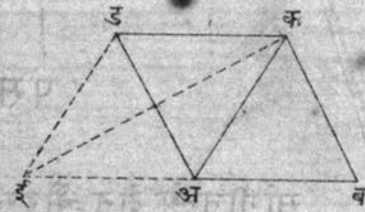
असा

असा कीं परिघास ड स्थळीं मिळेल तर कड वर चौरस केल्यास (३४ सि॰कु॰प्र॰) त्याचे = अड^2 − अक^2 अथवा अब^2 − अक^2 हें इच्छि-लें चौरस होईल हें सिद्ध

छत्तिसावें कृत्य

कोणत्येही सांगीतल्ये अ ब क ड चौकोनाचे बराबर एक त्रिकोण करायाचें

अबकड सांगीतल्ये चौकोनांत अक कर्णरेघ कर आणि त्या कर्णरेघेशीं समांतर डई कर अशी कीं अब रेघ वाढवून तिला ई स्थळीं मिळेल नंतर कई सांध ह्मणजे कईब त्रिकोण अबकड चौकोनाचे बराबर होईल



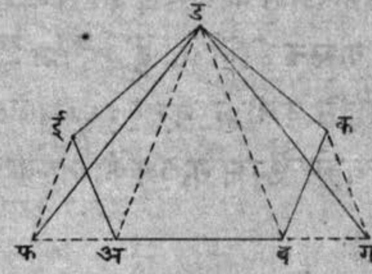
ह्मणोन अकई अकड हे दोन त्रिकोण एकच अक पाया वर अक डई या समांतर रेषांचे एकच जोडामध्यें आहेत ते (३५ सि॰प्र॰) परस्पर बराबर आहेत याजकरितां त्यांस प्रत्येकीं अबक त्रिकोण मेळविल्यास (२ प्र॰प्र॰) बकई अबकड चे बराबर होईल हें

हें . सिद्ध

सततिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबकडई पंचकोणावर एक त्रिकोण करावा-चें

डअ डब सांध अडशीं समांतर ईफ कर आणि डबशीं समांतर कग कर अशाकीं अब वाढवून तिला फ ग स्थळीं मिळतील नंतर डफ डग सांध ह्मणजे डफग त्रिकोण अबकडई सांगीतल्ये पंचकोणा बराबर होईल

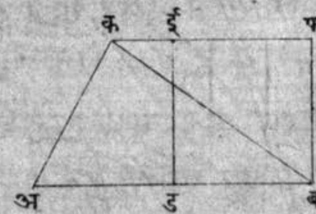


ह्मणोन (२५ सि॰ प्र॰) डफअ त्रिकोण = डईअ त्रिकोण आणि डगब त्रिकोण = डकब त्रिकोण आहे याजकरितां या दोन दोन बराबर्यांस डअब मिळवून (२ प्र॰ प्र॰) त्यांची बेरीज ही बराबर होईल ह्मणजे डअब + डअफ + डबग = डअब + डअई + डबक ह्मणजे डफग त्रिकोण अबकडई पंचकोणाचे बराबर आहे हें सिद्ध

अठतिसावें

अठतिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर एक काटकोन चौकोन करायाचें

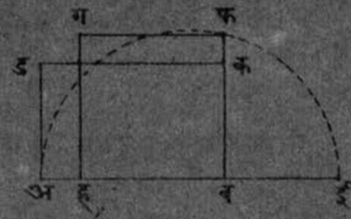


अब पायास ड स्थळीं दुभाग नंतर डई बफ हे दोन अबवर लंबकर असे कीं अब शीं समांनर कफ करून तिजला ई फ या दोन स्थळीं मिळतील तर (२६ सि० २ कु० प्र०) डफ काटकोन चौकोन सांगीतल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर होईल हें सिद्ध

एकुणचाळिसावें कृत्य

सांगीतल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर एक चौरस करायाचें

सांगीतल्ये काटकोन चौकोनाची एक अब बाजू ई पर्यंत



वाढीव अशीकीं बई त्याचे दुसर्‍ये बक बाजूबराबर होईल नंतर अई व्यास जाणून त्याजवर अर्ध चतुंळ कर बक वाढीव अशीकीं परिघास फ स्पर्शी मिळेल तर (८७ सि॰ कु॰ आणि ७७ सि॰ प्र॰) बफ बाजूवर बफगह चौरस सांगीतल्ये अबकड काटकोन चौकोनाचे बराबर होईल हें सिद्ध

समाप्त

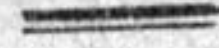
PART IV.

APPLICATION OF ALGEBRA TO GEOMETRY.

चौथा भाग



बीजगणिताचें भूमितीशीं संगतीकरण



बीजगणिताचें भूमितीशीं संगतीकरण·

बीजगणित आणि भूमिती यांचीं वेगळालीं कामें अत्यंत उपयोगी तीं सर्व बीजगणिताचीं बीजगणितांत सांगीतलीं तशीं भूमितीचीं भूमितींत सांगीतलीं · परंतु · आतां बीजगणित भूमितीवर लागतें ती रीति सांगतो ·

जेह्मां भूमितिकृत्याचें बीजगणितरीतीनें पृथक्करण करायास सांगीतलें आहे · तेह्मां संकेताप्रमाणें कृत्याचे वेगळाले भाग दाखवायास एक आकृती करून ती खरी आहे असें मनांत आणावें · हें आरंभीं योग्य आहे · नंतर बहुत युक्तीनें कृत्याचे स्वभावाचा विचार करून पृथक्करण करायास ती आकृती सिद्ध केली पाहिजे· असें करून किं · तीचि कोणतीही एक रेघ वाढवून किंवा कोठें तीचे आंत रेघा करून · ह्मणजे · जेणें करून इच्छाफळ उत्पन्न होण्यास ती योग्य होईल असें करावें · याप्रमाणें केल्यानंतर जीं अक्षरचिन्हें व्यक्त आणि अव्यक्तपदें दाखवायास घेतात · तीं आकृतीचे वेगळाले भाग दाखवायास घ्यावीं · नंतर पाहावें किं · आकृतीचे वेगळाल्ये भागांचा परस्पर काय संबंध आहे · मग तो संबंध मनांत धरून आदिकारण भूमितीचे जे सिद्धांत त्या संबंधावर लागू असतील त्यांपासून अव्यक्त अक्षरें आहेत तितकीं समीकरणें करावीं · या समीकरणांचीं पृथक्करणें बीजगणितांत सांगीतल्ये रीतींकरून केल्यानें त्या आकृतीचे अव्यक्त अवयव प्रकट होतील ·

आकृतींत

आकृतींत रेघ करणें व अवयव पदस्थळीं अक्षर चिन्हें लिहिणें याची सामान्य रीति इछाफळ थोड्यांत निघण्यास सांगतां येत नाहीं · अनुभव होण्यास एककृत्याचें वेगळाल्या रीतीनीं पृथक्करण करावें · त्यांत जी रीति सर्वोत्तम अशी लक्ष्यास येईल त्याच रीतीनें त्या जातींचे कृत्यांचीं पृथक्करणें करावीं · परंतु · पुढें जा विशेष आज्ञा सांगतो त्या कामांत फार उपयोगी पडतील ·

१ आकृती सिद्ध करण्यास रेघा करायाच्या त्या आकृतीचे बाजूंशीं समांतर अथवा त्यांजवर लंब अशा कराव्या · किं त्यांपासून त्या आकृतींत सरूप त्रिकोण होतील · आणि जर कोन सांगितला आहे · तर योग्य आहे किं · त्या कोनाचे समोर सांगितल्ये कोनाचे एक बाजूचे शेवटावर होईल तर लंब करावा ·

२ पदें अशीं शोधून काढावीं किं · इछिलीं आहेत किंवा नाहींत · परंतु · जीं आकृतीचे व्यक्त पदांजवळ आहेत · आणि त्यांचे साहाय्यापासून मिळवणीनें अथवा वजाबाकीनें दुसरीं त्यांचे पुढील अवळचीं पदें करणी वांचून निघतील ·

३ जेव्हां आकृतींतील दोन रेघा किंवा दोन पदें यांचा त्याच आकृतीचे दुसर्ये अवयवांशीं समान संबंध आहे · तेव्हां त्या रेघा किंवा तीं पदें हीं कामांत वेगळालीं घेण्याचें अगत्य नाहीं · परंतु · त्यांची बेरीज अथवा गुणाकार किंवा व्युत्क्रम भागाकाराची बेरीज अथवा आकृतींतील रेघ किंवा रेघा · जांचा समान संबंध आहे त्याच ·

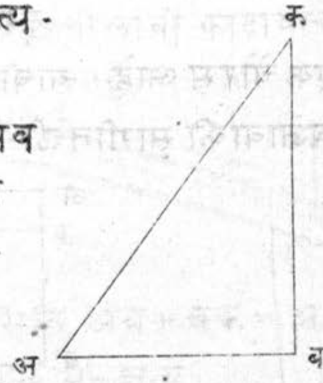
अशीं

अशीं त्यांचे त्यांचे स्थानीं ठेवावीं ·

४ जेव्हां आकृतीचें क्षेत्रफळ किंवा परिमिती सांगीतली आहे - अथवा कोणतेही अवयव सांगीतले आहेत - ज्या अवयवांचा अव्यक्त अवयवांशीं दूर संबंध आहे - तेव्हां कदाचित् हें उपयोगी पडेल · जे सांगीतल्ये आकृतीशीं सरूपाकृती दुसरी आकृती करावी · जीची एक बाजू एकत्वी आहे - किंवा दुसर्ये कोणत्येही व्यक्त पदाबराबर आहे नंतर आकृतीचे राहिले अवयव सरूपाकृतीचे अवयव प्रमाणानें निघतील ·

उदाहरणें ·

प्रथम कृत्य ·



अबक काटकोन त्रिकोणांत अब पाया = ३ आहे - आणि कोटि कर्णांची बेरीज = ९ इतकें मात्र सांगीतलें आहे · यावरून कर्ण आणि कोटि यांची वेगळाली लांबी काढायाची -

आतां अब पाया = ३ हें दाखवायास ब अक्षर चिन्ह घे · आणि कोटि कर्णांची बेरीज अक + बक दाखवायास स अक्षर चि-

न्ह

न्ह घे· पुनः अक कर्ण दाखवायास क्ष※ अक्षर चिन्ह घे·

आणि बक कोटि दाखवायास य अक्षर चिन्ह घे·

तर प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें $क्ष + य = स$

आणि (भू॰ ३४ सि॰ प्र॰) $क्ष^{2} = य^{2} + ब^{2}$

प्रथमांतील यला स्थळांतर॰ $क्ष = स - य$ ही क्षची किंमत दुसऱ्ये

समीकरणांत क्षचे स्थळीं ठेऊन $स^{2} - २ सय + य^{2} = य^{2} + व^{2}$ या समीकरणाचे

दोन बाजूंत $य^{2}$ रद करून $स^{2} - २ सय = ब^{2}$

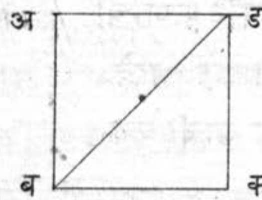
२सय आणि ब यांस स्थळां॰ $स^{2} - ब^{2} = २ सय$

२स याणीं भागून $\frac{स^{2} - ब^{2}}{२स} = य = \frac{८१ - ९}{१८} = \frac{७२}{१८} = ४$

याजकरितां $क्ष = स - य = ९ - ४ = ५$

दुसरें कृत्य·

एक चौरस आहे· त्याची एक बाजू आणि कर्णरेघ यांचें अंतर ह्मणजे वजाबाकी सांगीतली· त्यापासून त्याचा बाजू काढायाचें·



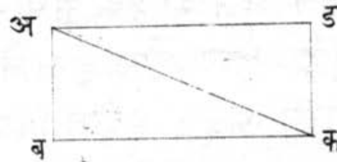
※ आकृतीचे अवयव बोधार्थ जीं अक्षरें आहेत तीं बीजाक्षरांपेक्षां मोठीं लिहिलीं आहेत·

अक इच्छिलें चौरस असेल. तर बक किंवा कड बाजू = क्ष घे. नंतर जर संकेताप्रमाणें बड आणि बक यांचें अंतर = ड घेतला तर. बड कर्ण = क्ष + ड.

परंतु (भू० ३४ सि० प्र०) $बक^2 + कड^2$ किंवा $२बक^2 = बड^2$ तेव्हां हें समीकरण उत्पन्न होतें. $२क्ष^2 = क्ष^2 + २डक्ष + ड^2$ स्थळांतरानें $क्ष^2 - २डक्ष = ड^2$ या समीकरणाचें वर्गसमीकरणरीतीनें पृथक्करण क० $क्ष = ड + ड\sqrt{२}$ ही बक बाजूची इच्छिली किंमत आहे. हें उत्तर.

तिसरें कृत्य.

अबकड काटकोन चौकोनाची कर्णरेघ आणि बाजूंची परिमिति इतकें सांगीतलें आहे. त्यापासून बाजूंची लांबी काढायाचें.



अक कर्णरेघ = ड घे. अर्धपरिमिति अब + बक = अ घे. आणि बक पाया = क्ष घे. तर अब उंची = अ − क्ष घे.

आतां (भू० ३४ सि० प्र०) $अब^2 + बक^2 = अक^2$

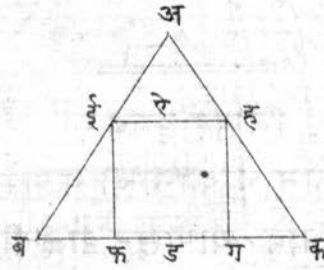
म्हणजे $अ^2 - २अक्ष + क्ष^2 + क्ष^2 = ड^2$

$क्ष^2$-

$क्ष^२ - अक्ष = \frac{ड^२ - अ}{२}$ याचें पृथक्करण केल्यावर हें उत्पन्न होतें $क्ष = \frac{१}{२}अ \pm \frac{१}{२}\sqrt{(२ड^२ - अ^२)}$ यांत अ डहून अधिक घेतला पाहिजे · आणि $ड\sqrt{२}$ याहून उणा घेतला पाहिजे ·

चवथें कृत्य·

कोणत्येही अबक सरळरेघ त्रिकोणाचा पाया आणि लंब सांगीतला आहे · त्यापासून त्याचे आंतील चौरसाचा बाजू काढायाचें·



ईग आंतील चौरस असेल · बक पाया= ब घे· अड लंब=प आणि चौरसाची बाजू ईह किंवा ईफ= क्ष घे·

आतां अबक आणि अईह हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत· याजकरितां (भू०८४ सि०प्र०)

$$अड : बक :: अऐ : ईह \cdot$$

$$प : ब :: प - क्ष : क्ष \cdot$$

आदि अंत पदें आणि मध्य पदें गुणून हें समीकरण उत्पन्न होतें ·

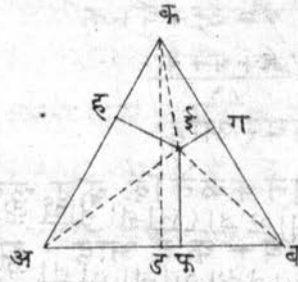
$$पक्ष = बप - बक्ष$$

स्थळां०

स्थळां० भागा० $क्ष = \frac{बप}{ब+प}$ यांत ब आणि प कोणतीही अंक संख्या असेल · पूर्णांक किंवा अपूर्णांक ·

पांचवें कृत्य·

अबक एक समबाजू त्रिकोण आहे · त्यांत ई बिंदूपासून तीन बाजूंवर केलेल्ये ईफ, ईग, ईह या तीन लंबांची लांबी सांगितली आहे · त्यापासून बाजू काढायाचें ·



आकृतींत कड लंबकर · आणि ईअ, ईब, ईक सांध· नंतर ईफ = अ घे · ईग = ब · आणि ईह = क घे · आतां बड किंवा $\frac{१}{२}$ बक = क्ष घे ·

आतां अब बक अक या तीन बाजूंचे प्रत्येकीं = २क्ष आहेत · याजकरितां (भू० ३४ सि० प्र०) $कड = \sqrt{(अब^2 - बड^2)} = \sqrt{(४क्ष^2 - क्ष^2)} = \sqrt{३क्ष^2} = क्ष\sqrt{३}$

पुनः कोणत्येही सरळरेघ त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ त्याचा लंब आणि पाया यांचे गुणाकाराचे अर्धा बराबर आहे · याजकरितां

अबक

अबक△ चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ बक × कड = क्ष × क्ष√३ = क्ष^2√३

बईक△ चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ बक × ईग = क्ष × ब = बक्ष·

अईक△ चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ अक × ईह = क्ष × क = कक्ष·

अईब△ चें क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ अब × ईफ = क्ष × अ = अक्ष·

परंतु यांत शेवटील तीन त्रिकोण बईक, अईक, अईब हे मिळून पहिल्ये अबक त्रिकोणाचे बराबर आहेत · याजकरितां

क्ष^2√३ = अक्ष + बक्ष + कक्ष· याचा दोनही

बाजू क्षनें भागून क्ष√३ = अ + ब + क·

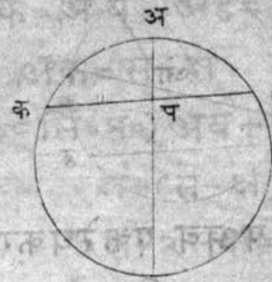
क्ष = $\frac{अ + ब + क}{√३}$ हें या त्रिकोणाचे कोणत्येही बाजूचे अर्धाबराबर आहे·

कुरलरी · यापासून कळतें किं कड लंब = क्ष√३ हें आहे· याजकरितां त्याचे = अ + ब + क हें आहे · ह्मणोन कोणत्येही सम बाजू त्रिकोणांत कोठीलही ईबिंदूपासून तीनें बाजूंवर केलेल्ये लंबांची बेरीज त्या त्रिकोणाचे लंबोंची बराबर आहे·

साहावें कृत्य·

अकबड सांगीतल्ये वर्तुळांत सांगीतल्ये प बिंदूपार सांगीतल्ये लांबी बराबर कड ज्याकरायाचें·

सांगीतल्ये



सांगीतल्ये पबिंदूपार अपब व्यासकर · आणि कड ज्या= अ घे · अप = ब · पब = क आणि कप = क्ष · तर पड = अ-क्ष होईल ·

आता (भू॰ ६१ सि॰प्र॰) कप × पड = अप × पब · ह्मणजे

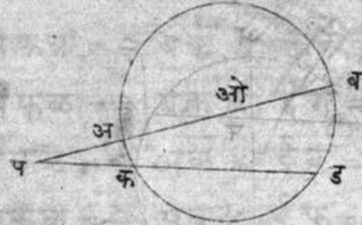
क्ष × (अ − क्ष) = ब × क ·

अक्ष − $क्ष^2$ = बक ·

$क्ष^2$ − अक्ष = − बक · या समीकरणाचें रीती प्रमाणें पृथक्करण करून क्ष = $\frac{1}{2}$ अ ± √($\frac{1}{4}$ $अ^2$ − बक) यांत क्षचा दोन किंमती आहेत त्या दोनही धन आहेत ·

सातवें कृत्य ·

सांगीतल्ये अबडक वर्तुळाचे बाहेर सांगीतला प बिंदू आहे त्यापासून वर्तुळास छेदनरेघ करायाचें · जा छेदनरेघेचा वर्तुळांतील तुकडा सांगीतल्ये लांबी बराबर होईल ·



ओ वर्तुळमध्यापार पअब एकरेघकर · आणि कड = अ घे · पअ = ब , पब = क · आणि पक = क्ष , तर पड = क्ष + अ आतां (भू॰ ६१ सि॰ म॰) पक × पड = पअ × पब , ह्मणजे

$$\text{क्ष} \times (\text{क्ष} + \text{अ}) = \text{ब} \times \text{क}$$

$\text{क्ष}^2 + \text{अक्ष} = \text{बक}$ · या समीकरणाचें पूर्व प्रमाणें पृथक्करण करून $\text{क्ष} = -\frac{1}{2}\text{अ} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\text{अ}^2 + \text{बक})}$ यांत क्षची एक किमत धन आहे आणि दुसरी किमत ऋण आहे ·

आठवें कृत्य ·

कोणत्येही अबक सरळरेघ त्रिकोणाचा बक पाया आणि अब अक या दोन बाजूंची बेरीज आणि त्याचे शिरापासून पायाचे मध्यापर्यंत केलेली अड रेघ इतकें सांगीतलें · या पासून राहिले अवयव काढायाचें ·



बड किंवा डक = अ घे. अड = ब, अब + अक = स आणि अब = क्ष, तर अक = स − क्ष.

आतां (भू० ३८ सि० प्र०) $\text{अब}^2 + \text{अक}^2 = २\,\text{बड}^2 + २\,\text{अड}^2$.

$$\text{क्ष}^2 + (\text{स} - \text{क्ष})^2 = २\,\text{अ}^2 + २\,\text{ब}^2$$

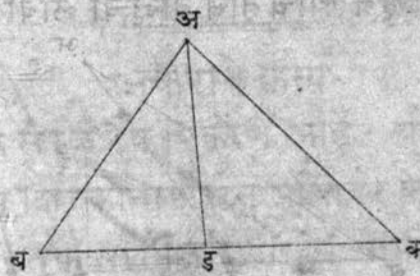
$$२\,\text{क्ष}^2 - २\,\text{सक्ष} = २\,\text{अ}^2 + २\,\text{ब}^2 - \text{स}^2$$

$$\text{क्ष}^2 - \text{सक्ष} = \text{अ}^2 + \text{ब}^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{स}^2$$

याचें रीतीप्रमाणें पृथक्करण करून हें होतें $\text{क्ष} = \tfrac{1}{2}\,\text{स} \pm \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{ब}^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{स}^2)}$ हें या त्रिकोणाचे दोन बाजूंची किमत दाखवितें. ह्मणजे एक बाजूची धन किमत आणि दुसऱ्ये बाजूची ऋण किमत. यांत $\text{अ}^2 + \text{ब}^2$ हें $\tfrac{1}{2}\,\text{स}^2$ याहून अधिक असावें. हें लक्ष्यांत असलें पाहिजे.

नववें कृत्य.

कोणताही एक अबक त्रिकोण आहे. त्याचा अब अक या दोन बाजू आणि त्याचा शिरकोन दुभागिल्ये ती अड रेघ इतकें सांगीतलें आहे. यापासून त्याचा पाया काढायाचें.



अब =

अब = अ घे · अक = ब · अड = क · आणि बक = क्ष .

आता (भू०८३सि०प्र०) अब : अक :: बड : डक · आणि (भू०६९सि०प्र०) मिश्रणानें अब+अक : अब :: बड+डक : बड

ह्मणजे $\text{अ}+\text{ब} : \text{अ} :: \text{क्ष} : \frac{\text{अक्ष}}{\text{अ}+\text{ब}} = \text{बड}$ ·

आणि $\text{अ}+\text{ब} : \text{ब} :: \text{क्ष} : \frac{\text{बक्ष}}{\text{अ}+\text{ब}} = \text{डक}$ ·

परंतु (भू०६४सि०प्र०) $\text{बड}\times\text{डक}+\text{अड}^2 = \text{अब}\times\text{अक}$ ·

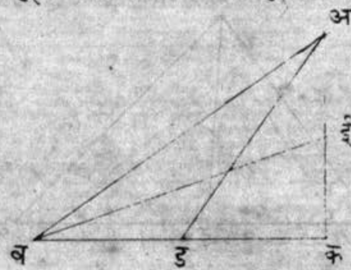
$$\frac{\text{अबक्ष}^2}{(\text{अ}+\text{ब})^2} + \text{क}^2 = \text{अब}$$

$$\frac{\text{अबक्ष}^2}{(\text{अ}+\text{ब})^2} = \text{अब} - \text{क}^2$$

$\text{अबक्ष}^2 = (\text{अ}+\text{ब})^2 \times (\text{अब}-\text{क}^2)$ या समीकरणाचें पृथक्करण करून $\text{क्ष} = (\text{अ}+\text{ब})\sqrt{\frac{\text{अब}-\text{क}^2}{\text{अब}}}$ ही बक पायाची इछिली किमत आहे·

दोहावें कृत्य·

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे · त्याचे लघुकोनांपासून त्यांचेच समोरचे बाजूंचे मध्यांपर्यंत केलेल्या दोन रेघांची लांबी सांगीतली आहे · त्यापासून त्याचे तीन बाजूंची लांबी काढायाचें ·



अड = अ घे. बई = ब, कड किंवा ½ कब = क्ष, आणि कई किंवा ½ अक = य.

आतां (भू० ३४ सि० प्र०) $कड^2 + अक^2 = अड^2$ आणि $कई^2 + कब^2 = बई^2$.

$$क्ष^2 + ४ य^2 = अ^2$$

आणि $$य^2 + ४ क्ष^2 = ब^2$$

आतां दुसरें समीकरण प्रथमसमीकरणाचे चोपटींतून वजा करून हें समीकरण होतें. $१५ य^2 = ४ अ^2 - ब^2$

$$य = \sqrt{\frac{४ अ^2 - ब^2}{१५}}$$

आणि या सारिखें प्रथम समीकरण दुसऱ्यें समीकरणाचे चौपटींतून वजा करून हें समीकरण होतें. $१५ क्ष^2 = ४ ब^2 - अ^2$

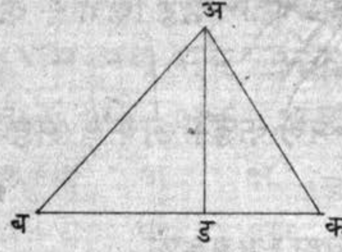
$$क्ष = \sqrt{\frac{४ ब^2 - अ^2}{१५}}$$

आणि ही क्ष आणि य यांची किम्मत अर्धा भुज आणि अर्धी कोटी यांचे बरोबर आहे. आणि ब हें २अ याहून कमी आहे. आणि ½ अ याहून अधिक असावें.

अकरावें कृत्य.

अबक एक सरळ रेघ त्रिकोण आहे. त्याचा दोन बाजू प्रमाणांत आहेत. आणि शिरकोनापासून पायावर केल्ये लंबानें पायाचे जालेले दोन खंड इतकें सांगीतलें आहे. यापासून बाजू काढायाचें.

आतां



आतां बड=अघे· डक=ब· आणि अब=क्ष· अक=य· आणि अब अक यादोन बाजूंचें प्रमाण· जसा म : नला·

तर प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें अब : अक : : म : न·

आणि (भू०३५सि०प्र०) $अब^2 - अक^2 = बड^2 - डक^2$·

$$क्ष : य : : म : न$$

$$क्ष^2 - य^2 = अ^2 - ब^2$$

प्रमाणांतील शेवटील आणि मध्य हीं पदें गुणून नक्ष=मय यांत $य = \frac{नक्ष}{म}$ ही यची किमत दुसर्‍ये समीकरणांत ठेवून $क्ष - \frac{न^2क्ष^2}{म^2} = अ^2 - ब^2$

$$(म^2 - न^2)\, क्ष^2 = म^2(अ^2 - ब^2)$$

याजकरितां भागाकार आणि वर्गमूळ० $क्ष = म\sqrt{\frac{अ^2 - ब^2}{म^2 - न^2}}$

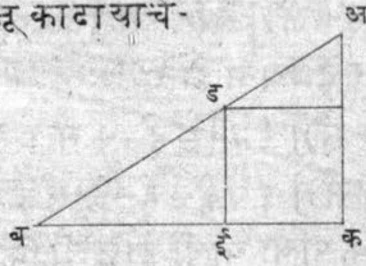
$य = न\sqrt{\frac{अ^2 - ब^2}{म^2 - न^2}}$ ही अब अक बाजूंची इछिली किमत आली·

बारावें कृत्य·

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे· त्याचा कर्ण आणि त्या

त्रिकोणांतील

त्रिकोणांतील इक चौरसाचा बाजू इतकें सांगीतलें आहे · त्यापासून राहिल्या दोन बाजू काढायाचें·



अब= ह घे · इई किंवा इफ= स · अक= क्ष · आणि बक= य · तर सरूप त्रिकोणानें · अक : कब :: अफ : फइ ·

किंवा क्ष : य :: क्ष−स : स · शेवटील पदें आणि मध्य पदें गुणून सक्ष= क्षय−सय

क्षय = सक्ष+ सय

क्षय= स(क्ष+य) हें प्रथम समीकरण·

परंतु (भू०३४सि०प्र०) अक^2+ बक^2=अब^2

किंवा क्ष^2+ य^2=ह^2 हें दुसरें समीकरण· आतां प्रथम समीकरणाची दुपट दुसर्‍येंसमीकरणांत मिळविली तर हें उत्पन्न होतें·

क्ष^2+२क्षय+य^2=ह^2+२स (क्ष+य)

किंवा (क्ष+य)^2−२स (क्ष+य)=ह^2 या समीकरणाचें वर्गसमीकरणरीतीनें पृथ० करू० हें होतें क्ष+य=स±√(ह^2+स^2)

किंवा य=स−क्ष±√(ह^2+स^2) ही यची किमत प्रथम समीकरणांत यचे स्थळीं ठेवून हें होतें·

क्ष

$$क्ष\,\{स-क्ष\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}=स\,\{स\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}$$

किंवा $क्ष^{२}-\{स\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}\,क्ष=-स\,\{स\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}$ या समी· करणाचें पृथक्करण करून हें उत्पन्न होतें·

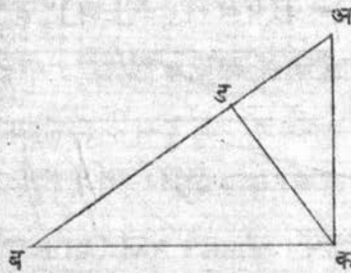
$$क्ष=\tfrac{१}{२}\,\{स\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}\pm\surd\{\tfrac{१}{४}ह^{२}-\tfrac{१}{२}स^{२}\mp\tfrac{स}{२}\surd(ह^{२}+स^{२})\}$$

आणि $य=\tfrac{१}{२}\{स\pm\surd(ह^{२}+स^{२})\}\mp\surd\{\tfrac{१}{४}ह^{२}-\tfrac{१}{२}स^{२}\mp\tfrac{स}{२}\surd(ह^{२}+स^{२})\}$

ही अक कोटी आणि बक पाया यांची इछिली किमत· हें उत्तर·

तेरावें कृत्य·

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे · त्याची परिमिति आणि कड लंब· जो अब कर्णावर क काटकोनापासून केला आहे तो · इतकें सांगीतलें · यापासून तीन बाजूंचें वेगळालें परिमाण काढायाचें ·



परिमिती=प घे· कड=अ · अक=क्ष · आणि बक=य

$अब=प-(क्ष+य)$

परंतु (३४सि०प्र०) $अक^{२}+बक^{२}=अब^{२}$

ह्मणजे $क्ष^{२}+य^{२}=प-(क्ष+य)^{२}=प^{२}-२प(क्ष+य)+क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}$

आतां

आतां स्थळां० २ याणींभा० $प(क्ष+य)-\frac{१}{२}प^{२}=क्षय$ · हें प्रथम समी· करण· पुनः सरूप त्रिकोणानें $अब : बक :: अक : कड$ · यांतील शे· वटपदें आणि मध्यपदें गुणू० $अब \times कड = बक \times अक$ ·

$अप-अ(क्ष+य)=क्षय$· हें दुसरें समी· करण· हें प्रथमसमीकरणाशीं समकरून हें होतें $(अ+प)\times(क्ष+य)= अप+\frac{१}{२}प^{२}$

यांत $$क्ष+य=\frac{प(अ+\frac{१}{२}प)}{अ+प}$$

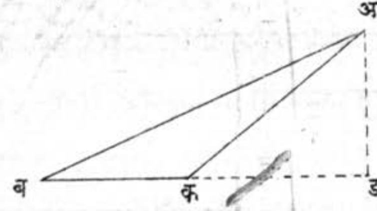
$$य=\frac{प(अ+\frac{१}{२}प)}{अ+प}-क्ष$$ आतां क्ष+य आणि य यांची किमत दुसर्ये समीकरणांत ठेवून नंतर त्यास अतिसरळरूप देउन पृथ· क्करण केल्यानें हें उत्पन्न होतें $(अ+प)क्ष^{२}-प(अ+\frac{१}{२}प)क्ष=-\frac{१}{२}अप^{२}$· या शेवटील समीकरणापासून आणि पूर्व यचे किमतीपासून हें उत्पन्न होतें· $$क्ष \text{ किंवा } अक \text{ बाजू}=\frac{प(अ+\frac{१}{२}प)}{२(अ+प)}\pm\frac{प}{२(अ+प)}\sqrt{(अ-\frac{१}{२}प)^{२}-२अ^{२}}$$
$$य \text{ किंवा } बक \text{ बाजू}=\frac{प(अ+\frac{१}{२}प)}{२(अ+प)}\mp\frac{प}{२(अ+प)}\sqrt{(अ-\frac{१}{२}प)^{२}-२अ^{२}}$$
आतां या दोन बाजूंची बेरीज परिमितींतून वजा करून हें होतें·
$$अब=प-(क्ष+य)=\frac{प^{२}}{२(अ+प)}$$ ही तीन बाजूंची इ- छिली किमत· हें उत्तर·

चौदावें कृत्य·

अबक एक विशाळ कोन त्रिकोण आहे· त्याची लंबोंची पाया आणि दोन बाजूंची बेरीज इतकें सांगीतलें आहे· यापासून राहिल्ये

दोन

दोन बाजूंचें वेगळालें परिमाण काढायाचें·



लंबोंची अड = प घे · बक पाया = ब · आणि अब + अक = स · आणि त्यांची वजाबाकी = क्ष घे ·

आतां दोन पदांची अर्धवजाबाकी त्यांचेच अर्धबेरिजेंत मिळविली असतां मोटा भाग होतो · आणि अर्धवजाबाकी अर्धबेरिजेंतून वजा केली असतां लाहान भाग होतो · याजकरितां

$$अब = \frac{१}{२}(स + क्ष) \text{ आणि } अक = \frac{१}{२}(स - क्ष)$$

परंतु (भू॰ ३४ सि॰ प्र॰) $कड^२ = अक^२ - अड^२$ किंवा $कड = \sqrt{अक^२ - अड^२}$

$$कड = \sqrt{\frac{१}{४}(स - क्ष)^२ - प^२}$$

आतां (भू॰ ३६ सि॰ प्र॰) $अब^२ = बक^२ + अक^२ + २ बक \times कड$

म्हणजे $\frac{१}{४}(स + क्ष)^२ = ब^२ + \frac{१}{४}(स - क्ष)^२ + २ ब \sqrt{\frac{१}{४}(स - क्ष)^२ - प^२}$

अथवा $स क्ष - ब^२ = २ ब \sqrt{\frac{१}{४}(स - क्ष)^२ - प^२}$ या समीकरणाचे दोनही· बाजूंचा वर्ग करून पदांस स्थळां॰ करावें आणि सरळ रूप देऊन हें उत्पन्न होतें · $(स^२ - ब^२) क्ष^२ = ब^२(स^२ - ब^२) - ४ ब^२ प^२$ अथवा $क्ष = ब \sqrt{१ - \frac{४ प^२}{स^२ - ब^२}}$

आतां मिळवणीनें आणि वजाबाकीनें·

$$अब \text{ बाजू} = \frac{स}{२} + \frac{ब}{२}\sqrt{१ - \frac{४ प^२}{स^२ - ब^२}}$$

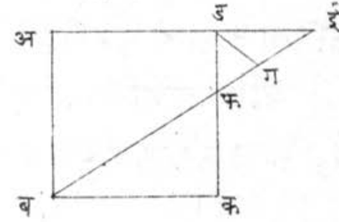
अक

$$\text{अक बाजू} = \frac{स}{२} - \frac{ब}{२}\sqrt{१ - \frac{४प^{२}}{स^{२} - ब^{२}}}$$

या दोन त्या त्रिकोणाचे इछिल्ये दोन बाजूंच्या किमती आहेत हें उत्तर·

पंधरावें कृत्य·

बड एक सांगीतलें चौरस आहे · त्याचे कोणत्येही कोनापासून ह्मणजे ·असें एथे ब कोनापासून बफई सरळरेघ करायाची आहे ती अशीकिं · तीचा त्या चौरसा बाहेरील ईफ तुकडा · जो ई पर्यंत वाढवित्ये अड बाजूस ई स्थळावर छेदितो · आणि डक बाजूस फ स्थळावर छेदितो · तो सांगीतल्ये लांबी बराबर होईल ·



फई रेघ ग स्थळीं दुभाग · आणि अब किंवा बक = अ घे · फग किंवा गई = ब · आणि बग = क्ष · तर बई = क्ष + ब होईल · आणि बफ = क्ष − ब ·

आतां काटकोन त्रिकोणानें $अई^{२} = बई^{२} - अब^{२}$

याजकरितां $अई = \sqrt{बई^{२} - अब^{२}}$

किंवा $अई = \sqrt{(क्ष+ब)^{२} - अ^{२}}$

पुनः बकफ ईअब हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत · याजकरितां

भू०

(भू०८४सि०प्र०) बफ : बक : : बई : अई ·

अथवा $\text{क्ष}-\text{ब} : \text{अ} : : \text{क्ष}+\text{ब} : \sqrt{(\text{क्ष}+\text{ब})^2-\text{अ}^2}$ ·

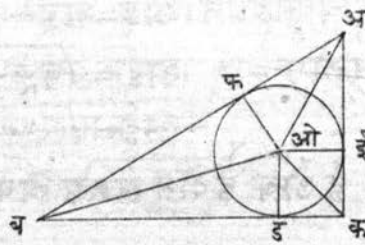
शेवटपदें आणि मध्यपदें गुणू० $\text{अ}(\text{क्ष}+\text{ब})=(\text{क्ष}-\text{ब})\sqrt{(\text{क्ष}+\text{ब})^2-\text{अ}^2}$ या सभी० चा दोनही बाजूंचे वर्ग० पदांस स्थ० हें होतें $\text{क्ष}^4-२(\text{अ}^2+\text{ब}^2)\text{क्ष}^2=\text{ब}^2(२\text{अ}^2-\text{ब}^2)$ या समी० चें वर्गसमी० प्र० पृथक्करण क० हें होतें $\text{क्ष}=\sqrt{\text{अ}^2+\text{ब}^2\pm\text{अ}\sqrt{(\text{अ}^2+४\text{ब}^2)}}$ या क्षचे किमतीशीं ब मिळवून बई होत्ये · आणि त्या क्षचे किमतींतून ब वजा करून बफ होत्ये · म्हणजे $\text{बई}=\sqrt{\text{अ}^2+\text{ब}^2\pm\text{अ}\sqrt{(\text{अ}^2+४\text{ब}^2)}}+\text{ब}$

आणि $\text{बफ}=\sqrt{\text{अ}^2+\text{ब}^2\mp\text{अ}\sqrt{(\text{अ}^2+४\text{ब}^2)}}-\text{ब}$ या दोन किमतींपासून ई आणि फ या दोन बिंदूंचीं स्थळें कळतात · याजकरितां हें कृत्य पुरें जालें ·

यांत आणावें किं सर्वकाळ ड वर्तुळ मध्य कल्पून ईफ रेषेचें अर्ध त्रिज्या करून वर्तुळ परिघ केल्यास ग बिंदु त्या परिघावर येईल ·

सोळावें कृत्य ·

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे · त्याची परिमिति आणि आंतील वर्तुळाची त्रिज्या इतकें सांगीतलें · यापासून त्या त्रिकोणाचा वेगळाल्या बाजू काढायाचें ·



परिमिति

परिमिति=प ये · ओड किंवा ओई आंतील वर्तुळाची त्रिज्या= र · अई=क्ष · आणि बड=य ·

आतां अईओ आणि अफओ या दोन काटकोन त्रिकोणांत ओई बराबर ओफ आहे · आणि अओ साधारण आहे · याजकरितां अफ बाजूही अई चे अथवा क्षचे बराबर आहे ·

या रीतीनें सिद्ध होतें कि बफ बाजू बडचे बराबर किंवा यचे बराबर आहे ·

आतां प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें आणि (भू०३४सि०प्र०)

$$(क्ष+र)+(य+र)+(क्ष+य)=प$$

$$(क्ष+र)^{२}+(य+र)^{२}=(क्ष+य)^{२}$$

अथवा प्रथम समीकरणाचे पदांची बेरीज घेउन आणि दुसर्या समीकरणाचें पदांचा वर्गकरून हें होतें · $क्ष+य=\frac{१}{२}प-र$

आणि $र(क्ष+य)=क्षय-र^{२}$ यांतील प्रथमसमीकरणांत क्षलास्थळीं० करू० हें होतें $य=(\frac{१}{२}प-र)-क्ष$ · ही यची किमत दुसर्ये समी०त यचे स्थळीं ठेउन हें होतें $क्ष^{२}-(\frac{१}{२}प-र)क्ष=-र(\frac{१}{२}प-र)$

याचें रीतीप्र० पृथक्करणकरू० हें होतें $क्ष=\frac{१}{२}(\frac{१}{२}प-र)\pm\sqrt{\frac{१}{४}(\frac{१}{२}प-र)^{२}-र(\frac{१}{२}प-र)}$

$$य=\frac{१}{२}(\frac{१}{२}प-र)\mp\sqrt{\frac{१}{४}(\frac{१}{२}प-र)^{२}-र(\frac{१}{२}प-र)}$$

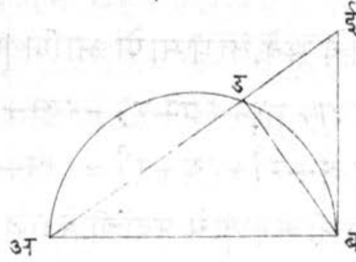
या दोहोंशीं प्रत्येकीं र मिळवून $अक=\frac{१}{२}(\frac{१}{२}प-र)\pm\sqrt{\frac{१}{४}(\frac{१}{२}प-र)^{२}-र(\frac{१}{२}प-र)}+र$

$$बक=\frac{१}{२}(\frac{१}{२}प-र)\mp\sqrt{\frac{१}{४}(\frac{१}{२}प-र)^{२}-र(\frac{१}{२}प-र)}+र$$

ही त्यात्रिकोणाचा भुज आणि कोटी यांची इछिली किमत आली हें उत्तर· सत्रावें

सत्रावें कृत्य.

अडब एक सांगीतलें अर्धवर्तुळ आहे. त्याचे व्यासाचे एक शेवटापासून अई रेघ करायाची आहे. ती अशी कीं. जीचा परिघाचे बाहेरील डई तुकडा. जो त्या व्यासाचे दुसर्‍ये शेवटावर चढविल्ये लंबास ई स्थळीं मिळतो. तो सांगीतल्ये लांबीबराबर होईल.



अब व्यास = ड घे. अई = अ. आणि डई = क्ष. आणि बड सांध.

आतां (भूं० ५२ सि० प्र०) अडब कोन काटकोन आहे. याजकरितां अबई आणि अबड हे दोन सरूप त्रिकोण आहेत. ह्मणोन.

अई : अब : : अब : अड.

अथवा क्ष : ड : : ड : क्ष-अ. शेवटील पदें आणि मध्य पदें गुणून $\text{क्ष}^{२} - \text{अक्ष} = \text{ड}^{२}$. याचें रीतीप्रमाो० पृथक्करण करून हें होतें $\text{क्ष} = \frac{१}{२}\text{अ} + \sqrt{(\frac{१}{४}\text{अ}^{२} + \text{ड}^{२})}$ हें उत्तर.

अठरावें

अठरावें कृत्य.

सांगीतल्ये अ आणि ब या दोन बिंदूंपार एक वर्तुळ करायाचें. तें असें कि. सांगीतल्ये स्थितीचे कड रेयेस स्पर्श करील.

अब सांध. आणि इछिल्ये वर्तुळाचे घेतल्ये ओ मध्यापार अबवर ईफ रेघ लंब कर. तर (भू. ४१ सि. प्र.) ईफ रेघ अब रेयेस ई स्थळीं दुभागील.

पुन: ओब सांध. आणि ईह ओग हे दोन कडवर लंब कर. ह्मणजे ओग रेघ (भू. ४७ सि. प्र.) कड रेयेस स्पर्शस्थळीं मिळेल.

आतां यापासून कळतें कि अ ई ब ह आणि फ हे सांगीतले बिंदू आहेत. तेव्हां ईफ = बघे. ईब = अ. ईह = व. आणि ईओ = क्ष. तर ओफ = ब - क्ष होईल.

आतां ओईब त्रिकोणाचा ई कोन काटकोन आहे. याजकरितां

$$ओब^2 = ईओ^2 + ईब^2$$

$$ओब = \sqrt{ईओ^2 + ईब^2}$$

$$ओब = \sqrt{क्ष^2 + अ^2}$$

परंतु

परंतु सरूपत्रिकोणानें·

फई : ईह :: फओ : ओग · किंवा त्याचे = त्रिज्या ओब · अथवा ब : क :: ब−क्ष : ओब ·

म्हणजे यांत ओब = $\frac{क}{ब}$ (ब−क्ष)

आतां ओबच्या या दोन किमती परस्पर बराबर करून हें होतें ·

$\sqrt{क्ष^2 + अ^2} = \frac{क}{ब}(ब - क्ष)$ या समीकरणाचे दोनही बाजूंचा वर्ग करून आणि पदांस अतिसरळ रूप देउन हें होतें ·

$(ब^2 - क^2)क्ष^2 + २बक^2क्ष = ब^2(क^2 - अ^2)$ या समीकरणाचें पृथक्करण करून हें होतें $क्ष = -\frac{बक^2}{ब^2 - क^2} + ब\sqrt{\frac{क^4}{(ब^2-क^2)^2} + \frac{क^2 - अ^2}{ब^2 - क^2}}$ ही अब ज्याचे ई स्थळापासून ओ वर्तुळमध्यापर्यंत ईओ रेषेची लांबी आहे · आणि यांत निश्चय दिसतें किं · ब · कहून अधिक असावा · आणि क · अहून अधिक असावा ·

कृत्यांचीं उदाहरणें·

प्रथम

सांगीतल्ये ड व्यासावरील अर्धवर्तुळांतल्ये चौरसाचा बाजू काढायाचे·

उत्तर = ड√५

दुसरें·

एक काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण (१३) आणि राहिल्ये दोन बाजूंची

जूंची वजाबाकी (७) इतकें सांगीतलें आहे · यापासून दोन बाजूंची प्रत्येकीं लांबी काढायाचें ※·

उत्तर ५ आणि १२

तिसरें·

ज्याचा व्यास ड सांगीतला आहे · त्या वर्तुळाचे आंतील आणि बाहेरील समबाजू त्रिकोणाचा बाजू काढायाचें·

उत्तर $\frac{1}{2}$ ड$\sqrt{3}$ आणि ड$\sqrt{3}$

·चवथें·

ज्याचा व्यास ड सांगीतला आहे · त्यावर्तुळांतील समबाजू पंचकोनाचा बाजू काढायाचें·

उत्तर $\frac{1}{4}$ ड $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

पांचवें·

एक काटकोन चौकोनाचा बाजू काढायाचें · ज्याची परिमिति चौरसाचे परिमिती बराबर आहे· ज्या चौरसाची अ बाजू सांगीतली आहे· आणि त्याचें क्षेत्रफळ त्या चौरसाचे क्षेत्रफळाचे अर्धा बराबर होईल·

उत्तर अ+$\frac{1}{2}$ अ$\sqrt{2}$ आणि अ−$\frac{1}{2}$ अ$\sqrt{2}$

साहावें·

एक समबाजू त्रिकोणाचे बाजूची लांबी (१०) सांगीतली आहे·

※· या प्रश्नांत अंकसंख्या जेथे येईल · तेथे अक्षरचिन्हें योजून काम करावें· तें काम पुरें आल्यानंतर त्या अक्षर चिन्हांची किंमत उत्तरांत लिहावी·

त्यापासून

त्यापासून त्याचे आंतील आणि बाहेरील वर्तुळांचा त्रिज्या काढायाचें

उत्तर २·८८६८ आणि ५·७७३६

सातवें·

एक रांबसाची परिमिति (१२) आणि दोन कर्णरेघांची बेरीज (८) इतकें सांगीतलें आहे · यापासून कर्णरेघांची वेगळाली लांबी काढायाचें·

उत्तर $४+\sqrt{२}$ आणि $४-\sqrt{२}$

आठवें·

एक काटकोन चौकोनाचें क्षेत्रफळ काढायाचें · ज्याचा कर्ण $\text{क्ष}^{\text{३क्ष}}$ भुज $\text{क्ष}^{\text{२क्ष}}$ कोटि $\text{क्ष}^{\text{क्ष}}$ इतकें सांगीतलें आहे·

उत्तर १·०२९०८५

नववें·

एक रांबायदाचा जवळचा दोन बाजू (अ आणि ब) सांगीतल्या आहेत · आणि कर्णरेघेची लांबी ड सांगीतली आहे · यापासून दुसरी कर्णरेघ काढायाचें·

उत्तर $\sqrt{२\text{अ}^{२}+२\text{ब}^{२}-\text{ड}^{२}}$

दाहावें·

एक सरळरेघ त्रिकोणाची लंबोंची (३००) दोन बाजूंची बेरीज (११५०) आणि पायाचे खंडांची वजाबाकी (४९५) इतकें सांगीतलें आहे · यापासून पाया आणि दोन बाजू यांची वेगळाली लांबी काढायाचें

काढायाचें·

उत्तर ६४५ · ३७५ · ७८०

अकरावें·

एक सरळरेघत्रिकोणाचे तीन कोनांपासून त्यांचे समोरचे बाजूंचे मध्यांपर्यंत केलेल्या तीन रेघांची वेगळाली लांबी १८ · २४ आणि ३० इतकें सांगीतलें आहे · यापासून त्या तीन बाजूंची वेगळाली लांबी काढायाचें·

उत्तर २० · २८·८४४ आणि ३४·१७६

बारावें·

एक सरळरेघत्रिकोणाचा पाया (५०) क्षेत्रफळ (७९६) आणि बाजूंची वजाबाकी (१०) इतकें सांगीतलें आहे· यापासून त्याचा बाजू आणि लंबोंची काढायाचें·

उत्तर ३६ · ४६ आणि ३३·२६१

तेरावें·

एक सरळरेघत्रिकोणाचा पाया (१९४) शिरकोन दुभागिल्ये ती रेघ (६६) आणि त्याचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास (२००) इतकें सांगीतलें आहे· यापासून राहिल्या दोन बाजू काढायाचें·

उत्तर ८१·३६५८७ आणि १५७·४३८६५

चौदावें·

एक सरळरेघ काटकोन त्रिकोण आहे· त्याचे दोन लघुकोनांस

जा

जा रेघा दुभागितात त्या (४० आणि ५०) इतकें सांगीतलें आहे. यापासून त्याचा तीन बाज्र्‍ू काढायाचें.

उत्तर ३५.८०७३७, ४७.४०७२८, ५९.४११४३

पंधरावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाची लंबोंची (४) पाया (८) आणि दोन बाज्र्‍ूंची बेरीज (१२) इतकें सांगीतलें आहे. यापासून दोन बाज्र्‍ूंची वेगळाली लांबी काढायाचें -

उत्तर ६ + $\frac{२}{५}$√५ आणि ६ − $\frac{४}{५}$√५.

सोळावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाचा पाया (१५) क्षेत्रफळ (४५) आणि दोन बाज्र्‍ूंचें प्रमाण असे २ : ३ दोन तिहींला इतकें सांगीतलें आहे. यापासून दोन बाज्र्‍ूंची वेगळाली लांबी काढायाचें.

उत्तर ७.७९१५ आणि ११.६८७२

सत्रावें.

एक त्रिकोणाची लंबोंची (२४) पायास दुभागित्ये ती रेघ शिरकोनापर्यंत (४०) आणि शिरकोनास दुभागित्ये ती रेघ पायापर्यंत (२५) इतकें सांगीतलें आहे. यापासून त्याचे तीन बाज्र्‍ूंची वेगळाली लांबी काढायाचें -

उत्तर पाया $\frac{३५०}{७}$√७

यापासून राहिल्या दोन बाज्र्‍ू सत्वर निघतील.

अठरावें.

अठरावें.

एक काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण (१०) आणि त्याचे दोन शेवटां पासून आंतील वर्तुळाचे मध्यापर्यंत केलेल्ये दोन रेघांची वजाबाकी (२) इतकें सांगीतलें आहे · यापासून त्याचा भुज आणि कोटि काढायाचें ·

उत्तर ८·०८००४ आणि ५·८७४४७

एकुणिसावें.

एके वर्तुळांत दोन ज्या काटकोन करून परस्पर छेदितात · त्यांची लांबी (अ आणि ब) आणि त्यांचे छेदन बिंदूपासून वर्तुळमध्या पर्यंत अंतर (क) इतकें सांगीतलें आहे · यापासून त्या वर्तुळाचा व्यास काढायाचें ·

उत्तर $\sqrt{८(अ^{२}+ब^{२})+२क^{२}}$

विसावें ·

एक समपातळी भूमीवर दोन झाडें आहेत · त्यांचे मध्यें अंतर (१२०) फुट आहे · त्यांत मोटें झाड (१००) फुट उंच आहे · आणि लाहान झाड (८०) फुट उंच आहे · तेव्हां त्या समपातळी भूमीवर एक मनुष्य कोठें उभा राहिला · असाकिं · त्या झाडांचीं शिरें आणि त्या शिरांतील अंतर हीं तीन परस्पर बराबर होतील ·

उत्तर लाहान झाडाचे बुंधापासून $२०\sqrt{२१}$ फुट · मोठ्ये झाडाचे बुंधापासून $४०\sqrt{३}$ फुट ·

एकविसावें

एकविसावें.

एक वर्तुळांतील चापीज्यंमाचा चार बाजू ६, ५, ४ आणि ३ या लांबीचा इतकें सांगीतलें. यापासून त्या वर्तुळाचा व्यास काढाया-चें.

उत्तर $\frac{१}{२०}\sqrt{१३० \times १५३}$ किंवा ७·०५१५९५

बाविसावें:

अ ब क हे तीन गांव आहेत. त्यांत अ पासून ब पर्यंत अंतर (३०) मैल आहे. आणि ब पासून क पर्यंत अंतर (२५) मैल. आणि क पासून अ पर्यंत अंतर (२०) मैल असें आहे. आणि त्या ती-न गांवांचे मध्यें घर बांधायाचें आहे. तें असें किं. तेथून तीनही गांवा-स अंतर बराबर राहावें.

उत्तर १५·११८५५६ मैल एकेका पासून.

तेविसावें.

अ ब क एकसमबाजू त्रिकोणांचें क्षेत्रफळ (१००) आणि ज्याचा बक पाया अर्धवर्तुळाचे व्यासावर आहे. आणि त्याचा अ शिर कोन त्या अर्धवर्तुळ परिघाचे मध्यावर आहे. इतकें सांगीतलें. यापा-सून त्या अर्धवर्तुळाचा व्यास काढायाचें.

उत्तर $१०\sqrt{३}$

चौविसावें

एक सरळरेघ त्रिकोणाची लंबोची (प) आणि त्याचे आंतील

कबाहेरील वर्तुळांचा दोन त्रिज्या (त आणि थ) इतकें सांगीतलें आहे. या पासून त्रिकोणाचा बाजू कादायाचें.

उत्तर पाया $\frac{२त\sqrt{२पथ-४तथ-त^२}}{प-२त}$

पंचविसावें.

एक सरळरेघ त्रिकोणाचा पाया (२अ) लंबोंची (अ) आणि दोन बाजूंचे घनांची बेरीज पायाचे घनाचे तिपटी बरोबर आहे. इतकें सांगीतलें या पासून बाजूंची वेगळाली लांबी कादायाचें.

उत्तर अ (२ + $\frac{१}{३}\sqrt{६}$ आणि अ (२ − $\frac{१}{३}\sqrt{६}$



PART V.

PLANE TRIGONOMETRY.

CONTENTS.

पांचवा भाग

सरळरेघ त्रिकोणमिति

अनुक्रमणिका

—०*०—

सरळरेघत्रिकोणमिति

व्याख्या

१ सरळरेघत्रिकोणमिति सरळरेघ त्रिकोणाचा बाजू आणि कोन यांचे गुणे आणि हिसाब दाखविले.

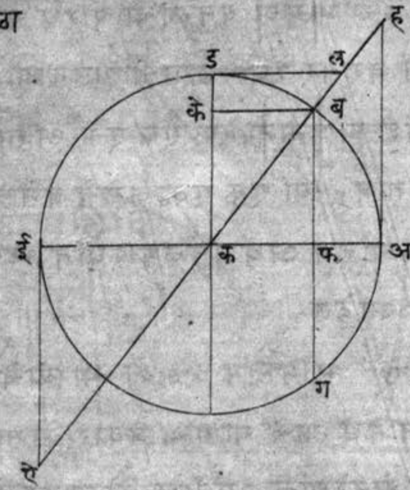
२ प्रत्येक वर्तुळाचा परिघ भूमितीचे ५७ व्ये व्याख्येंत सांगीतलें आहे कीं बराबर ३६० भागानीं भागिला असें कल्पिलें आहे, त्या प्रत्येक भागांस अंश ह्मणतात; त्या एक एक अंशाचे बरोबर ६० भाग कल्पिले त्यांस कळा ह्मणतात, त्या एक एक कळेचे तसेच ६० भाग कल्पिले त्यांस विकळा ह्मणतात, यांतून अर्ध वर्तुळपरिघांत १८० अंश आहेत, आणि वर्तुळपादांत ९० अंश आहेत.

३ भूमितींत ५७ व्ये व्याख्येचे पुढें जवळच कोनाचे गुण दाखविले आहेत तेथे त्याचे मापाचा प्रकार कौसावर सांगीतला आहे त्याप्रमाणें त्या कोनाचे दोनरेघांचे आंतील कौसावर जे अंश कळा आणि विकळा येतील तें त्या कोनाचें माप आहे; आणि कोनबिंदू त्या वर्तुळाचा मध्य आहे. आणि ज्या व भुजज्या इत्यादि सर्व वर्तुळाचे गुण भूमितींत लिहिले आहेत; यांतून दिसतें कीं जें वर्तुळपादाचें माप ९० अंश आहेत त्याणीं काटकोन मापतो, आणि सर्व त्रिकोणाचे कोनांची बेरीज दोन काटकोन अथवा १८० अंश आहेत; तेव्हां कोणत्याही काटकोन त्रिकोणांत एक लघु कोनाचें माप ९० अंशांत वजा केलें असतां, बाकी राहील ती दुसर्या लघु कोनाचें माप होईल; आणि कोणत्येही त्रिकोणांत दोन कोनांची बेरीज १८० अंशांतून वजा करून बाकी राहील ती तिस

र्ये

र्ये कोनाचें माप होईल. अथवा, एक कोनाचें माप १८० अंशांतून वजाकरून, बाकी राहील ती दुसर्ये दोन कोनांची बेरीज होईल

४ अंश दाखवाया करितां अंकावर उजव्येकडे लाहान शून्य करितों. आणि कळेचे बाजूवर एक रेघ आणि विकळेचे बाजूवर दोनरेघा जसें ५७°..३०′..१२″ ह्मणजे ५७ अंश ३० कळा आणि १२ विकळा



५ कोणत्येही कौसाचें कांप्लुमेंटल तें आहे जी ९० अंश अथवा वर्तुळपाद पूर्ण होण्यास भर लागेल जसें जर अड वर्तुळपाद आहे तर बड कौस अब कौसाचें कांप्लुमेंट आहे. आणि उलट. अब कौस बड कौसाचें कांप्लुमेंटल आहे तेव्हां जर अब कौस ५०° आहे तर त्याचें कांप्लुमेंटल बड कौस ४०° होईल.

६ कोणत्येही कौसाचें सप्लुमेंट तें आहे जी १८०° अथवा अर्धवर्तुळ पूर्णहोण्यास भर लागेल, जसें अडई अर्धवर्तुळ असेल तर बडई कौस अब कौसाचें सप्लुमेंट आहे; आणि त्याचे उलट अब कौस बडई कौसाचें सप्लुमेंट आहे, जर अब कौस ५०°आहे तर बडई कौस १३०° होईल.

७ कौसाचे एक शेवटापासून पार गेल्ये व्यासावर त्याच कौसाचे दुसर्ये शेवटापासून एक लंब आहे तो त्या कौसाची भुजज्या होय; जसें. बफ रेघ अब कौसाची भुजज्या; अथवा त्याचा सप्लुमेंटल बडई कौस आहे त्याची भुजज्या होय

होय यांतून दिसतें कीं बफ भुजज्या बअग कौंसाचे बग ज्याचे अर्धी आहे.

८ कोणत्येही कौंसाची भुजज्या व्यासास जेथें स्पर्शते तेथून त्याच कौंसाचे दुसर्ये शेवटापर्यंत जो व्यासाचा तुकडा आहे त्यास शर ह्मणतात. जसें अब कौंसाचा शर अफ आहे, आणि ईडब कौंसाचा शर ईफ आहे.

९ कौंसाची स्पर्शरेघ ती होय, जी वर्तुळास त्या कौंसाचे एक शेवटावर स्पर्श करून वाढली, अशी कीं वर्तुळ मध्यापासून निघोन त्याच कौंसाचे दुसर्ये शेवटास लागून पारगेल्ये रेघेस मिळत्ये; आणि या शेवटील रेघेस त्या कौंसाची छेदनरेघ ह्मणतात. जसें, अड कौंसाची स्पर्शरेघ अह आहे, आणि कह त्याची छेदनरेघ आहे पुनः बडई सप्लमेंटल कौंसाची स्पर्शरेघ ईऐ आहे, आणि कऐ छेदनरेघ आहे. या शेवटील स्पर्श छेदन रेघा पूर्व स्पर्श छेदन रेघांचे बरोबर आहेत; परंतु यांस ऋण ह्मणतात, कारण या पूर्वरेघांचे दुसर्ये दिशेस आहेत.

१० कोणत्येही कौंसाची को भुजज्या, को स्पर्शरेघ, आणि को छेदनरेघ, ती होय. जी त्याचे कांप्लमेंटल कौंसाची भुजज्या, स्पर्शरेघ, आणि छेदनरेघ, आहे. कांप्लमेंटल शब्दाचा संकोच करून को ह्मणून लिहिलें; जसें, अब आणि बड हे कौंस परस्परांचे कांप्लमेंटल आहेत याजकरितां, एकाची भुजज्या, स्पर्शरेघ, छेदनरेघ, ती अनुक्रमें दुसर्याची को भुजज्या, को स्पर्शरेघ, आणि को छेदनरेघ, होय जसें बफ रेघ अब कौंसाची भुजज्या, तसें ती बड कौंसाची को भुजज्या; आणि बक, बड कौंसाची भुजज्या, ती अब कौंसाची को भुजज्या होय. याप्रमाणें अह रेघ अब कौंसाची स्पर्शरेघ आहे, ती बड कौंसाची को स्पर्शरेघ होय, आणि डल रेघ बड कौंसाची स्पर्शरेघ आहे, ती अब कौंसाची को स्पर्शरेघ हो

य

य: पुनः कह रेघ अब कौसाची छेदनरेघ आहे, ती बड कौसाची कोछेदनरेघ होय; आणि कल रेघ, बड कौसाची छेदनरेघ आहे, ती अब कौसाची कोछेदनरेघ होय·

कुरलरी· याव्याख्यांवरून कित्येक फारउपयोगी गुण स्वल्पानें प्रकट होतात·

प्रथम, कोणताही कौस आणि त्याचा सप्लुमेंटल यांची भुजज्या स्पर्शरेघ आणि छेदनरेघ बराबर आहे; परंतु शेवटील दोन रेघा ह्मणजे स्पर्शरेघ आणि छेदनरेघ यांस ऋण ह्मणतात· जेव्हां, तो कौस वर्तुळपाद अथवा ९० अशांहून अधिक आहे·

दुसरा· जेव्हां कौस ० शून्य आहे तेव्हां भुजज्या आणि स्पर्शरेघ ० शून्य होत्ये; आणि छेदनरेघ, कअ त्रिज्याचे बरोबर आहे, ही छेदनरेघ याहून लाहान होतनाहीं· जसा ० शून्यापासून कौस वाढतो, तशी भुजज्या, स्पर्शरेघ, आणि छेदनरेघ, हीं सर्व अनुक्रमें वाढतात, कौस अब वर्तुळपाद पूर्ण होयपर्यंत; तेसमयीं भुजज्या, त्रिज्या बराबर होत्ये, ती याहून अधिक होतनाहीं· तेसमयीं स्पर्शरेघ, आणि छेदनरेघ, अनंत लांब होत्ये·

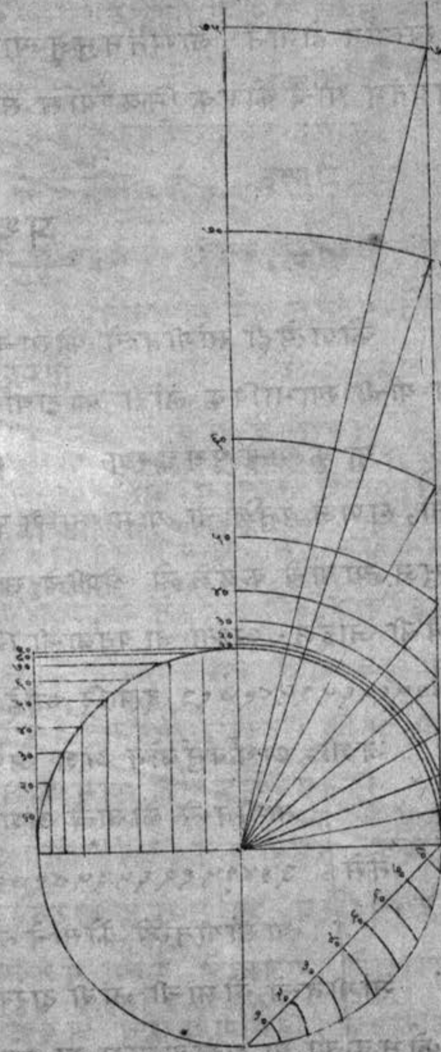
तिसरा, कोणताही अब कौस आहे, त्याचा शर अफ, आणि कोभुजज्या बके, अथवा फक, सर्वमिळोन अक त्रिज्याचे बराबर आहे अक त्रिज्या, अह स्पर्शरेघ, आणि कह छेदनरेघ, यांपासून कअह एक काटकोन त्रिकोण होतो; याप्रमाणें त्रिज्या भुजज्या आणि कोभुजज्या यांपासून दुसरा एक काटकोन त्रिकोण कफब, अथवा ककेब आणि त्रिज्या कोस्पर्शरेघ कोछेदनरेघ यांपासून एक कडल काटकोन त्रिकोण होतो; हे सर्व काटकोन

त्रिकोण

त्रिकोण परस्पर सरूप आहेत.

११ कोणत्येही कोनाची भुजज्या, स्पर्शरेघ आणि छेदनरेघ, ती आहे जी त्या कोनास मापत्ये कौसाची आहे; तसें या कौसाचें माप जे अंश कळा आणि विकळा आहेत त्या मापाची ती तीच होय.

१२ बाजूवरची आकृती दाखवित्ये कीं, कूपासपेटींतल्या स्केल, भुजज्या स्केल, स्पर्शरेघ स्केल, आणि छेदनरेघ स्केल, हीं आहेत तीं कोणत्यारीतीनें करितात तें.



१३ त्रिकोणमिति कोष्टक तेच आहेत, जे वर्तुळपादांत हरएक कळा विकळा जा आहेत त्यांची वेगळाली भुजज्या स्पर्शरेघ आणि छेदनरेघ यांची लांबी दाखवितात, एकंम त्रिज्याचे प्रमाणानें शून्या वांचून-या भुजज्या स्पर्शरेघा आणि छेदनरेघा यांचें लाग्रतंमही कोष्टकांत लिहिलें आहे, हें लाग्रतंम बहुत कामांत घेतात, कारण, सरळभुजज्यानें गुणाकार

आणि

आणि भागाकार करायाचे ते लाग्रतंमानें मिळवणी आणि वजाबाकी केल्यानें स्वल्पांत होतात. लाग्रतंमभुजज्या लाग्रतंमस्पर्शरेघ आणि सरळ संख्यांचें लाग्रतंम यांचे कोष्टक मिळण्यास सुलभ आहेत.

प्रथम कृत्य

कोणत्येही सांगीतल्ये कौसाची स्वाभाविक भुजज्या आणि कोभुजज्या यांची स्वाभाविक लांबी काढायाचें.

या कृत्याचें पृथक्करण अनेकरीतींनीं होतें. त्यांतून एकरीति पुढें लिहितो, ह्मणजे वर्तुळाचा व्यास आणि परिघ यांचे गुणोत्तराचे आणि भुजज्या कोभुजज्या यांचे कळलेल्ये श्रेणीचे साहाय्यानें. त्या श्रेणीची सत्यता पुढें दाखविली जाईल. आतां ज्या वर्तुळाची त्रिज्या १ आहे, त्याचा अर्धपरिघ ३.१४१५९२६५३५८९७९३ इत्यादि आहे, यानकरितां हें प्रमाण होईल.

जशी, अर्धवर्तुळांत अंश अथवा कळा यांची संख्या,

सांगीतल्ये कौसाचे अंश अथवा कळा यांचे संख्येस आहे.

तसे, ३.१४१५९२६५३५८९७९३ हे,

त्या सांगीतल्ये कौसाचे लांबीस होतील.

सांगीतल्ये कौसाची लांबी दाखवायास अ, घे; त्याची भुजज्या आणि कोभुजज्या या दाखवायास स आणि क घे; तेव्हां स आणि क यांच्या किमती या पुढील श्रेणींत आहेत.

स =

$$स = अ - \frac{अ^3}{2 \cdot 3} + \frac{अ^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{अ^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{इत्यादि}$$

$$= अ - \frac{अ^3}{6} + \frac{अ^5}{120} - \frac{अ^7}{5040} + \quad \text{इत्यादि}$$

$$क = 1 - \frac{अ^2}{2} + \frac{अ^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{अ^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \quad \text{इत्यादि}$$

$$= 1 - \frac{अ^2}{2} + \frac{अ^4}{24} - \frac{अ^6}{720} + \quad \text{इत्यादि}$$

उदाहरणें

प्रथम: एककलेची ज्या आणि कोभुजज्या काढायास इच्छिली आहे·

आतां·१८० अंशांत १०८०० कळा आहेत, याजकरितां

जशा १०८००′ : १′ : : ३·१४१५९२६५ इत्यादि : ·०००२९०८८८२०८६६५ = १ कळे-चे कौसाची लांबी·

याजकरितां याउदाहरणांत अ = ·०००२९०८८८२,

आणि $\frac{1}{6}$ अ^3 = ·००००००००००००४ इत्यादि

यांची वजाबाकी ह्मणजे स = ·०००२९०८८८२ ही एककलेचे भुजज्या-ची स्वाभाविक लांबी आहे·

पुन: १· यापासून

$\frac{1}{2}$ अ^2 = ०·००००००००४२३०७९ इत्यादि वजा करून बाकी राहिली क = ·९९९९९९९५७७ हीएककलेची भुजज्या आहे हें उत्तर

दुसरें

दुसरें, ५ अंशांची भुजज्या आणि कोभुजज्या यांची स्वाभाविक लांबी काढायास इच्छिली आहे.

एथे जसे १८०°:५°::३.१४१५९२६५ इत्यादि: .०८७२६६४६ = अ, ही ५ अंशांची लांबी.

याजकरितां $अ = .०८७२६६४६$

$- \frac{१}{६} अ^{३} = .०००११०७६$

$+ \frac{१}{१२०} अ^{५} = .०००००००४$

यांस एकत्र करून $स = .०८७१५५७४$ ही ५ अंशांची भुजज्या आहे.

पुनः $१ = १$

$- \frac{१}{२} अ^{२} = -.००३८०७७१$

$+ \frac{१}{२४} अ^{४} = .०००००२४१$

यांस एकत्र करून $क = .९९६१९४७०$ ही पांच अंशांची कोभुजज्या आहे हें उत्तर

यारीतीनें कोणत्येही दुसर्ये कौसाची भुजज्या आणि कोभुजज्या यांची लांबी कळेल. परंतु, कौस जितका छोटा असेल तितकीं श्रेणीचीं पदें हळु हळु वाढतात. याजकरितां त्याची बरोबर स्वाभाविक लांबी काढायास श्रेणीचीं पदें यांहून अधिक कामांत घेतलीं पाहिजेत, अशीं कीं लांबी, सत्यलांबीचे जवळ जवळ येईल.

अथवा भुजज्याची लांबी काढिल्यानंतर कोभुजज्या, कबफ काटकोन त्रिकोणाचे गुणापासून निघेल. ह्मणजे कोभुजज्या $कफ = \sqrt{कब^{२} - बफ^{२}}$; अथवा $क = \sqrt{१ - स^{२}}$,

दुसरें कृत्य

सांगीतल्ये कोनांचा स्वाभाविक स्पर्शरेघा आणि छेदन रेघा काढायाचें.

पूर्वकृत्यरीतीनें भुजज्या आणि कोभुजज्या या कळल्यावर सरूपत्रिकोणाचे गुणांपासून स्पर्शरेघा आणि छेदनरेघा या पुढील रीतीनें सहज्यांत निघतील.

प्रथम आकृतींत अब कोनाची भुजज्या बफ आहे, याची कोभुजज्या कफ अथवा बके आहे, स्पर्शरेघ अह आहे, छेदनरेघ कह आहे, कोस्पर्शरेघ डल आहे, कोछेदनरेघ कल आहे, आणि वर्तुळाची त्रिज्या कअ अथवा कड किंवा कब आहे, आतां कफब, कअह, आणि कडल या तीन सरूपत्रिकोणांपासून हीं पुढील प्रमाणें निघतात.

प्रथम, कफ : फब : : कअ : अह, ह्मणजे यारीतीनें स्पर्शरेघ कळल्ये, ह्मणोन स्पर्शरेघ, कोभुजज्या भुजज्या आणि कअ त्रिज्या यांचें चतुःप्रमाण आहे.

दुसरें, कफ : कब : : कअ : कह, ह्मणजे यारीतीनें छेदनरेघ कळल्ये; ह्मणोन छेदनरेघ, कोभुजज्या आणि त्रिज्या यांचें तिसरें प्रमाण आहे; जेव्हां त्रिज्या १ आहे, तेव्हां ती कोभुजज्याचा व्युत्क्रम आहे.

तिसरें, बफ : फक : : कड : डल, ह्मणजे यारीतीनें कोस्पर्शरेघ कळल्ये, ह्मणोन ती, भुजज्या कोभुजज्या आणि त्रिज्या या तिहींचें चतुःप्रमाण आहे.

अथवा

अथवा, अह : अक : : कड : डल, ह्मणजे यांतून कळतें की कोस्पर्शरेघ, स्पर्शरेघ आणि त्रिज्या यांचें तिसरें प्रमाण आहे;

अथवा जेव्हां त्रिज्या १ आहे तेव्हां ती, स्पर्शरेघेचा व्युत्क्रम आहे;

चौथें, बफ : बक : : कड : कल, ह्मणजे यारीतीनें कोछेदनरेघ कळते, ह्मणोन ती, भुजज्या आणि त्रिज्या यांचें तिसरें प्रमाण आहे; अथवा जेव्हां त्रिज्या १ आहे तेव्हां ती, भुजज्याचा व्युत्क्रम आहे.

कोष्टकांत लागरतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघा आणि छेदनरेघा लिहिल्या आहेत, त्या पूर्वरीतीनें निघालेल्या स्वाभाविक भुजज्या स्पर्शरेघा आणि छेदनरेघा यांचे लागरतंम मात्र आहेत.

भुजज्या आणि स्पर्शरेघ यांचें लाग्रतंम कोष्टकांचें लक्षण.

कोष्टकपत्रकांत डाव्येकडील प्रथम कोष्टकांत एकामागें एक या अनुक्रमें एककळेपासून एकएक कळेचे सर्वकोस अथवा कोन जे वर्तुळपादांत आहेत ते लिहिले आहेत; ह्मणून वरपासून खालीं उतरते ४५ अंश पर्यंत. तसे पंचेतालिसांपासून ९० पर्यंत वर चढते अंश पत्रकांत वर व खालीं लिहिले आहेत; आणि कळा डावेकडे व उजव्येकडे लिहिल्या आहेत. भुजज्या कोभुजज्या स्पर्शरेघ कोस्पर्शरेघ यांचें लाग्रतंम त्यांचे नावाबरोबर त्यात्या कळांचें समोर लिहिलें आहे; ह्मणोन त्यांचीं नावें पंचेतालीस पर्यंत वर लिहिलीं आहेत व पुढें ९० पर्यंत खालीं लिहिलीं आहेत.

छेदनरेघ आणि कोछेदनरेघ या कोष्टकांत न लिहिलीं; याचें कारण भुजज्या आणि कोभुजज्या यांपासून थोड्या युक्तीनें निघत्ये.

हरएक

हरएक कोस अथवा कोनाची भुजज्या आणि कोछेदनरेघ मिळून २० होतात ह्मणजे हे त्रिज्याचे दुपट आहेत; आणि त्या कोसाची अथवा कोनाची को[illegible]ज्या आणि छेदनरेघ मिळुन त्याचे बराबर २० होतात; तेव्हां जर छेदन रेघ हो[illegible] तर कोभुजज्या विसांतून वजा करावी ह्मणजे बाकी राहील ती छेदनरेघ जाली; आणि कोछेदनरेघ असावी तर विसांतून भुजज्या वजा करावी ह्मणजे बाकी राहील ती कोछेदनरेघ जाली; आणि वजाबाकी करायाची हीरीति सर्वांहून उत्तम आहे; डावेकडी[illegible]यावर जो अंक आहे तेथुन आरंभ करून सर्व अंक नवांतुन वजा करावे शेवटील [illegible]शिवाय; तो तर दाह्यांतून वजा करावा; नंतर प्रथम अंकाचे डावेकडे एकाचा अंक लिहावा.

वर भुजज्या स्पर्शरेघा आणि छेदनरेघा या कशा उत्पन्न कराव्या आणि कामांत कशा घ्याव्या हें सर्व सांगीतलें, याजकरितां त्रिकोणमितीचे पृथक्करणाचे वेगळाले प्रकार आरंभितो; परंतु पृथक्करण प्रकट करण्यास उपयोगी कांही गोष्टी पूर्वी सांगायास योग्य आहेत त्या सांगतो.

१ टीप त्रिकोणाचे अवयव काढायाचा रीती ३ आहेत, भूमितिकृत्यानें, गणितहिंसाबानें, आणि स्केलयंत्रानें;

प्रथमरीतींत सांगीतल्या अवयवांचे मापांपासून त्रिकोण उत्पन्न होतात, ह्मणजे रेघस्केलापासून बाजू, आणि कोणत्येही कोनस्केलापासून कोन. तेव्हां अव्यक्तपदें त्याच स्केलानी मापून सत्यपदांचे जवळ जवळ कळतात; दुसरे रीतींत प्रमाणांची पदें सांगीतल्ये रीतीनें किंवा सिद्धांत प्रमाणें यथास्थानी ठेवून यांपासून स्वाभाविक अंकांत चतुःप्रमाण इच्छाफळ उत्पन्न करावे, ह्मणजे

दुसरें

दुसरें आणि तिसरें· ही परस्पर गुणून प्रथमानें भागून· अथवा लाग्रतंमा-वरून हिंसाब करणेंतर दुसरें आणि तिसरें यांचे लाग्रतंमांची बेरीज घेउन त्यांतून प्रथमाचें लागरतम वजा करावें, ह्मणजे बाकीराहिल्ये लागरतंमापासून निघाली स्वाभाविकसंख्या त्या तीन पदांचें चतुःप्रमाण इछाफळ उत्पन्न होईल· तिसर्येशितींत यंत्रांत लाग्रतंमस्केल दोनफुट आंकणीधर आहे· आतां कृपास उघडून त्याचें एकटोंक त्यास्केलावर आदीची संख्या पुरीजाली तेथें ठेउन दुसरें टोंक त्याचीसभजाति अंतसंख्या जेथें पुरी जाली तेथें ठेव आणि तें माप घेउन नंतर दुसर्ये जातीच्या जो सांगीतला अवयव आहे त्याची संख्या पुरी होईल तेथें एकटोंक ठेउन दुसर टोंक जेथें येईल तेथपर्यंत माप चौथेंपद होईल·

जर आदिस्थानीं अंक अधिक आहेत आणि अंतस्थानीं थोडे आहेत तर आदिस्थानींचे अंक पुरे होतील तेथें स्केलावर एकटोंक ठेउन दुसरें टोंक त्याचे डावेकडे स्केलावर अंतस्थानीचे अंक समास होतात तेथें ठेउन माप घ्यावें· नंतर दुसर्ये जातीचे सांगीतल्ये अवयवाची मापसंख्या पुरी होईल तेथें एकटोंक ठेउन दुसरें टोंक त्याचे डावेकडे टेवावें· तें माप चौथेंपद होईल·

२ टीप प्रत्येक त्रिकोणास साहा अवयव आहेत· ह्मणजे ३ बाजू आणि ३ कोन· आतां कोणत्येही त्रिकोणाचे ३ अवयव सांगीतले असतां राहिले ३ अवयव सांगीतल्याचे आधारानें काढितां येतात; परंतु सांगीतल्ये ३ अवयवांत एक बाजू अगत्य असावी· कारण· बरोबर कोनांनीं बाजू लाहान किंवा मोटी असेल·

टीप, प्रत्येक त्रिकोणमितीचे सर्वप्रकार या पुढील तीन प्रकारांत आ-
हेत.

प्रथमप्र॰ जेव्हां एकबाजू आणि तीचे समोरचा कोन सांगितला आहे.

दुसराप्र॰ जेव्हां दोनबाजू व त्यांचे आंतील कोन सांगितला आहे.

तिसराप्र॰ जेव्हां तीनबाजू सांगीतल्या आहेत.

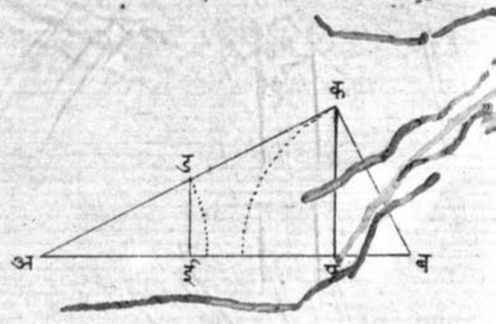
म्हणजे या तीन प्रकारांशिवाय आणखी होण्यास अशक्य याजकरितां या प्रत्येक प्रकाराचें पृथक्करण करायास वेगळाले सिद्धांत पुढें सांगतो.

प्रथम सिद्धांत

जेव्हां सांगीतल्ये अवयवांत एकबाजू आणि तिचेसमोरचा कोन आहे.

तेव्हां जे अवयव अव्यक्त आहेत ते या सिद्धांतांनीं काढितां येतील. म्हणजे. असें. त्रिकोणाचा बाजू परस्परांवर प्रमाण ठेवितात, तसें त्या बाजूंचे समोरचे कोनांचा भुजज्या ही प्रमाण ठेवितात.

म्हणून असे. कोणती एकबाजू.
तिचेसमोरचे कोनाचे भुजज्यास होत्ये.
तसें. कोणतीही दुसरी बाजू.
तिचेसमोरचे कोनाचे भुजज्यास होईल.



विवरण, अबक सांगीतला त्रिकोण असावा, ज्याची अतिमोटी बाजू अब आहे, आणि अतिलाहान बाजू बक. आतां बक त्रिज्या कल्पून तीचे बरोबर अड घे; आणि डई कफ हे अब रेघेवर लंब उतार, म्हणजे स्पष्ट आहे कीं या दोन रेघा अ आणि ब या दोन कोनांच्या भुजज्या आहेत, अड आणि बक या त्रिज्यानीं; आतां अडई अकफ हे दोन त्रिकोण समकोन आहेत; याजकरितां त्यांचा सजाति बाजू म्हणजे अक : कफ : : अड किंवा बक : डई, म्हणोन अक बाजू तीचे समोरचे कोनाचे भुजज्याला आहे, जशी बक बाजू तीचे समोरचे अ कोनाचे भुजज्याला आहे, हें सिद्ध.

प्रथम टीप, हिंसाब कर्त्येसमयीं अप्रकट कोनाची इछा आहे. तेव्हां सांगीतल्ये कोनासमोरचे बाजूपासून प्रमाण आरंभ करावा; आणि जेव्हां अप्रकट बाजूची इछा आहे, तेव्हां, सांगीतल्ये बाजूसमोरचे कोनापासून प्रमाण आरंभ करावा.

दुसरी टीप, यारीतीवरून कोन काढितात, परंतु हा लघुकोन किंवा विशाळकोन असा भ्रम राहातो. शिवाय काटकोन किंवा अतिमोटा विशाळकोन, कीं जेथें लंघुकोन होण्याचा संभव नाहीं; कारण, सांगीतल्ये कोनाची भुजज्या दोन कोनाची भुजज्या होत्ये, जे दोन कोन परस्पर सप्लमेंट आहेत. याजकरितां भूमिती कृत्यरीतीनें या पुढील सांगीतल्या अवयवांपासून

दोन

दोन त्रिकोण होतात; तेव्हां लघुकोन किंवा विशाळकोन हें मुळींच सांगीतल्या यांचून निश्चय होणारनाहीं· लाग्रतंभ कोष्टकांत अंश व कळा यांचे समोर जें भुज त्यो लाग्रतंभ लिहिलें आहे, तें लघुकोनाचें होय; याजकरितां जर विशाळ कोन [illegible]यांचा आहे असानिश्चय कळला असेल तर त्या लघुकोनाचें अंश कळादि [illegible]न १८०° तून वजा करावें ह्मणजे बाकी राहील तें त्या विशाळ कोनाचें माप होईल· जेव्हां सांगीतला कोन काटकोन किंवा विशाळ कोन आहे तेव्हां भ्रम राहांत नाहीं, कारण बाकीचे दोनकोन लघुकोनच होतील, कधींही त्यांत विशाळ होउंसकतनाहीं भूमिती कृत्यरीतीनें एकच त्रिकोण होतो·

उदाहरणें

प्रथम, अबक हा सरळरेघ त्रिकोण आहे·

सांगीतले अवयव	अब	३४५	यार्ड
	बक	२३२	यार्ड
	∠अ	३७°··२०′	

यांपासून अव्यक्त अवयव काढायाचे

प्रथम भूमिती कृत्यरीतीनें·

एक सरळरेघ कर· तिजवर अब ह्मणजे ३४५ कोणत्येही रेघस्केला वरून कर; नंतर अ कोन ह्मणजे ३७° $\frac{१}{३}$ च्या कोन कर; नंतर त्या पूर्वरेघस्केलावरून २३२ मापकूपासांत घेउन ब शेवट मध्यमानून वरल्ये आंगास

एक

एक कोस कर; असा कीं, अक रेघेस दोन स्थळीं छेदील, या दोनी छेदन बिंदूंपासून ब शेवटपर्यंत दोन सरळरेघा कर; ह्मणजे यावरून दोन त्रिकोण होतील; जे या त्रिकोणाचे वृत्तांतांत भ्रमकरितात.

तेव्हां अक दोनबाजू रेघस्केलावरून आणि ब कोन ज्यास्केल अथवा दुसरें कोणतेंही स्केलजावरून कोन मापितात त्यावरून मापसहित प्रकट होईल; ह्मणजे या उदाहरणीं याप्रमाणें आहे.

अक	१७४	∠ब	२७°	∠क	११५° $\frac{१}{२}$
अथवा	२७४ $\frac{१}{२}$	अथवा	७८° $\frac{१}{४}$	अथवा	६४° $\frac{१}{२}$

दुसर्यें गणित रीतीनें.

प्रथम क, कोन काढावयाचा.

जसें बक बाजू २३२ लाग	२.३६५४८८
त्याचे समोरचा कोन अ, ३७° . . २०′ याचे भुजज्यास होते.	९.७८२७९६
तसें अब ३४५ ही बाजू	२.५३७८१९
त्याचे समोरचे क कोनाचे भुजज्यास होईल	९.९५५१२७

∠क	६४ . . २४′	अथवा	११५ . . ३६′
∠अ	३७ . . २०′		३७ . . २०
बेरीज	१०१ . . ४४		१५२ . . ५६
यांतूनवजा	१८०		१८० . .
बाकी = ब कोन	७८ . . १६	अथवा	२७ . . ४

अकबाजू काढायाची

जमे कोन ३७° . . २०′ याची भुजज्या.		लाग ९.७८२७९६
त्याचे समोरचे बक २३२ या बाजूस होत्ये.		२.३६५४८८
तसें ∠ब { ७८° : : १६′ / २७ : : ४ } याकोनाची भुजज्या		९.६५८०३७ / ९.९९०८२९
त्याचे समोरचे अक १७४.०७ बाजूस होईल		२.२४०७२९
अथवा ३७४.५६		२.५७३५२१

तिसर्ये यंत्राचे रीतीनें

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक संख्या रेघस्केलांत २३२ चे खुणे-वर ठेवावें, आणि दुसरें टोंक पुढें ३४५ चे खुणेवर ठेवावें; नंतर त्या मापाचे त्या कूपासाचें एक टोंक ज्यास्केलावर ३७° $\frac{1}{2}$ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक ६४° $\frac{1}{2}$ चे खुणेपर्यंत जाईल ह्मणजे त्या मानाच्या क, कोन आला.

दुसर्ये प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक भुजज्यास्केलावर ३७° $\frac{1}{2}$ जेथें पुरे होतात तेथें ठेउन दुसरें टोंक २७° अथवा ७८° $\frac{1}{4}$ या जवर ठेवावें नंतर त्या मापाचे त्याच कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर २३२ जेथें पुरे होतात तेथें ठेउन दुसरें टोंक १७४ अथवा ३७४ $\frac{1}{4}$ यांजपर्यंत जाईल ह्मणजे तें अक बाजूचें माप होईल.

दुसरें

दुसरें उ॰ अबक, हा एक सरळरेघ त्रिकोण आहे·

सांगीतले अवयव	अब	३६५	यार्ड
	∠अ	५७°··१२′	
	∠ब	२४°··४५′	

यांपासून अप्रकट अवयव काय निघतात·

उत्तर	∠क	९८°··३′	
	अक	१५४··२३	
	बक	३०६··८६	

तिसरें उ॰ अबक, हा सरळरेघ त्रिकोण आहे·

सांगीतले अवयव	अक	१२०	फुट·
	बक	११२	फुट·
	∠अ	५७°··२८′	

यांपासून अप्रकट अवयव काय निघतात·

उत्तर	∠ब	६४°··३५	
	अथवा	११५··२५	
	∠क	५७··५७	
	अथवा	७··७	
	अब	११२·६	फुट·
	अथवा	१६·४७	फुट·

दुसरा सिद्धांत·

तेव्हां सांगीतल्ये अवयवांत दोन बाजू आणि त्यांचे आंतील एक कोन आहे·

प्रथम सांगीतल्ये दोन बाजूंची बेरीज घ्यावी; नंतर त्याच दोन बाजूंची वजाबाकी करावी· आतां सांगीतला कोन १८०° अथवा दोन काटकोनांतून वजा करावा; बाकी राहील ती त्रिकोणाचे अव्यक्त दोन कोनांची बेरीज होईल; या बेरिजेच्यें अर्ध ह्मणजे अव्यक्त दोन कोनांचे बेरिजेचें अर्ध होईल· तेव्हां या रीतीनें प्रमाण होईल·

अशी दोन सांगीतल्यें बाजूंची बेरीज·
त्याच बाजूंचे वजाबाकीस होत्ये·
तशी अव्यक्त दोन कोनाचे अर्ध बेरिजेची स्पर्शरेघ·
त्याच कोनांच्यें अर्ध वजाबाकीचे स्पर्शरेघेस होईल·

नंतर या प्रमाणांतून जी अव्यक्त कोनाची अर्धवजाबाकी निघेल ती त्याच कोनाचे अर्धबेरिजेंत मिळवावी; ह्मणजे ती बेरीज मोठा कोन होईल· आणि त्या अर्धबेरिजेंतून ती अर्धवजाबाकी वजा केली असतां जी बाकी राहील तो लाहान कोन होईल· कारण, कोणत्याही दोन संख्या ह्मणजे व्यक्त किंवा अव्यक्त आहेत त्यांचे बेरिजचें अर्ध आणि त्यांचे वजाबाकीचें अर्ध या दोन अर्धांची बेरीज मोटी संख्या दाखवित्ये· आणि त्या दोन अर्धांची वजा

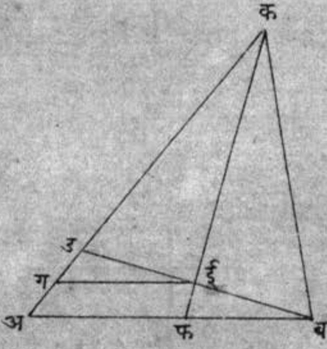
बाकी

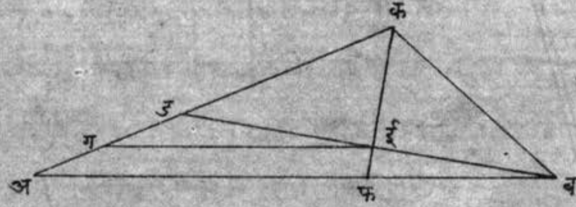
बाकी लाहान संख्या दाखविल्ये·

याजवरील टीप

प्रमाण राशींचे तिसर्ये स्थानीं अव्यक्त कोनांचे अर्ध बेरिजेची स्पर्शरेघ लिहिली आहे, त्यास्थळीं सांगीतल्ये कोनाचे अर्धाची कोस्पर्शरेघ घेन तरीं चालेल; कारण, यादोनीं बराबर आहेत·

विवरण, अबक एक सांगीतला त्रिकोण असावा, ज्याचा अक, कब, बाजू आणि त्यांचे आंतील कोन सांगीतला आहे।





ह्मणजे प्रथम आकृतींत क कोन लघु असावा, आणि दुसर्ये आकृतींत दिशाळ असावा, सांगीतल्ये दोन बाजूंतील लोटप्ये अक बाजूवर दुसर्ये बक बाजूचे बरोबर कड घे, बड सांध, आणि तीस ई स्थळीं दुभाग, पुनः अड, गस्थळीं दुभाग, आणि गई कई सांध, आणि या शेवटील रेघेस फ पर्यंत वाढीव·

आतां

आतां $\frac{१}{२}$(अक + कब) = $\frac{१}{२}$ (२गड + २डक) = कग.

आणि $\frac{१}{२}$(अक − कब) = $\frac{१}{२}$ (२अग) = अग.

पुनः $\frac{१}{२}$(अ + ब) = $\frac{१}{२}$ (कडब + कबड) = कबड.

आणि $\frac{१}{२}$(ब − अ) = अबक − $\frac{१}{२}$ बेरीज = अबड.

पुनः यास्तव कई, कबड समद्विबाजू त्रिकोणाचा पाया दुभागिते; तेव्हां त्याजवर लंब आहे;

याजकरितां ईक = कबड ची स्पर्शरेघ. } बई त्रिज्यानें
आणि ईफ = अबड ची स्पर्शरेघ. }

शेवटीं, यास्तव अकफ त्रिकोणांत, गई अफ शीं समांतर आहे.

तेव्हां भू०८२सि०प्र० कग : गअ : : कई : ईफ

अथवा

$\frac{१}{२}$ (अक+कब) : $\frac{१}{२}$ (अक − कब) : : $\frac{१}{२}$ (ब + अ) ची स्पर्शरेघ : $\frac{१}{२}$ (ब−अ) चे स्पर्शरेघेला.

आतां प्रथम युग्माची अग्रसर आणि उपाग्रसर यांची दुपट केली तरी प्रमाण हेंच आहे; तेव्हां अक + बक : अक − बक : : $\frac{१}{२}$ (ब+अ) चीस्पर्शरेघ : $\frac{१}{२}$ (ब − अ) चे स्पर्शरेघेला, हें सिद्ध.

प्रथम उदाहरण

अबक. हा सरळरेघ त्रिकोण आहे.

सांगितले अवयव	अब	३४५	यार्ड
	अक	१७४.०७	यार्ड
	∠अ	३७° . .	२०′

यांपासून

यां पासून अव्यक्त अवयव कायनिघतात

प्रथम भूमिती कृत्य रीतीनें

रेघस्केलावरून बरोबर ३४५ यार्ड एक अब सरळरेघ कर· [illegible] कोनस्केलावरून बरोबर ३७° .. २०′ एक अ कोन कर; नंतर रेघस्केलावरून बरोबर १७४·०७ यार्ड अक सरळरेघ कर· आता बक रेघ जोड, म्हणजे त्रिकोण आला·

तेव्हां अप्रकट कोनाचें माप त्यात्या स्केलावरून कळतें याप्रमाणें, बक बाजू २३२ यार्ड· ∠ब कोन २७° आणि ∠क कोन ११५°½

दुसर्‍यें गणित रीतीनें

अब बाजू	= ३४५		१८०° .. ००	यांतून
अक बाजू	= १७४·०७		∠अ ३७° .. २०	हे वजा कर
बेरीज	= ५१९·०७	२)	१४२ .. ४०	∠ब आणि ∠क यांची बेरीज
त्यांची वजा बाकी	= १७०·९३		७१ .. २०	तिचें अर्ध·

जशी अब आणि अक या बाजूंची बेरीज·	५१९·०७ .. लाग	२·७१५२२६
अब, अक, बाजूंचे वजा बाकीस होत्ये	१७०·९३	२·२३२८१८
तशी ∠क ∠ब, यांचे अर्धबेरिजेची स्पर्शरेघ	७१° .. २०′	१०·४७१२९८
अप्रकट ∠क ∠ब, यांचे अर्ध वजा बाकीचे	४४ .. १६	९·९८८८९०

स्पर्शरेघेस होईल·

या

या दोन अर्धांची बेरीज म्हणजे मोठा क कोन ११५ · · ३६ आला ·

याच अर्धांची वजाबाकी लाहान ब कोन २७ · ०४ आला ·

तेव्हां पूर्व सिद्धांता प्रमाणें ·

जशी ∠क ची ११५ · · ३६ अथवा ६४° · · २४ भुजज्या · · लाग ९·९५५१२६

त्याचे समोरचें अब, ३४५ या बाजूस होत्ये · · · २·५३७८१९

तशी ∠अ ३७° · · २०′ या कोनाची भुज्या · · · · ९·७८२७९६

त्याचे समोरचें बक २३२ या बाजूस होईल · · · · · २·३६५४८९

तिमय पत्र रीतीनें

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलांत ५१९ चे खुणेवर ठेवावें आणि दुसरें टोंक त्याच स्केलांत १७१ चे खुणेवर ठेवावें; नंतर त्या मापाचे त्या कूपासाचें एक टोंक स्पर्शरेघस्केलावर ७१° १/३ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक ४५° १/४ चे खुणेवर जाईल म्हणजे तें इछाफळ जालें ·

दुसर्‍यें प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक भुजज्या स्केलावर ६४° १/२ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक त्याच स्केलावर ३७° १/२ याजवर ठेवावें · नंतर त्या मापाचें कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर ३४५ चे खुणेवर ठेउन दुसरें टोंक त्याच स्केलावर २३२ चे खुणेवर जाईल · म्हणजे तें इछाफळ जालें ·

दुसरें उदाहरण

दुसरें उदाहरण

अबक, हा सरळरेघ त्रिकोण आहे·

सांगीतले अवयव	अब	३६५	यार्ड
	अक	१५४·३३	यार्ड
	∠अ	५७°··१२′	

यांपासून अप्रकट अवयव काय निघतात·

उत्तर	बक	३००·८६
	∠ब	२४°··४५
	∠क	९८··२

तिसरें उदाहरण

अबक हा एक सरळ रेघ त्रिकोण आहे

सांगीतले अवयव	अक	१२०	यार्ड
	बक	११२	
	∠क	५७°··५७	

यांपासून अव्यक्त अवयव कायनिघतात·

उत्तर	अब	११२·६
	∠अ	५७°··२८′
	∠ब	६४··३५

═══

तिसरा सिद्धांत

जेव्हां सांगीतल्ये अवयवांत तीन बाजू आहेत.

प्रथम, त्रिकोणाच्ये लोटे कोनापासून त्या कोनाच्ये समोरची बाजू पाया मानून त्याजवर एक लंब उतार, असा कीं, त्या पायाचे दोन खंड करील; आणि त्या लंबांपासून त्या त्रिकोणाच्ये दोन काटकोन त्रिकोण होतील. तेव्हां या रीतीनें प्रमाण होईल.

जसें पाया अथवा दोन खंडांची बेरीज.
दुसर्यें दोन बाजूंचे बेरिजेस होत्ये.
तसें त्या दोन बाजूंची वजा बाकी.
त्या दोन खंडांचे वजा बाकीस होईल.

नंतर या दोन खंडांचे वजा बाकीचें अर्ध त्या खंडांचे बेरिजेचे अर्धास मिळवावें; ह्मणजे मोटा खंड होईल. तसें दोन खंडांचे वजा बाकीचें अर्ध आणि त्याच खंडांचे बेरिजेचें अर्ध यांची वजा बाकी करावी, ह्मणजे लाहान खंड होईल.

यांतून दोन काटकोन त्रिकोण जाले, ह्मणोन प्रत्येकांत दोन बाजू आणि एक काटकोन प्रकट होतो. तेव्हां प्रथम सिद्धांत रीतीनें दोन राहिले कोन प्रकट होतील.

विवरण, भू० २५, सि० प्र० त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरज आणि वजा

बाकी

बाकी यांचा काटकोन चौकोन दोन खंडांची बेरीज आणि वजा बाकी यांचे काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे. याजकरितां भू० ७६ सि० प्र०, या काटकोन चौकोनाचे बाजूनीं प्रमाण करून वर लिहिलें प्रमाणें उत्पन्न होईल.

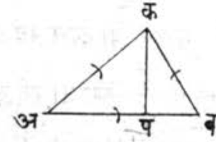
या प्रकारांतील उदाहरणाचें पृथक्करण केल्याचे पूर्वी या रीतीनें पाहा कीं त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहे कीं नाहीं. जर त्याचे दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज कर्णाचे वर्गा बरोबर आहे तर तो काटकोन त्रिकोण आहे, त्याचें पृथक्करण चौथ्ये सिद्धांतावरून होईल.

प्रथम उदाहरण

अबक, हा सरळरेघ त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव	अब	३४५ यार्ड
	अक	२३२
	बक	१७४·०७

यांपासून कोन करायाचे.



प्रथम भूमिनी कृत्यरीतीनें

रेघस्केलावरून अब पाया ३४५ यार्ड कर. नंतर २३२ यार्ड कृपासांत घेउन त्याचें एक टोंक अ शेवटावर ठेउन वरल्ये आंगास एक कौस कर.

तसें

तसें १७४·०७ याई कूपासांत घेउन त्याचें एकटोंक ब शेवटावर ठेउन वरल्ये आंगास एक कौस कर· असा कीं पूर्व कौसास छेदील; आतां त्या कौस छेद-नबिंदुपासून दोन सरळ रेघां करून पायाचे दोनी शेवट सांध, ह्मणजे कोनां-चें माप त्या स्केलावरून याप्रमाणें निघेल·

∠अ [illegible]° ∠ब [illegible] आणि ∠क ११५° ½

दुसर्यें गणितरीतीनें

कप, लंब करून याप्रमाणें होईल·

असें· पाया· अब : अक + बक : : अक − बक : अप − बप· होईल·

ह्मणोन ३४५ : ४०६·०७ : : ५७·९३ :	६८·१८	याचें
	३४·०९	अर्ध
पायाचें अर्ध	१७२·५	या दोन अर्धांची
बेरीज ————————	२०६·५९	मोटा अप खंड
दोन अर्धांची वजा बाकी	१३८·४१	लाहान पब खंड

तेव्हां अपक त्रिकोण, जांत प काटकोन आहे·

जसें· अक २३२ ही बाजू . . . . लाग २·३६५४८८

तिचे समोरचे ∠प ९०° याचे भुजज्यास होत्ये . . . १०·००००००

तसें अप· २०६·५९ ही बाजू . . . . २·३१५१०९

तिचे समोरचे ∠अकप चें ६२° · · ५६ चें भुजज्यास होईल· ९·९४९६२१

९० · · ० यांतून वरचे वजा करून

२७ · · ४ बाकी हा ∠अ आला·

आतां

आतां बपक त्रिकोण, जांत प काटकोन आहे.

जसें बक १७४·०७ ही बाजू लाग २·२४०७२४

तिचे समोरचे ∠प ९०° याचे भुजज्यास होत्ये १०·०००००

तसें बप १३८·४१ ही बाजू २·[illegible]११६८

तिचे समोरचे ∠बकप ५२°··४०′ चें भुजज्यास होय. [illegible]९०१४४

		९०··००
	∠ब	३७··२०
आणि	∠अकप	६२°··५६
	∠बकप	५२··४०
		११५··३६ बेरीज

याजकरितां तीन कोनांचें माप याप्रमाणें आहे.

∠अ २७°··४′ ∠ब ३७°··२०′ आणि ∠क ११५°··३६′

तिसर्ये यंत्र रीतीनें.

प्रथम प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर ३४५ वर ठेउन दुसरें टोंक ४०६ वर ठेवावें; तें माप कूपासांत घेउन त्या कूपासाचें एक टोंक त्याच स्केलावर ५८ वर ठेवावें ह्मणजे दुसरें टोंक ६८ पर्यंत आईल; ह्मणजे ही खंडांची चआबाकी आली.

दुसर्ये प्रमाणांत कूपासाचें एक टोंक रेघस्केलावर २३२ वर ठेउन दुसरें टोंक २०६½ याजवर ठेवावें; आणि तें माप कूपासांत घेउन त्याचें एक

टोंक

टोंक भुजज्या स्केलावर ९०° वर ठेवावें, ह्मणजे दुसरें टोंक ६३° वर जाईल.

तिसर्‍ये प्रमाणांत रेघस्केलावर कूपासाचें एक टोंक १७४ पासून १३८ $\frac{१}{२}$ पर्यंत माप कूपासांत घेउन त्याचें एक टोंक भुजज्या स्केलावर ९०° वर ठेवावें, ह्मणजे दुसरें टोंक ५२° $\frac{१}{२}$ पर्यंत जाईल.

दुसरें उदाहरण

अबक, हा सरळ रघ त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव	अब	३६५	यार्ड
	अक	१५४·३३	
	बक	३०९·८६	

यांपासून कोन करायाचे.

उत्तर	∠अ	५७°··१२
	∠ब	२४··४५
	∠क	९८·· ३

तिसरें उदाहरण

अबक, हा सरळ बाजू त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव	अब	१२०	यार्ड
	अक	११२·६	
	बक	११२	

यां पासून कोन करायाचे.

उत्तर	∠अ	५७°··२८
	∠ब	५७··५७
	∠क	६४··३५

सरळ

सरळरेघ त्रिकोणाचे ह्मणजे काटकोन त्रिकोण अथवा विशाळकोन त्रिकोण किंवा लघुकोन त्रिकोण याचे अव्यक्त अवयव काढायाचे सर्वप्रकार या तीन सिद्धांतांत येतात· आतां कित्येक दुसरे सिद्धांत आहेत; परंतु ते त्रिकोणाचे आकृती विशेषीं लागतात; ज्यांपासून त्याचे अव्यक्त अवयव कोणे वेळेस पूर्वीं सांगीतलेल्ये त्या सामान्य तीन सिद्धांतांपेक्षां लवकर निघतात·

त्या विशेष सिद्धांतांतून बहुत उपयोगी एक सिद्धांत सांगतो·

चवथा सिद्धांत·

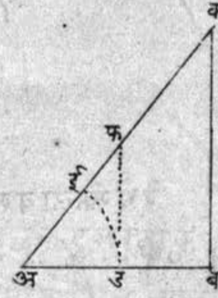
जेव्हां काटकोन त्रिकोण आहे, तेव्हां त्याचे अव्यक्त अवयव या पुढील प्रमाणानें निघतात·

जशी त्रिज्या·
त्याचे कोणत्येही बाजूस होत्ये·
तशी तिचे जवळचे कोनाची स्पर्शरेघ·
त्याचे समोरचे दुसर्ये बाजूस होईल·

आणि·

जशी त्रिज्या·
त्याचे कोणत्येही बाजूस होत्ये·
तशी तिचे जवळचे कोनाची छेदनरेघ·
त्याचे कर्णरेघेस होईल·

विवरण



विवरण, अबक काटकोन त्रिकोणांत अब सांगीतली बाजू असावी, अ, मध्यापासून कोणत्येही अउ त्रिज्यानें उई कौस कर, आणि उफ, अबवर लंब, अथवा बक शीं समांतर कर, आतां व्याख्यांपासून स्पष्ट आहे कीं उई कौसाची अथवा अ कोनाची उफ स्पर्शरेघ आहे, आणि अई छेदनरेघ आहे, अउ त्रिज्यानें. आतां पुनः बक, उफ, समांतर असून अउ : अब : : उफ : बक, आणि : : अफ : अक, आणि हें वर प्रमाणांत लिहिल्या प्रमाणेच आहे, हें सिद्ध.

टीप

त्रिज्या ९०° चे भुजज्याचे अथवा ४५° चे स्पर्शरेघेचे बराबर आहे आणि स्वाभाविक भुजज्या कोष्टकांत त्या त्रिज्याची किमत १ हा अंक दाखविला आहे, आणि लागरनंमिक भुजज्या कोष्टकांत १० हा अंक दाखविला आहे

प्रथमउदाहरण

अबक, हा सरळरेघ काटकोन त्रिकोण आहे:

सांगीतले	अब	१६२ यार्ड
अवयव	∠अ	५२° . . ७′ . . ४८″

यांपासून दुसरे अवयव काढायाचे.

प्रथम भूमिती कृत्य रीतीनें·

रेघस्केलावरून १६२ यार्ड अब सरळरेघ कर, आणि कोनस्केलाव-रून ५३°··७′··४८″ ∠अ कर; नंतर ब.पासून वर एक लंब काढीव, असाकीं, कोनरेघेस छेदील; नंतर अक २७० आणि बक २१६ हें माप रेघस्केलावरून कळेल·

दुसऱ्यें गणित रीतीनें

जशी त्रिज्या		लाग	१०·०००००००
अब बाजूस	१६२		२·२०९५१५
तशी ∠अ ५३°··७′··४८″ याची स्पर्शरेघ			१०·१२४९३७
बक बाजूस होईल	२१६		२·३३४४५२

आणि

जशी त्रिज्या		लाग	१०·०००००००
अब बाजूस	१६२		२·२०९५१५
तशी ∠अ ५३°··७′··४८″ याची छेदनरेघ			१०·२२१८४८
अक कर्णास होईल	२७०		२·४३१३६३

तिसऱ्यें

तिसर्ये यंत्र रीतीनें

कूपासाचें एक टोंक स्पर्शरेघस्केलावर ४५° वर ठेउन दुसरें टोंक त्याच स्केलावर ५३° ½ याजवर ठेव, आणि तें माप कूपासांत घेउन त्याचें एक टोंक संख्यास्केलावर १६२ वर ठेव, म्हणजे दुसरें टोंक २१६ वर जाईल, तें इछाफळ जालें.

दुसरें उदाहरण

अबक, हा सरळरेघ काटकोन त्रिकोण आहे.

सांगीतले अवयव { अब १८० ; ∠अ ६२°·४०'

यांपासून अव्यक्त अवयव काढायाचें.

उत्तर { अक ३९२·०१४६ ; बक ३४८·२४६४

प्रथम टीप.

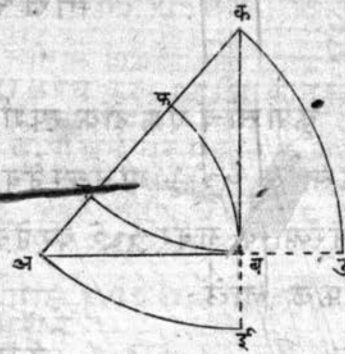
समय विशेषीं काटकोन त्रिकोणाचे अवयव करायाची दुसरी रीति आहे, ती सांगतो.

अबक

अबक, हा एक सरळरेघ काटकोन त्रिकोण आहे.

त्याची अब बाजू त्रिज्या कर.

आतां अ मध्य मानून अब ची लांबी त्रिज्या घेउन बफ एक कौस कर; तेव्हां या त्रिकोणाची बक बाजू या बफ कौसाची स्पर्शरेघ झाली, आणि अक कर्ण छेदनरेघ झाली.



याचरीती प्रमाणें बक बाजू त्रिज्या घेउन क मध्य मानून बग कौस केला, तेव्हां अब बाजू या बग कौसाची स्पर्शरेघ झाली, आणि अक कर्ण छेदनरेघ झाली.

परंतु कर्ण त्रिज्या करून कौस केले तर दोनही बाजू समोरचे कोनांच्या भुजज्या होतात.

ह्मणून अब बाजू अई कौसाची अथवा ∠क ची भुजज्या होत्ये, आणि बक बाजू कउ कौसाची अथवा ∠अ ची भुजज्या होत्ये.

तेव्हां ही रीति सर्व काटकोन त्रिकोणाचे बाजूंचें परस्पर प्रमाण दाखवित्ये. या रीतीस सर्व बाजू त्रिज्यारीति ह्मणतात.

दुसरी टीप

जेव्हां काटकोन त्रिकोणाचे सांगीतल्ये दोन बाजूंपासून तिसरी बाजू काढायाची आहे, तेव्हां भूमितीचे ३४ व्ये सिद्धांतांत काटकोन त्रिकोणाचे गुण सांगीतले आहेत, तेथे याचे दोन बाजूंचे वर्गांची बेरीज कर्णाचे

वर्गा बराबर आहे, ह्मणून सांगीतलें आहे; याजकरितां दोन बाजू सांगीतल्या असतील तर त्यांचे वर्गांचे बेरिजेचें वर्गमूळ कर्ण होईल. कदाचित् एक बाजू आणि कर्ण सांगीतला असेल तर त्या बाजूचा वर्ग करून कर्णाचे वर्गांत वजा करून बाकी राहील त्याचें वर्गमूळ दुसरी बाजू होईल. अथवा, जेव्हां कर्ण ह, आणि पाया ब, अथवा लंब प सांगीतला आहे; तेव्हां या बेरिजेचें अर्ध ह्मणजे लाग(ह+प) आणि लाग (ह−प) = ला ब, आणि ही अर्धबेरीज लाग (ह+ब) आणि ला (ह−ब) = लाग प,

जेव्हां ब आणि प सांगीतले आहेत तेव्हां हें पुढील लागरतंम कृत्य कामांत घेण्याचे उपयोगी फार आहे, ह्मणजे २ला प − ला ब, या वजा बाकीचे = न, संख्या काढ; आणि ब + न = म, कर, तेव्हां $\frac{१}{२}$ (ला म + ला ब) = लाग ह.

या रीतीची सत्यता स्पष्ट आहे; कारण, लागरतंमाचे गुणांपासून $\frac{प^२}{ब}$ = न, याजकरितां $ब + न = ब + \frac{प^२}{ब} = \frac{ब^२ + प^२}{ब} = म$, आणि $\frac{१}{२}$ (ला म + ला ब) = $\frac{१}{२}$ ला मब = $\frac{१}{२}$ ला $(ब^२ + प^२)$ = ला $\sqrt{(ब^२ + प^२)}$ = ला ह.

टीप, इच्छेप्रमाणें कोणत्येही काटकोन त्रिकोणाचे अवयव पूर्णांकांत असल्यास निघतील, जर याप्रमाणें केलें.

$$म^२ + न^२ = कर्ण$$
$$म^२ - न^२ = लंब$$
$$२ मन = पाया$$

यांत म आणि न इच्छेस येईल तसे घे, परंतु म, न पेक्षां मोटा असावा,

त्रिकोण

त्रिकोणमितींतील कांहीं उपयोगी सारणी कोष्टकांचा प्रकार.

अब, अक, अड, तीन कौस असावे, असे कीं बक = कड, आणि ओ, वर्तुळमध्य. अओ, ओक, बड, सांध. डईक्ष आणि ओऐ, अओ वर लंब कर, आणि अओ शीं समांतर बऐम कर, मक्ष सांध, आणि तिला ओन त्रिज्यानें दुभाग; आणि अह बड शीं समांतर कर.

तेव्हां अह = अकची भुजज्या.

ओह = अकची कोभुजज्या.

पुनः डई = ईक्ष = अडची भुजज्या.

ईके = ओऐ = अबची भुजज्या.

क्षके = अडचीभु + अबचीभु.

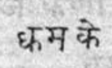
डके = अडचीभु − अबचीभु.

बऐ = ऐम = अबची कोभुजज्या.

ओई = केऐ = अडची कोभुजज्या.

मके = अबची कोभुजज्या + अडची कोभुजज्या.

बके = अबची कोभुजज्या − अडची कोभुजज्या. यास्तव कीं के कडील कोन काटकोन आहेत. बड कौस + मक्ष कौस = १८०° आणि डक कौस + मन कौस = ९०° याजकरितां मप = पक्ष = ओग = डकची कोभुजज्या = बकची कोभुजज्या; पुनः यास्तव कीं अक = $\frac{१}{२}$ (अब + अड) = $\frac{१}{२}$ वअक्ष = अओक कोन (मध्यांतील) = बडक्ष कोन (परिघावरील) = बमक्ष कोन (त्याच कोसावरील) याजकरितां अओह, बडके,



क्षमके

घमके, हे त्रिकोण समकोन आहेत

यापासून हें उत्पन्न होतें.

१ ओअ : अह : : मघ : घके

ह्मणजे त्रिज्या : अकचे भुजज्याला : : बकची २ कोभुजज्या : अडची भुजज्या + अबचे भुजज्याला,

२ ओअ : अह : : बड : डक,

ह्मणजे त्रिज्या : अक चे भुजज्याला : : बकचीं २ भुजज्या : अडची भुजज्या - अबचे भुजज्याला,

३ अओ : ओह : : घम : मके,

ह्मणजे त्रिज्या : अकचे कोभुजज्याला : : बकची २ कोभुजज्या : अबची कोभुजज्या + अडचे कोभुजज्याला,

४ अओ : अह : : डब : बके,

ह्मणजे त्रिज्या : अक चे भुजज्याला : : बकची २ भुजज्या : अबची कोभुजज्या - अडचे कोभुजज्याला,

पुनः

५ बके • केम = डके • केघ, ह्मणजे (अब ची कोभुजज्या - अड ची कोभुजज्या) × (अबची कोभुजज्या + अडची कोभुजज्या) = (अड ची भुजज्या - अब ची भुजज्या) × (अड ची भुजज्या + अब ची भु०)

वरचे चार प्रमाणांस समीकरणाचें रूप देउन आणि त्रिज्या १ करून हे पुढील दोन प्रकारचे साधारण समीकरण को ष्टक उत्पन्न होतात

प्रथम प्रकार

प्रथम प्रकार

अक = अघे, कब = बघे; तर अड = अ + ब, अय = अ − ब;

(१) (अ + ब) ची भु० + (अ − ब) ची भु० = अची २ भु० × बचे कोभु०

(२) (अ + ब) ची भु० − (अ − ब) ची भु० = अची २ कोभु० × बचे भु०

(३) (अ − ब) चीकोभु० + (अ + ब) चीकोभु० = अची २ कोभु० × बचे कोभु०

(४) (अ − ब) चीकोभु० − (अ + ब) चीकोभु० = अची २ भु० × बचे भु०

दुसरा प्रकार

अड = अघे, अब = ब; तर अक = $\frac{१}{२}$ (अ + ब), बक = $\frac{१}{२}$ (अ − ब)

(५) अचीभु० + बचीभु० = $\frac{१}{२}$ (अ + ब) ची २ भु० × $\frac{१}{२}$ (अ − ब) ची कोभु०

(६) अचीभु० − बचीभु० = $\frac{१}{२}$ (अ + ब) ची २ कोभु० × $\frac{१}{२}$ (अ − ब) चीभु०

(७) बचीकोभु० + अचीकोभु० = $\frac{१}{२}$ (अ + ब) ची २ कोभु० × $\frac{१}{२}$ (अ − ब) चीकोभु०

(८) बचीकोभु० − अचीकोभु० = $\frac{१}{२}$ (अ + ब) ची २ भु० × $\frac{१}{२}$ (अ − ब) चीभु०

यांत प्रथम प्रकाराचा उपयोग हा आहे कीं भुजज्याचे गुणाकाराची किमत दुसर्ये बाजूंत सरळ भुजज्यांत निघते.

आणि दुसर्ये प्रकाराचा उपयोग हा आहे कीं गुणाकाराची बदली भुजज्यांची बेरीज अथवा वजाबाकी कामांत घेतां यत्ये.

आतां प्रथम आणि दुसरें या समीकरणांची बेरीज आणि वजाबाकी घेउन तसें तिसरें आणि चौथें यांची बेरीज आणि वजाबाकी घेउन आणि भुजज्याचे = स्पर्शरेषेची कोभुजज्या हे पक्केपणें स्मरणांत ठेउन हीं समीकरणें उत्पन्न होतात.

तिसरा प्रकार

तिसरा प्रकार

(९) (अ+ब) चीभु॰ = अचीभु॰ × बचीकोभु॰ + बचीभु॰ × अचेकोभु॰

= अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ × (अचीस्पर्शरेघ + बचीस्पर्शरेघ)

(१०) (अ-ब) चीभु॰ = अचीभु॰ × बचीकोभु॰ − बचीभु॰ × अचेकोभु॰

= अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ × (अचीस्पर्श॰ × बचीस्पर्श॰)

(११) (अ+ब) चीकोभु॰ = अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ − अचीभु॰ × बचीभु॰

= अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ × (१ − अचीस्पर्श॰ × बचेस्पर्श॰)

(१२) (अ-ब) चीकोभु॰ = अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ + अचीभु॰ × बचीभु॰

= अचीकोभु॰ × बचीकोभु॰ × (१ + अचीस्पर्श॰ × बचीस्पर्श॰)

जर अ=ब केलानर दुपट कोसांचा भुजज्या आणि कोभुजज्या यांचा किमती पूर्व समीकरणां पासून स्वस्थानें निघतील, पुनः यांतील नववें समीकरण अकराव्यानें भागून आणि दाहावें बाराव्यानें भागून तर अ+ब आणि अ-ब यांचे स्पर्शरेघांचा किमती दाखवायास समीकरणें उत्पन्न होतात. जसें

चौथा प्रकार

(१३) २ अचीभु॰ = अची २ भु॰ × अचेकोभु॰ = अची २ कोभु॰^{2} × अचे स्पर्श॰

(१४) २ अचीकोभु॰ = अचीकोभु॰^{2} − अचीभु॰^{2} = अचीकोभु॰^{2} (१ − अचीस्पर्श॰)

(१५) (अ+ब) ची $\frac{\text{भु॰}}{\text{कोभु॰}}$ = (अ+ब) चीस्पर्श॰ = $\frac{\text{अचीस्पर्श॰ + बचीस्पर्श॰}}{\text{१ − अचीस्प॰ × बचीस्पर्श॰}}$

(१६) (अ-ब) ची $\frac{\text{भु॰}}{\text{कोभु॰}}$ = (अ-ब) चीस्पर्श॰ = $\frac{\text{अचीस्पर्श॰ − बचीस्पर्श॰}}{\text{१ + अचीस्प॰ × बचीस्पर्श॰}}$

(१७) २अचीस्पर्श॰ = $\frac{\text{अची २ स्पर्श॰}}{\text{१ − अचीस्प}^{२}}$

(१८) २अचीकोस्पर्श॰ = $\frac{\text{१ − अचीस्पर्शरेघ}^{२}}{\text{अची २ स्पर्शरेघ}}$

दुसरे प्रकारांत

½ (अ + ब) चे भुजज्याचे स्थळीं ½ (अ + ब) ची कोभुजज्या × ½ (अ + ब) ची स्पर्शरेघ हें ठेवून आणि ½ (अ − ब) ची भुजज्याचे स्थळीं ½ (अ − ब) ची कोभुजज्या × ½ (अ − ब) ची स्पर्शरेघ हें ठेवून तर हीं समीकरणें उत्पन्न होतात.

पांचवा प्रकार

(१९) बची कोभु॰ + अची कोभु॰ = ½ (अ + ब) ची २ कोभु॰ × ½ (अ − ब) ची कोभुजज्या, पाहा ७ वें समीकरण.

(२०) बची कोभु॰ − अची कोभु॰ = ½ (अ + ब) ची स्पर्श॰ × ½ (अ − ब) ची स्पर्शरेघ × ½ (अ + ब) ची २ कोभु॰ × ½ (अ − ब) ची कोभु॰ = ½ (अ + ब) ची स्पर्श॰ × ½ (अ − ब) चीस्पर्शरेघ × (बचीकोभु॰ + अचीकोभु॰)

(२१) अचीभु॰ + बचीभु॰ = ½ (अ + ब) ची स्पर्श॰ × ½ (अ + ब) ची २ कोभु॰ × ½ (अ − ब) ची कोभु॰ = ½ (अ + ब) चीस्पर्शरेघ × (अची कोभु॰ + बची कोभु॰)

(२२) अचीभु॰ − बचीभु॰ = ½ (अ − ब) ची स्पर्श॰ × ½ (अ + ब) ची २ कोभु॰ × ½ (अ − ब) ची कोभु॰ = ½ (अ − ब) ची स्पर्श॰ × (अची कोभु॰ + बची कोभु॰)

(२३) $\frac{\text{अचीभु॰ + बचीभु॰}}{\text{अचीभु॰ -- बचीभु॰}} = \frac{\text{½ (अ+ब) ची स्पर्श॰}}{\text{½ (अ-ब) चीस्पर्श॰}}$ हें २१ आणि २२ या समीकरणापासून उत्पन्न जालें.

(२४) $\frac{\text{अचीभु॰ + बचीभु॰}}{\text{अचीकोभु॰ + बचीकोभु॰}}$ = ½ (अ + ब) चीस्पर्शरेघ, हे २१ व्ये समीकरणापासून उत्पन्नजालें.

(२५) $\frac{\text{अची भु॰ — बची भु॰}}{\text{अचीकोभु॰ + बची कोभु॰}}$ = ½ (अ - ब) ची स्पर्शरेघ, हें २२ व्ये समीकरणापासून उत्पन्नजालें

उदाहरणें.

प्रथम, सिद्धकर कीं कोणत्येही सरळरेघ काटकोन त्रिकोणांत हे पुढील गुण निश्चय आहेत.

(१) $\frac{\text{लंब}}{\text{पाया}}$ = पायाकडील कोनाची स्पर्शरेघ आहे.

(२) $\frac{\text{पाया}}{\text{लंब}}$ = शिरकोनाची स्पर्शरेघ आहे.

(३) $\frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}}$ = पायाकडील कोनाची भुजज्या आहे.

(४) $\frac{\text{पाया}}{\text{कर्ण}}$ = शिरकोनाची भुजज्या आहे

(५) $\frac{\text{कर्ण}}{\text{पाया}}$ = पायाकडील कोनाची छेदनरेघ आहे.

(६) $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$ = शिरकोनाची छेदनरेघ आहे.

दुसरें, सिद्धकर कीं अची छेदनरेघ = (४५° + ½ अ) ची स्पर्शरेघ आहे.

तिसरें, सिद्ध करकीं २ अची छेदनरेघ = $\frac{१ + \text{अचीस्पर्श}^{२}}{१ - \text{अचीस्पर्श}^{२}}$ आणि २ अ-ची कोभुजज्या = $\frac{१ + \text{अचीस्पर्श}^{२}}{\text{अची २ स्पर्श}}$ = $\frac{\text{अची छेदनरेघ}^{२}}{\text{अची २ स्पर्शरेघ}}$

चौथें, अक्षय = $\text{बप}^{२} + \text{डक्ष}^{२}$ यांतून क्ष आणि य ह्या कोणत्येही कोसा-चा भुजज्या आणि कोभुजज्या काढायाचा·

पांचवें, हें सिद्ध करकीं कोणत्येही कोसाचा $\text{स्पर्शरेघ}^{२} - \text{भुजज्या}^{२} = \text{स्पर्शरेघ}^{२} \times \text{भुजज्या}^{२}$·

साहावें, हें सिद्ध करकीं जर कोणत्येही कोसाची स्पर्शरेघ = $\sqrt{न}$ तर त्याच कोसाची भुजज्या = $\sqrt{\frac{न}{न+१}}$

उंचीची आणि लांबीचीं

पुढें उदाहरणें तीं मागील सिद्धांत रीतीनें होतात·

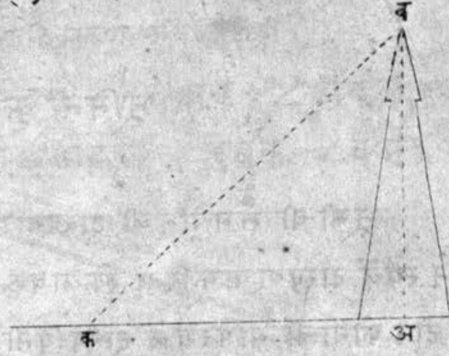
उदाहरणें

प्रथम, एक मनोरा आहे, ज्याची उंची वर चढून कोणीही मोजूं सकत नाहीं, त्याचे पायापासून एक सरळ समरेघ २०० फुट मोजून तेथून शिरापर्यंत कर्ण आणि पाया यांचे आंतील कोन मापिला तो ४७°··३०′ आला यापासून त्या मनोर्याची लंबोंची काय निघत्ये ती सांग·

भूमिती कृत्य रीतीनें

एक सरळरेघ कर आणि तिजवर रेघस्केलावरून· अक २०० फुट

बाजू कर· या रेघेचे अ शेवटापासून वर एक अब लंब चढीव; नंतर कब रेघकर, अशी कीं, ∠क ४७°··३०′ होईल, म्हणजे त्या मनोर्याची लंबोंची कळेल· अब बाजूचें माप त्या रेघस्केलावरून २१८ $\frac{२}{६}$ फुट आहे·



गणित रीतीनें

जशी त्रिज्या	लाग	१०·००००००
अक २०० फुट बाजूस होत्ये·		२·३०१०३०
तशी ∠क ४७°··३०′ याची स्पर्शरेघ·		१०·०३७९४८
अब २१८·२६ फुट बाजूस होईल·		२·३३८९७८

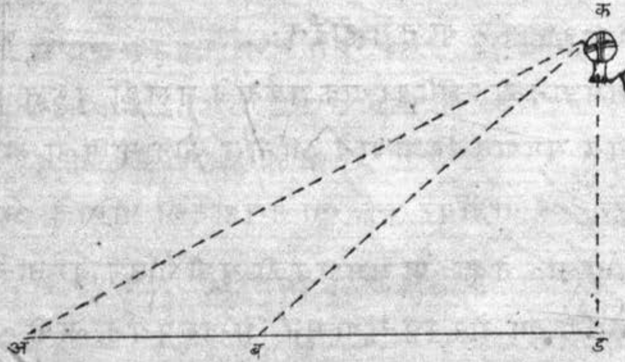
दुसरें, समपातळी भूमीवर एक पर्वताचे मस्तकीं बुरुज आहे· त्या पर्वताचे पायाजवळ समपातळी पायाचे आंतील कोन मापिला तो ६४° अंश आला तेथून बाहेर ८८० यार्डावर पुनः त्या समपातळी पायाचे आंतील कोन मापिला तो ३५° आला, तेव्हां त्या समपातळी भूमीपासून बुरुजाचे शिखर पर्यंत लंबोंची आणि त्या दोन स्थळांपासून शिखर पर्यंत लांबी काय आहे ती सांग

भूमिती कृत्य रीतीनें

भूमिती कृत्य रीतीनें

भूमीची समपातळी दाखवायाकरितां एक सरळरेघ कर, त्या रेघेवर दोन स्थळें दाखवायाकरितां स्केलावरून ८८० यार्डांवर अ आणि ब चिन्हें कर, हीं दोन कोनांचीं मापस्थळें दाखवितील; आतां अ चिन्हावर २५° चा ∠ अ कर; नंतर ब चिन्हावर ६४° चा ∠ ब कर; आतां या दोन कोनरेघा जेथे मिळतील तें बुरुजाचे शिखराचें स्थळ होईल; तेथुन पाया सरळ रेघेवर लंब उतार, म्हणजे ती लांबी आणि उंची कळेल; म्हणून स्केलावरून मापितां

अक १६२१ बक १०४१ आणि डक ९२६



	१८०°	यांतून	आदिकारण भूमिति रीतीनें
∠डबक	६४	वजा करून	∠डबक = ∠बअक + ∠अकब आहे.
∠अबक	११६	बाकी आहे	तेव्हां ∠अकब = ∠डबक − ∠बअक आहे.
∠अबक	११६		= ६४° − ३५° = २९°
∠बअक	३५		
	१५१	बेरीज	
	१८०		
∠अकब	२९	बाकी	

तेव्हां अबक त्रिकोणांत

जशी ∠अकब २९° याची भुजज्या	लाग	९·६८५५७१
त्याचे समोरचे अब ८८० यार्ड बाजूस होत्ये		२·९४४४८३
तशी ∠बअक ३५° याची भुजज्या		९·७५८५९१
त्याचे समोरचे बक १०४१·१२५ बाजूस होईल		३·०१७५०३

जशी ∠अकब २९° याची भुजज्या	९·६८५५७१
त्याचे समोरचे अब ८८० या बाजूस होत्ये	२·९४४४८३
तशी ∠अबक ११६° अथवा ६४° याची भुजज्या	९·९५३६६०
त्याचे समोरचे अक १६३१·४४२ बांजूस होईल	३·२१२५७२

आणि

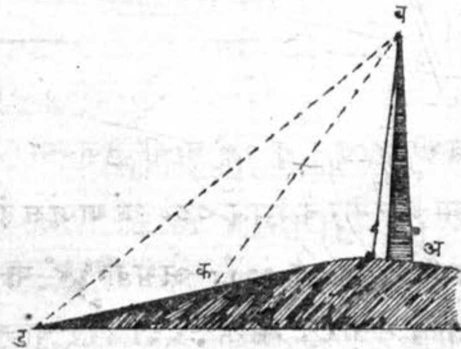
आणि ब क ड त्रिकोणांत

जशी ∠ड ९०° याची भुजज्या	१०·००००००
त्याचे समोरचे बक १०४१·१२५ बाजूस होत्ये	३·०१७५०३
तशी ∠कबड ६४° याची भुजज्या	९·९५३६६०
त्याचे समोरचे कड ९३५·७५७ या बाजूस होईल . . .	२·९७११६३

तिसरें, एक डोंगरावर मनोरा आहे त्याची उंची मोजावया करितां त्यापासून ४० फुट त्या डोंगराचे पाखरेवर यंत्रानें पाखरेसंगातीं एक कोन मापिला तो ४१° आला, तेथुन पुढें ६० फुटींवर पाखरे संगाती दुसरा कोन मापिला तो २३° · ४५ आला, तेव्हां मनोर्याची उंची किती आहे तीं सांग·

भूमिती कृत्य रीतीनें·

डोंगराची पाखर दाखवा याकरितां एक तिर्कस रेघ कर, तीजवर मनोर्याचापाया दाखवाव या करितां अ कर, नंतर स्केलावरून अंक ४० फुट बाजू कर, तेथुन कड ६० फुट बाजू कर; नंतर ∠क ४१° कर, पुढें ड स्थळावर ∠ड २३° · ४५ कर· नंतर या दोन कोनरेघा परस्पर छेदीतील



नें

तें ब स्थळ होईल. आतां स्केलावरून अब मनोऱ्याची उंची कळेल.

गणित रीतीनें

∠क ४१° . . ०० यांतून

∠ड २३ . . ४५ हे वजा करून

∠डबक १७ . . १५ बाकी

डबक त्रिकोणांत

जशी ∠डबक १७° . . १५ याची भुजज्या . . लाग ९.४७२०८६

त्याचे समोरचे ६० फुट बाजूस होत्ये १.७७८१५१

तशी ∠ड २३° . . ४५ याची भुजज्या ९.६०५०३२

त्याचे समोरचे बक ८१.४८८ यास होईल १.९११०९७

अबक त्रिकोणांत

जशी अक, कब, यांची बेरीज १२१.४८८ लाग २.०८४५३३

अक, कब, यांचे वजाबाकीस होत्ये ४१.४८८ . . . . १.६१७९२३

तशी ∠अ, ∠ब, यांची अर्धबेरीज ६९° . . ३० स्पर्शरेघ १०.४२७२६२

त्यांचे अर्धवजाबाकीचे स्पर्शरेघेस ४२° . . २४$\frac{१}{२}$ होईल ९.७६०६५२

यांची वजाबाकी ∠अबक २७ . . ५$\frac{१}{२}$

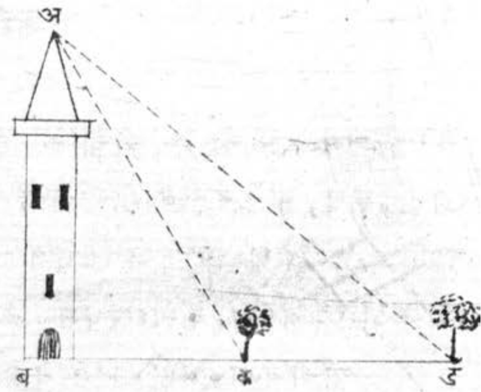
शेवटील

शेवटील जशी ∠ अबक	२७° ५′ $\frac{१}{२}$	याची भुजज्या	लाग	९.६५८२८४
त्याचे समोरचे अक	४०	याबाजूस होत्ये		१.६०२०६०
तशी ∠ क	४१°	याची भुजज्या		९.८१६९४३
त्याचे समोरचे अब	५७.६२२	याबाजूस होईल		१.७६०७१९

चौथें उदाहरण

अतिदुर्गमस्थळीं दोन झाडें आहेत, त्यांत अंतर भूमि किति ती कळाची ह्मणोन त्यां खालचे समपातळीवर त्यांशीं समरेषेंत एक बुरूज १२० फुट लंबोंचीचा आहे त्याचे लंब शिरावर यंत्रानें झाडां खालची समपातळी लक्षून लंबाशीं दोन कोन मापिले, त्यांत प्रथम कोन ६४° $\frac{१}{२}$ आणि दुसरा ३२ आला तेव्हां त्या दोन झाडांमध्यें अंतरभूमि किती आहे सांग.

भूमिती कृत्य रीतीनें



भूमीची समपातळी दाखवाया करितां एक बुड सरळरेघ कर. तिजवर स्केलावरून बराबर १२० यार्ड बुरजाची उंची दाखवाया करितां अब लंब कर, नंतर ∠ बअक ३२° कर, आणि ∠ बअड ६४° $\frac{१}{२}$ कर, त्या दोन कोन रेघा त्या समपातळीस जेथे छेदितील ती त्या झाडांचीं क, ड स्थळें आलीं

नंतर

नंतर स्केलावरून त्यांचे मधील अंतर भूमि किती आहे ती कळेल·

गणित रीतीनें

प्रथम अबक काटकोन त्रिकोणांत·

जशी त्रिज्या · · · · · · · लाग १०·०००००००

अब १२० या बाजूस होत्ये · · · · · · · २·०७९१८१

तशी ∠बअक ३३° याची स्पर्शरेघ · · · · · ९·८१२५१७

त्याचे समोरचे बक ७७·९२९ याबाजूस होईल · · · · १·८९१६९८

आतां बअड काटकोन त्रिकोणांत·

जशी त्रिज्या · · · · · · · · · १०·०००००००

अब १२० या बाजूस होत्ये · · · · · · · २·०७९१८१

तशी ∠बअड ६४° १/२ याची स्पर्शरेघ · · · · · १०·३२१५०४

त्याचे समोरचे बड २५१·५८५ या बाजूस होईल · · · · २·४००६८५

बाजू खंड बक ७७·९२९ वजाकरून

बाकी १७३·६५६ कड झाडांची अंतर भूमी·

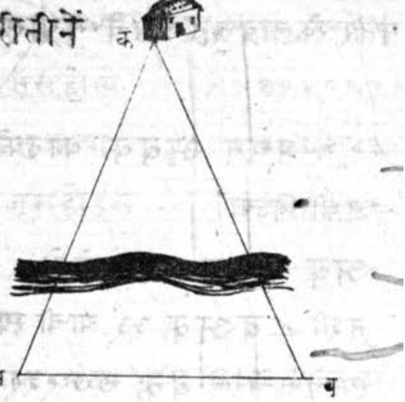
पांचवें उदाहरण·

दुस्तर नदीचे परतीरीं एक घर आहे तें नदीचा आलीकडील तीरापासून किती लांब आहे तें कळावें, तेव्हां त्या नदीअलीकडे एक सरळरेघ २०० यार्ड करून तीचे दोन शेवटांवर यंत्रानें घराचें मध्यस्थळ लक्षून दोन कोन मापिलें, त्यांत एक ६८° · · २ आणि दुसरा ७३° · · १५ आला, तेव्हां दोन शेवटांपासून तें घर किती लांब आहे तें सांग·

भुमिती

भूमिनीकृत्य रीतीनें





स्केलावरून अब २०० यार्ड सरळ रेघ कर, नंतर अक रेघकर, अशी कीं ∠अ ६८°..२′ होईल, मग बक रेघ कर, अशीकीं ∠ब ७३°..१५′ होईल, या दोन रेघांचा छेदनबिंदु घराचा मध्य कस्थळ होईल. आतां दोन शेवटांपासून तें घर किती लांब आहे तें स्केलावरून कळेल.

गणितरीतीनें

∠अ ६८°..२′
∠ब ७३..१५
बेरीज १४१..१७
यांतून १८०..० वजाकरून.
∠क ३८..४३ बाकी.

जशी ∠क ३८°..४३′	याची भुजज्या	लाग	९.७९६२०६
त्याचे समोरचे अब २००	या बाजूस होत्ये		२.३०१०३०
तशी ∠अ ६८°..२′	याची भुजज्या		९.९६७२६८
त्याचेसमोरचे बक	२९६.५४ या बाजूस होईल		२.४७२०९२
जशी ∠क ३८°..४३′	याची भुजज्या		९.७९६२०६
त्याचेसमोरचे अब २००	या बाजूस होत्ये		२.३०१०३०
तशी ∠ब ७३°..१५′	याची भुजज्या		९.९८०१७१
त्याचे समोरचे अक	२०६.१९ या बाजूस होईल		२.४८५९९५

साहावें, एक किल्याचे बाहेर ३६ फुट रुंदीचा चर आहे, याजकरितां चराचे बाहेरील कांठावर समोर किल्याचे भिंतीचें शिखर लक्षून कोन मापला तो ६२°·· ४०' आला तेव्हां त्या भिंतीची उंची किती आहे आणि चराचे बाहेरून किल्यावर चढणें तर शिडी किती लांब असावी तें सांग

उत्तर { भिंतीची उंची ६९·६४ फुट
शिडीची लांबी ७८·४ फुट }

सातवें, एक भिंत अथवा कांहीं आहे त्यास मूळापासून २३ फुट १० इंचाचा टेंकु लागला पाहिजे आणि त्या भिंतमूळापासून ११ फुट जागा सोडून टेंकू रोवणें आहे तेव्हां तो टेंकू किती फुट लांब असावा तो सांग·

फु इं
उत्तर २६··३

आठवें, एक शहराचे राजमार्गांत ४० फुट लांबीची शिडी नेत होते ती रस्त्यांत उभी केली आणि उजव्ये कडील हवेलीशीं टेंकिली ती भूमीपासून ३३ फुटींवर खिडकीस लागली, तशी तेथुनच डाव्ये कडील हवेलीशीं टेंकिली ती २१ फुटींवर लागली तेव्हां तो राजमार्ग किती फुट रुंद आहे तो सांग·

उत्तर ५६·६४९ फुट

नववें, एक स्थळीं समभूमीवर ताडाचें झाड होतें तें वार्यानें मोडून त्याचें शेवट मूळापासून १५ फुटवर लागलें तो मोडल्यापासून तुकडा ३९ फुट लांब होता तेव्हां मोडल्यापूर्वी तें झाड मूळापासून शेंड्यापर्यंत

किती

किती लांब होतें तें सांग.

उत्तर ७५ फुट

दाहावें, सपाट भूमीवर एक बुरुज आहे, त्याचे पायापासून १७० फुट सरळरेषेवर त्या बुरुजाचे शिखराशीं कोन मापिला तो ५२° ३०′ झाला तेव्हां त्या भूमीपासून बुरुजाची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर २२१.५५ फुट

अकरावें, समुद्राचे किनार्यावर १४३ फुट उंचीचा एक बुरुज आहे. आणि समुद्रांत एक गलबत नांगरलें होतें, त्या गलबताचे खालचे बाजूपासून शिखराशीं कोन मापिला तो ३५° झाला, तेव्हां त्या बुरुजाचे पायापासून तें गलबत किती फुट लांबीवर आहे तें सांग.

उत्तर २०४.२२ फुट.

बारावें, सपाट भूमीवर एक डोंगर आहे, त्याचे पायाजवळ शिखराशीं कोन मापिला तो ४६° झाला तेथून २०० यार्डांवर दुसरा कोन मापिला तो ३१° झाला तेव्हां त्या भूमीपासून डोंगराची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर २८६.२८ यार्ड

तेरावें, एक दुर्गम ठिकाणी बुरूज आहे तेथे पराकाष्ठा करून आवलें ते ठिकाणीं त्या बुरुजाचे शिखराशीं कोन मापिला तो ५८° झाला, तेथुन ३०० फुट समरेषेनें मागें येउन दुसरा कोन मापिला, तो ३२° झाला; तेव्हां त्या बुरुजाची उंची किती व प्रथम कोन मापिला तें ठिकाण बुरु-

जा

जा पासून किती लांब तें सांग.

उत्तर { उंची ३०७·५३ फुट
लांबी १९२·१५ फुट }

चौदावें, समपातळी भूमीवरील दुर्गम डोंगरावर एक मनोरा आहे, त्याची उंची कळावी ह्मणोन त्या पातळीवर मनोऱ्याचे शिखराशीं कोन मापिला तो ५१° आला, आणि त्या मनोऱ्याचे पायाशीं मापिला तो ४०° आला, तेथुन मागें २०० फुटींवर शिखराशीं कोन मापिला तो ३३° · ४५′ आला तेव्हां त्या मनोऱ्याची उंची किती आहे ती सांग.

उत्तर ९३·३३१४८ फुट.

पंधरावें, एक घर आहे त्याचे पायावरील खिडकीचे खालचे बाजूशीं समरेघ पाया असा एक मनोरा आहे. तेव्हां कोणीं त्या खिडकींतून त्याचे शिखराशीं कोन मापला तो ४०° आला, तेथुन १८ फुट उंच दुसरे मजल्यावरील खिडकींतून शिखराशींच कोन मापिला तो ३७° · ३०′ आला, तेव्हां तो मनोरा उंच किती व खिडकीपासून लांब किती तो सांग.

उत्तर { उंच २१०·४४
लांब २५०·७९ } फुट

सोळावें, एक दुर्गम नदीचें परतीरीं दीपमाळ आहे; तीचे अलीकडील तीरीं दीपमाळेचे पायाशीं समरेघ स्थळीं निशाण्या केलें, तेथून मागें चढत्ये घाटावर २६४ फुट मोजून तेथून पाहिले तो दीपमाळेचे शिखर समरेघेखालीं आहे. तेव्हां त्या समरेघेशीं निशाणाकडे उतरता कोन मापला तो

४२°

४२° आला: आणि तेथुनच्च दीपमाळेचे पायाकडे मापिला तो २७° आला, आणि शिखराकडे मापिला तो १९° आला, तेव्हां त्या दीपमाळेची उंची आणि आणि निशाणापासून लांबी किती आहे ती सांग.

उत्तर { उंची ५७·२६ / लांबी १५०·५ } फुट

सतरावें, विलायतेकडे टनरीफ द्वीपांत पृथ्वीचे परिघ पातळी पासून २·५ मैल लंबोंचीचा एक पर्वत आहे. त्याचे शिखरावरून गोलपृथ्वीचे परिघ पातळीवर दृष्टी पावल्ये तें स्थळ लक्षून कोन मापिला तो ८७° ·· ५८ आला, तेव्हां शिखरापासून दृष्टिपावली तें लक्ष्य लांब किती आणि गोलपृथ्वीचा व्यास किती आहे तें सांग

उत्तर { लांब १४०·८७६ / व्यास ७९३६ } मैल

अठरावें, समुद्रकांठीं एक किल्ला आहे तो फोडावा या संकेतानें दोन स्रोटीं गलबतें समोर येउन किल्याजवळ पुढें पाणी उथळ असेल या भेयानें ओंड पाण्यांत राहिलीं. तेथून गोळे लागू होतील किंवा नाहीं हा विचार ठरवायाकरितां दोनीं गलबतें पावमैल अथवा ४४० यार्डाचें मध्यें अंतर ठेवून दोहोंकडे आलीं. आणि तेथून समरेषेंत एक गलबत आणि किल्ला लक्षून परस्परानीं दोन अंतरकोन मापिले, त्यांत एक ८३° ·· ४५ आणि दुसरा ८५° ·· १५ आला, तेव्हां एक एक गलबतापासून किल्ला किती लांब आहे तो सांग.

उत्तर

उत्तर { २२९२·२६ यार्ड
२२९८·०५ यार्ड

एकुणिसावें, नदीचे एके तीरीं उभा राहून दुसरे तीरीं घर आहे, तें एथून किती लांब असेल तें कळावें या विचारानें ४०० यार्ड एक समरेघ मापून तीचे दोन शेवटांवर एक शेवट आणि तें घर लक्षून दोन अंतरकोन मापिले त्यांत एक ७३° · · १५′ आणि दुसरा ६८° · · २′ झाला, तेव्हां एक एक शेवटापासून तें घर किती लांब आहे तें सांग·

उत्तर { ५९३·८८ यार्ड
६१२·३८ यार्ड

विसावें, एक नदीची लंबरुंदी किती आहे ती कळावी या बुद्धीनें एक तीरीं पाण्यासंनिध ५०० यार्ड समरेघ मोजून तिचे शेवटांवर एक शेवट आणि परतीरीं झाड आहे तें ऐशीं लक्षून दोन अंतर कोन मापिले त्यांत एक ५३° झाला, आणि दुसरा ७९° · · १२′ झाला, तेव्हां नदीची लंबरुंदी किती आहे ती सांग·

उत्तर ५२९·४८ यार्ड

एकविसावें, भूमीचे दोन सोंडे समुद्रांत गेले आहेत, त्यांचे शेवटांवर मनोरे आहेत, त्यांचेमध्यें अंतर किती आहे तें कळावें ह्मणोन भूमीवर एक दीपमाळ आहे तेथून त्या मनोर्‍यांपर्यंत समरेघा मोजिल्या, त्यांत एक ७३५ यार्ड आणि दुसरी ८४० व दीपमाळे जवळ दोनी मनोरे लक्षून कोन मापिला तो ५५° · · ४०′ झाला, तेव्हां त्या दोन मनोर्‍यांमध्यें

अंतर

अंतर किती आहे तें सांग.

उत्तर ७४१.२ यार्ड

बाविसावें, एक नदीचे तीरीं कोणी उभा राहून परतीरीं एक मनोरा व झाड आहे, त्या दोहोंमध्यें अंतर किती तें कळावें ह्मणोन त्याणें त्या तीरीं ६०० यार्ड समरेघ मापून त्या रेघेचे दोन शेवटांवर प्रत्येकीं मनोरा व झाड लक्षून दोन दोन कोन मापिले, ते ५३° .. ३० आणि ९८° .. ४५ आणि ५८° .. २० व ९५° .. २० आले. तेव्हां मनोरा व झाड यांचे मध्यें अंतर किती आहे तें सांग.

उत्तर ९५९.५८६६ यार्ड

तेविसावें, दुस्तर नदीचे पलीकडे एक झाडँ आहे. तें अलीकडील तीरापासून किती लांब आहे, तें कळावें आणि कोन मापायाचें यंत्र जवळ नाहीं, सांकळमात्र आहे. तेव्हां अलीकडील तीरीं ५०० यार्ड अब रेघ मापून शून्याचे समरेघेंत अ शेवटावरून पुढें १०० यार्ड अक रेघ केली. तशीच शून्याचे समरेघेंत ब शेवटावरून पुढें १०० यार्ड बड रेघ केली नंतर अड कर्णरेघ ५५० आणि बक ५६० आहे, तेव्हां अ ब या शेवटांपासून शून्य ह्मणजे झाड किती यार्ड लांब आहे तें सांग.

उत्तर { अ ५३६.२५ यार्ड
ब ५००.०९ यार्ड

चोविसावें, कोणी एक किल्याभोंवता फौजेचा वेढा पडला, आणि किल्यांतील सर्वोत्कृष्ट तीन लक्ष्यें अ, ब, क, त्यांत अ, क

लक्ष्यांचे

लक्ष्यांचे अलीकडे ब लक्ष्य स, चे समोर आहे, त्या तिहींची लांबी अब २६६$\frac{१}{४}$ बक ३२७ $\frac{१}{२}$ अक ५३० याप्रमाणें फौजवाल्यास कि-ल्याचे पूर्व नकाशावरून ठाउक आहेत; आणि जेथें मोर्चा करणार तेंस्थ-ळ स; त्यापासून अ, ब, क, हीं लक्ष्यें किती दूर आहेत तीं कळावीं ह्मणोन स, पासून दोन समकोन मापिले, त्यांत ∠असब १२° .. ३०′ आणि ∠बसक २९° .. ५०′ आला, तेव्हां तीं लक्ष्यें तेथून किती लां-ब आहेत तीं सांग.

उत्तर { मअ ७५७·१४ ; सब ५३७·१० ; सक ६५५·३०

पंचविसावें, हें उदाहरण पूर्वीं सारिखेंच आहे, परंतु यांत विशे-ष इतकाच आहेकीं अक बाजू स चे समोर आणि त्याचे पलीकडे ब लक्ष्य त्या बाजूचे सुमारें मध्य समोर आहे, आणि अक ८०० अब ६०० बक ४०० आणि ∠असब ३३° .. ४५′ ∠बसक २२° .. ३०′ तेव्हां स पासून अ, ब, क, किती किती लांब आहेत तें सांग.

उत्तर { सअ ७०९ $\frac{१}{३}$; सब १०४२ $\frac{२}{३}$; सक ९३४

PART VI.

MENSURATION.

CONTENTS.

साहावा भाग

भूमापन

अनुक्रमणिका

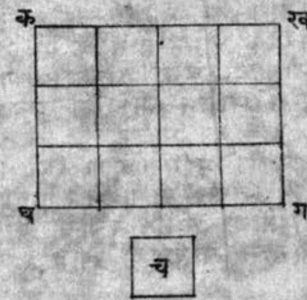
श्री

क्षेत्रफळ

सपाटीचें अथवा पातळीचें क्षेत्रफळ ह्मणजे मर्यादेचे आंत जाडीशिवाय समकोष्टक्षेत्राचे केवळ पातळीचेंच जें मानआहे त्यास पातळीचें क्षेत्रफळ ह्मणतात

या सरळपातळीचे मानाचीरीति ही आहेकि त्या क्षेत्रांत लाहानलाहान चौरस कोष्टक आहेत जांची लांबी व रुंदी एकएक इंच अथवा एकएक फुट किंवा एकएक यार्ड आहे त्या सर्वकोष्टकांचे मानाची जी एकंदर बेरीज आहे तें क्षेत्रफळ होय

लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू जर एक इंच आहे तर त्या समकोष्ट क्षेत्रांत जितके लाहान चौरस कोष्टक आहेत तितके चौरस इंच त्या पातळीचें क्षेत्रफळ जालें जर लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू एकफुट आहे तर तितक्या चौरस फुट जाल्या जर लाहान चौरस कोष्टकाची बाजू एक यार्ड आहे तर तितके चौरस यार्ड जाले



आतां मनांत आणकि कखगघ या काटकोन चौकोनाचें क्षेत्रफळ करणें आहें त्याचे खालीं लाहान चौरस आहे

हें

हें त्या मोठे काटकोन चौकोनांत जितके वेळ जातें तितकें क्षेत्रफळ आहे याजागेवर १२ वेळ जातें लाहान चौरसाची बाजू १ इंच आहे तेव्हां या काटकोन चौकोनाचें क्षेत्रफळ १२ चौरस इंच जालें एक फुट आहेतर १२ चौरस फुट जाल्या एक यार्ड आहेतर १२ चौरस यार्ड जाले

प्रथम कृत्य

समांतर रेघ चौकोन क्षेत्राचें क्षेत्रफळ करायाचें चौरस अथवा काटकोन चौकोन किंवा रांबस किंबा रांबायद असेल

समांतर रेघ चौकोनाची लांबी व लंबोंची असेलतां परस्पर गुणून जो गुणाकार येईल तो त्या समांतररेघ चौकोनांचें क्षेत्रफळ जालें ※

※ या रीतीची सत्यता भूमितीचे ८१ सिद्धांताचे दुसर्ये कुरलरी वरून कळत्ये ही सत्यता दुसर्ये रीती वरूनही सिद्ध होत्ये; वर केलेला काटकोन चौकोन सांगीतली आकृती असावी; आणि त्याची लांबी आणि रुंदी कित्येक भागांनीं भागली असावी; ह्मणजे प्रत्येक भाग सांगीतल्ये एकंम भागाचे बरोबर, ह्मणोन या आकृतींत लांबीचे ४ भाग आणि रुंदीचे ३ भाग आहेत; आणि समोरासमोरचीं भागचिन्हें सरळरेघांनीं सांधिलीं असावीं. तेव्हां प्रकट होतेंकिं या रेघा काटकोन चौकोनास कित्येक लाहान लाहान चौरसांनीं भागितात, ते चौरस सांगीतल्ये मापाचे एकंम (च) चौरसाचे बरोबर आहेत; आणि अधीक प्रकट होतेंकिं या लाहान चौरसांची संख्या त्या आकृतीचें क्षेत्रफळ ह्मणजे लांबीचे रेघेंत जितके एकंमचे भाग आहेत त्यांचे आणि रुंदीचे रेघेंत जितके एकंमचे भाग आहेत त्यांचे गुणाकाराचे बरोबर आहे! आणि या आकृतींत एकंमचे भाग ४ × ३ = १२ आहेत

आणि भूमितीचे २५व्ये सिद्धांताचे दुसर्ये कुरलरीवरून निश्चय होतो किं कोणती ही तिर्कस समांतर रेघ चौकोन आकृती एक काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे, जाची लांबी आणि लंबोंची याचे बरोबर आहे याजकरितां ही रीती सर्व समांतर रेघ चौकोनांस साधारण आहे

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम एक समांतररेघ चौकोन आहे ज्याची लांबी १२.२५ आणि लंबोंची ८.५ आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती होईल तें सांग

१२.२५	लांबी
८.५	लंबोंची
६१२५	
९८००	
१०४.१२५	क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसरें एक चौरस आहे त्याची बाजू ३५.२५ आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती होईल तें सांग

उत्तर १२४२.५६२५

तिसरें एक तकता काटकोन चौकोन आहे ज्याची लांबी १२½ फुट व रुंदी ९ इंच आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती फुट होईल तें सांग

उत्तर ९⅜ फुट

चवथें रांबस आकृतीचें एक शेत आहे ज्याची लांबी ६.२ सांकळ आणि लंबोंची ५.४५ सांकळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती होईल तें सांग

	ए	रु	पर्चें
उत्तर	३	१	२०

पांचवें रांबायद आकृति पातळीवर रंग लावावयाचा आहे तिची लांबी ३७ फुट व लंबोंची ५ फुट ३ इंच आहे आणि

रंगणावळ

रंगणावळ चौरस यार्डावर आहे तेव्हां या पातळीचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील तें सांग

उत्तर $२९ \frac{७}{१२}$ चौरस यार्ड

दुसरें कृत्य

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ करायाचें

त्याची प्रथम रीति त्रिकोणाचे पायाची लांबी आणि लंबोंची या दोन्ही परस्पर गुणून जो गुणाकार येईल त्याचें अर्ध करावें तें अर्ध त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ जालें* अथवा लांबी व उंची यांत एकास एकाचे अर्धानें गुणावें जो गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ जालें

उदाहरणें

प्रथम एक त्रिकोण आहे ज्याचे पायाची लांबी ६२५ आणि उंची ५२० आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती होईल

६२५
५२०
१२५००
३१२५
३२५०००
२)३२५०००
१६२५००

६२५
२६०
३७५००
१२५०
१६२५००

३१२५
५२०
६२५००
१५६२५
१६२५०००

हें उत्तर

* या रीतीची सत्यता प्रकट आहे, कारण भूमितीचे २६ व्ये सिद्धांतापासून निश्चय जाला किं कोणताही त्रिकोण एक समांतर बाजू चौकोनाचे अर्धाबरोबर आहे, ज्याचा पाया आणि लंबोंची त्याचे बरोबर आहे

दुसरें

दुसरें   एक त्रिकोणाच्या पाया ४० फुट आणि उंची ३० फुट आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होईल

उत्तर ६६ $\frac{२}{३}$ चौरस यार्ड

तिसरें   एक त्रिकोणाच्या पाया ४९ फुट आणि उंची २५ $\frac{१}{४}$ फुट आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील

उत्तर ६८ $\frac{५३}{७२}$ } चौरस यार्ड
अथवा ६८.७३६१ }

चवथें   एक त्रिकोणाच्या पाया १८ फुट ४ इंच आणि उंची ११ फुट १० इंच आहे त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ किती चौरस फुट होईल

फु. इं.
उत्तर १०८ .. ५ $\frac{२}{३}$

दुसरी रीति,   जेव्हां त्रिकोणाचे दोन बाजूंची लांबी आणि आंतील कोनाचें माप सांगीतलें आहे:

सांगीतल्या दोन बाजू परस्पर गुणून गुणाकाराचें अर्ध घ्यावें: नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या. जशी त्रिज्या : सांगीतल्ये कोनाचे भुजज्यास आहे : : तसा तो अर्धा गुणाकार : त्रिकोणाचे क्षेत्रफळास

अथवा क्षेत्रफळा करितां तो अर्धगुणाकार सांगीतल्ये कोनाचे वास्तवीक भुजज्यानें गुणावा.[*]

---

[*] ह्मणोन अब अक या दोन सांगीतल्या बाजू असाव्या, ज्यांचे आंतला कोन सांगीतला. अबवर कप लंब कर. आतां प्रथम रीती प्रमाणें $\frac{१}{२}$ अब × कप हें त्रिकोणांचें क्षेत्रफळ आहे.

उदाहरणें

प्रथम, त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काय आहे, ज्याचे दोन बाजूंची लांबी ३० आणि ४० आहे, आणि त्यांचे आंतला कोन २८°··५७' ?

वास्तवीक संख्येनें — लाग्रतंमानें

प्रथम १/२ × ४० × ३० = ६००

तर जसा १ : ६०० : : ·४८४०४६ {ही २८°··५७'ची वास्तवीक भुजज्या} लाग ९.६८४८८७

६०० — २.७७८१५१

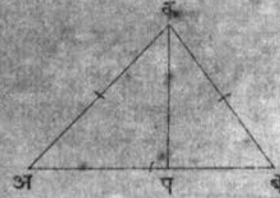
उत्तर २९०.४२७६ हें क्षेत्रफळ; याचा लाग २.४६३०३८

दुसरें त्या त्रिकोणांत किती चौरस यार्ड आहेत, ज्याचा एक कोन ४५° आहे; आणि त्या कोनाचे दोहोंकडील बाजू २५ आणि २१ १/२ फुट आहेत ?

उत्तर २०.८६९४७

तिसरी रीति त्रिकोणाचे सांगीतल्ये तीन बाजूंचे मापांवरून क्षेत्र फळ करायाची तीन बाजूंचे लांबीची बेरीज घ्यावी आणि त्या बेरिजेचे दोन भाग करावे नंतर एक भागांतून तीं तीन बाजूंचीं मापें वेगळालीं वजा करावीं नंतर त्या तीन बाक्या आणि पूर्व बेरिजेचा दुसरा भाग हे अंक

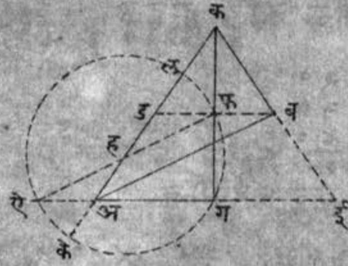
आहे· परंतु त्रिकोणमितीप्रमाणें जशी < पची भुजज्या अथवा त्रिज्या : अक : : < अची भुजज्या : कप, म्हणोन त्रिज्या १ असोन कप = अक × < अचे भुजज्यानें· याजकरितां क्षेत्रफळ १/२ अब × कप = १/२ अब × अक × < अचे भुजज्यानें, जेव्हां त्रिज्या १ आहे अथवा जशी त्रिज्या : < अचे भुजज्या : : १/२ अब × अक : क्षेत्रफळास·



परस्पर

परस्पर गुणून गुणाकाराचें वर्गमूळ करावें तें वर्गमूळ त्या त्रिकोणाचें क्षेत्रफ-ळ होय ※

※ ह्मणोन अबक सांगीतला त्रिकोण असावा. अई बड या समांतर रेघा कर, अशाकीं अक बाजूस ड स्थळावर आणि कब बाजू वाढवून तिला ई स्थळावर मिळतील आणि कड = कब आणि कई = कअ होईल. नंतर कफग रेघ कर अशीकीं डब अई रेघांवर लंब असोन त्यांस फ आणि ग या स्थळांवर दुभागील; आणि फहऐ रेघ बअशीं समांतर कर; अशीकीं अक रेघेस ह स्थळावर मिळेल आणि वाढविल्ये अई रेघेस ऐ स्थळावर मिळेल. आतां शेवटीं ह मध्यकरून फह त्रिज्येनें एक वर्तुळ कर असेंकीं अकरेघ वाढवून तिला के स्थळावर मिळेल, या वर्तुळाच्या परिघ



ग बिंदूचे पार आईल, कारण ग कोन (भू० ५२सि०प्र०) काटकोन आहे, आणि ऐ बिंदूचेही पार आईल, कारण समांतर रेघांचे आश्रयानें अऐ = फब = फड आहे, याजकरितां हड = हअ आणि हफ = हऐ = $\frac{1}{2}$ अब आहे.

यांतून निघतेंकीं हअ अथवा हड हा अक कब या दोन बाजूंचे वजाबाकीचे अर्धा बरोबर आहे; आणि हक = त्याचे बेरिजेचें अर्ध, अथवा = $\frac{1}{2}$ अके + $\frac{1}{2}$ कब; पुनः हके = हऐ = $\frac{1}{2}$ ऐफ अथवा $\frac{1}{2}$ अब; याजकरितां कके = $\frac{1}{2}$ अक + $\frac{1}{2}$ कब + $\frac{1}{2}$ अब ह्मणजे हा अबक त्रिकोणाचे तीन बाजूंचे बेरिजेचे अर्धा बरोबर आहे; अथवा या त्रिकोणाचे तीन बाजूंचे बेरिजेचे स्थळीं स अक्षर चिन्ह घेतलें तर कके = $\frac{1}{2}$ स, पुनः हक = हऐ = $\frac{1}{2}$ ऐफ = $\frac{1}{2}$ अब अथवा केल = अब याजकरितां कल = कके − केल = $\frac{1}{2}$ स − अब आणि अके = कके − कअ = $\frac{1}{2}$ स − अक आणि अल = डके = कके − कड = $\frac{1}{2}$ स − कब

आतां त्रिकोण क्षेत्रफळाचे प्रथम रीती प्रमाणें अग. कग = $\triangle$ अकई आणि अग. फग = $\triangle$ अबई याजकरितां अग. कफ = $\triangle$ अबक, आणि समांतर रेघांचे आश्रयानें अग : कग : : डफ अथवा ऐअ : कफ, याजकरितां अग. कफ = ($\triangle$ अबक) = कग. ऐअ = कग. डफ ह्मणोन अग. कफ. कग. डफ = $\triangle^2$ अबक,

परंतु कग. कफ = कके. कल = $\frac{1}{2}$ स. $\frac{1}{2}$ स − अब, आणि अग. डफ = अके. अल = $\frac{1}{2}$ स − अक. $\frac{1}{2}$ स − बक याजकरितां अग. कफ. कग. डफ = $\triangle^2$ अबक = $\frac{1}{2}$ स. $\frac{1}{2}$ स − अब. $\frac{1}{2}$ स − अक. $\frac{1}{2}$ स − बक, ह्मणजे हा अबक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळाचा वर्ग आहे हें सिद्ध

अथवा या रीतीनें

या कारणा पासून अग. कफ = $\triangle$ अबक आणि कग : अग : : कफ : डफ तेव्हां प्रथम आणि दुसरें या पदांनीं कफला गुणून तसें तिसरें आणि चौथें याणीं अगला गुणून प्रमाण राशी याप्रमाणें होतात, कग. कफ : अग. कफ : : अग. कफ : डफ. अग, अथवा कग. कफ : $\triangle$ अबक : : $\triangle$ अबक : डफ. अग ह्मणोन अबक त्रिकोणाचें

क्षेत्रफळ

उदाहरणें

प्रथम एकत्रिकोणाच्या बाजू २०·३०·४० लांब आहेत त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

```
  २०          ४५            ४५            ४५
  ३०          २०            ३०            ४०
  ४०          ──            ──            ──
  ──          २५ प्र॰ बाकी   १५ दु॰ बाकी     ·५ ति॰ बाकी
२)९०
  ──
  ४५ अर्धबेरीज
```

४५ X २५ X १५ X ५ = ८४३७५ यांचें वर्गमूळ २९०·४७३७ हें क्षेत्रफळ

दुसरें एकत्रिकोणाकृति भिंतीस गिलावा करायाचा आहे जिचा तीनबाजूंची लांबी ३०·४०·५० फुट आहे आणि गिलाव्याची मेहेनत चौरस यार्डांवर आहे तेव्हां या त्रिकोणाकृति भिंतीचें क्षेत्रफळकिती चौरस यार्ड होतील

उत्तर ६६ २/३ चौरस यार्ड

तिसरें एक त्रिकोणाकृति शेताचे तीन बाजूंची लांबी २५६९ ४९०० आणि ५०२५ फुट आहे तेव्हां त्याचें क्षेत्रफळ किति चौरस यार्ड होतील

उत्तर

क्षेत्रफळ कग॰ कफ आणि डफ॰ अग या पदांचें मध्यप्रमाण आहे, अथवा याचे बरोबर किमतीचा १/२ स॰ १/२ स-अब॰ १/२ स-अक॰ १/२ स-बक हें सिद्ध

तिसरें कृत्य

तिसरें कृत्य

त्रापीज्यायदाचें क्षेत्रफळ करायाचें

त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूंचे लंबीची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज त्या बाजूचे मध्यांतर लंबोंचीनें गुणावी जो गुणाकार येईल त्याचें अर्ध त्या त्रापीज्यायदाचें क्षेत्रफळ होईल (भू०२९सि०प्र०)

उदाहरणें

प्रथम एक त्रापीज्यायदाचे दोन समांतर बाजूची लांबी ७५० आणि १२२५ यार्ड आहे तशी अंतर लंबोंची १५४० यार्ड आहे त्याचें क्षेत्रफळ किति चौरस यार्ड आहे तें सांग

```
     १२२५
      ७५०
     १९७५
      ७७०
  १३८२५०
 १३८२५
 १५२०७५० चौरस यार्ड क्षेत्रफळ हें उत्तर
```

दुसरें एक तकत्याची लांबी १२ फुट ६ इंच आणि रुंदी एक बाजूची १५ इंच आणि दुसरी बाजूची ११ इंच आहे तेव्हां त्याचें क्षेत्रफळ किती चौरस फुट जाल्या तें सांग

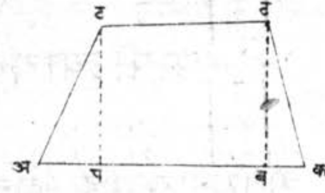
उत्तर १३ $\frac{13}{24}$ चौरस फुट

तिसरें एक चौबाजू शेत आहे त्याची एक बाजू अक आणि

त्या

त्या बाजू वर समोरचे दोन कोनांपासून दोन लंबांची लांबी मोजिली आहे ती खाली लिहिल्या प्रमाणें आहे

अप = ११० फुट.
अब = ७४५ फुट.
अक = १११० फुट.
टप = ३५२ फुट.
ठब = ५९५ फुट.



उतर ४२८६२० चौरस फुट

चवथें कृत्य

त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफळ करायाचें

त्रापीज्यमांत एक कर्णरेष करून त्याचे दोन त्रिकोण करावे नंतर पूर्व रीतीनें दोन त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ करून बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफळ होईल

अथवा या प्रमाणें

कर्णरेषेवर समोरचे दोन कोनांपासून दोन लंब करावे त्या दोन लंबांची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज कर्णरेषेचे लांबीनें गुणावी गुणाकाराचे अर्ध त्या त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफळ होईल

उदाहरणें

प्रथम एक त्रापीज्यमाचे कर्णरेषेची लांबी ४२ समोरचे दोन कोनां

पासून

पासूनचे दोन लंबांची लांबी १६ आणि १८ आहे त्या त्रापीज्यमाचें क्षेत्रफळ काय होईल तें सांग

आतां १६ + १८ = ३४ यांचें अर्ध १७

नंतर ४२ × १७ = ७१४ क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसरें एक त्रापीज्यमाची कर्णरेघ ६५ आणि समोर कोनापासूनचे लंब ५८·३३ हे फुट आहेत त्या त्रापीज्यमाकृति भूमीस फरसबंदी करणें आहे तेव्हां एक दगड एक चौरस यार्ड असे किती दगड लागतील

उत्तर ३३०४१६ $\frac{१}{६}$ चौरस यार्ड

तिसरें एक चोबाजू अवकद क्षेत्र आहे तेथे अडचणीमुळें खालीं लिहिलीं इतकी मात्र मापें मोजितां आलीं बकबाजू २६५ यार्ड दुसरी अदबाजू २२० यार्ड अककर्णरेघ ३७८ यार्ड कर्णावर समोर कोनांपासून दोन लंब लागतात तेथपर्यंत दोहोंकडून कर्णाचें माप अई लंबपर्यंत कर्णरेघ १०० यार्ड दुसरा कफ लंबपर्यंत दुसरेंकडून कर्णरेघ ७० यार्ड याप्रमाणें मापें मिळालीं आहेत तेव्हां ही आकृति कृपास त्रिकोणानीं करून क्षेत्रफळ किति चौरस यार्ड येईल तें सांग

उत्तर ८६५६२ चौरस यार्ड

पाचवें कृत्य

विषम बहुकोनाचें क्षेत्रफळ करायाचें

विषम बहुकोनांत कर्णरेघा कराव्या अशाकि त्यांत सर्व त्रापी

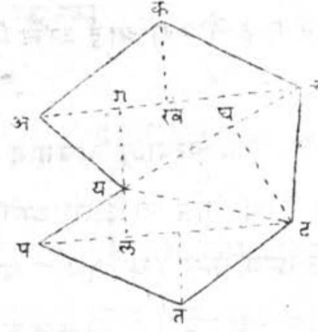
ज्यम आणि

ज्यम आणि त्रिकोण होतील नंतर एक एक त्रिकोणाकृतीचें क्षेत्रफळ करून त्या सर्व क्षेत्रफळांची मेळवणी करावी ती बेरीज त्या विषम बाजू बहुकोनाचें क्षेत्रफळ होय

उदाहरणें

अकचटतपय एक विषम बहुकोन आहे ज्याचे कर्ण व त्यांजवर लंब यांची लांबी खालीं लिहिलों या प्रमाणें आहे

अ-च	५५
प ट	५२
य च	४४
य ग	१३
क ख	१८
य ल	१२
त ब	८
घ ट	२३



उत्तर १८७८ १/२

साहावें कृत्य

समबाजूबहुकोनाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति सर्व बाजूंचे लांबीची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज त्याचे मध्यापासून एक बाजूवर लंब करून त्या एक लंबाचे लांबीनें गुणावी जो गुणाकार होईल त्याचें अर्ध करावें तें अर्ध त्या समबाजू बहुकोनाचें क्षेत्रफळ होय*

---

* ही रीति अशी आहे कि मध्यापासून बहुकोनाचे कोनांपर्यंत लंब करून जे त्रिकोण होतील त्यांचीं वेगळालीं क्षेत्रफळें करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती या बहुकोनाचे क्षेत्रफळा बरोबर आहे

उदाहरण

प्रथम एक समबाजू पंचकोन आहे त्याचे एकएक बाजूची लांबी २५ फुट आणि मध्यापासून एकबाजूवर लंबाची लांबी १७·२०४७७३७ आहे त्याचें क्षेत्रफळ किती होईल

आतां २५ × ५ = १२५ बेरीज बाजूंची

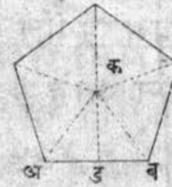
आणि १७·२०४७७३७ × १२५ = २१५०·५९६७१२५ हा गुणाकार

याचें अर्ध १०७५·२९८३५६२५ क्षेत्रफळ जें इछिलें होतें

दुसरी रीति समबाजू बहुकोनाचे एकबाजूचे लांबीचा वर्ग करावा आणि कोष्टकांत बाजूसंख्येचे समोर जे अंक आहेत त्याणीं तो वर्ग गुणावा म्हणजे गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ आलें +

\+ या रीतीस आश्रय हा गुण आहेकीं सर्व सरूप समबाजू बहुकोन सरूपाकृतीच आहेत, याजकरितां (भू० ८९ सि० प्र०) ते परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सजाति बाजूंचे वर्ग; आतां कोष्टकांत जे गुणक लिहिले आहेत ते आपआपल्ये बहुकोन आकृतींचीं क्षेत्रफळें आहेत, जेव्हां त्यांची बाजू एकंम आहे, यावरून सांगीतल्ये रीतीची सत्यता प्रकट आहे,

टीप कोष्टकांत जीं क्षेत्रफळें लिहिलीं आहेत तीं जेव्हां एक एक बाजू एकंम आहे, या रीतीनें गणित करून निघेल; बहुकोनाचे क मध्यापासून सर्व कोनां पर्यंत रेघा कर, आशाकीं आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके त्यांत त्रिकोण होतील, आतां या त्रिकोणांत एक अबक त्रिकोण असावा, ज्याची लंबाची कड आहे· बहुकोनाचे बाजूसंख्येनें ३६०° भागावे, जो भागाकार येईल तो अकब कोनाचें माप होईल, या मापाचें अर्ध अकड कोन होईल, हा अकड कोन ९०° तून वजा केला तर बाकी राहील ती कअड कोनाचें माप होईल; नंतर या रीतीनें प्रमाणराशी होतील, अशी त्रिज्या : अड : : कअड कोनाची स्पर्शरेघ : कड, हा लंब पायाचें अर्ध अड याणें गुणून गुणाकार अबक त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ होईल; नंतर या त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ दुसर्ये त्रिकोणाचे संख्येनें गुणून जो गुणाकार येईल तो सगळ्ये आकृतीचें क्षेत्रफळ होईल·



कोष्टक

बाजू संख्या	क्षेत्रनाम	क्षेत्र अथवा गुणकांक	बाहेरील वर्तुळाची त्रिज्या
३	त्रिकोण क्षेत्र	०·४३३०१२७	०·५७७३५०३
४	चौकोन अथ॰ चौरस	१·०००००००	०·७०७१०६८
५	पंचकोन क्षेत्र	१·७२०४७७४	०·८५०६५०८
६	षट्कोन क्षेत्र	२·५९८०७६२	१·०००००००
७	सप्तकोन क्षेत्र	३·६३३९१२४	१·१५२३८२४
८	अष्टकोन क्षेत्र	४·८२८४२७१	१·३०६५६२८
९	नवकोन क्षेत्र	६·१८१८२४२	१·४६१९०२२
१०	दशकोन क्षेत्र	७·६९४२०८८	१·६१८०३४०
११	एकादशकोन क्षेत्र	९·३६५६३९९	१·७७४७३२४
१२	द्वादशकोन क्षेत्र	११·१९६१५२४	१·९३१८५१६

उदाहरणें

प्रथम पूर्वीचें उदाहरण घ्यावें· जा पंचकोणाचे बाजूंची लांबी २५ पंचवीस आहे

आतां $२५^२$ = ६२५

बाजूसंख्येचे समोर अंक १·७२०४७७४

याजकरितां १·७२०४७७४ × ६२५ = १०७५·२९८३७५ पूर्वीप्रमाणें क्षेत्र फळ जालें

दुसरें

दुसरें ज्याचे एकएक बाजूची लांबी २० असें एक समबाजू त्रिकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १७३.२०५०८

तिसरें ज्याचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू षट्कोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १०३९.२३०४८

चवथें ज्याचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू अष्टकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल.

उत्तर १९३१.३७०८४

पांचवें ज्याचे एकएक बाजूची लांबी २० वीस असें एक समबाजू दशकोन आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल.

उत्तर ३०७७.६८३५२

सातवें कृत्य

वर्तुळाचे व्यासापासू परिघ आणि परिघापासून व्यास करायाचें

आतां खालीं दोन रीती सांगतो त्यांतून कोणत्येही एक्ये रीतीनें हें कृत्य होईल.

असें ७ : २२ :: व्यास : परिघाला

अथवा असा १ : ३.१४१६ :: व्यास : परिघाला

उदाहरणें

उदाहरणें*

प्रथम ज्याचा व्यास २० लांब असें एक वर्तुळ आहे त्याचा परिघ किती आहे

प्रथम रीतीनें

प्र॰ जसे ७ : २२ : : २० : ६२$\frac{६}{७}$ परिघ हें उत्तर

दुसरें जर पृथ्वीच्या परिघ २५००० मैल आहे तर त्याचा व्यास किती मैल होईल

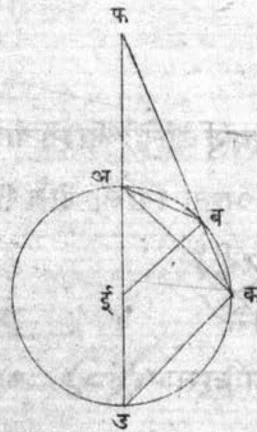
दु॰ जसे ३.१४१६ : १ : : २५००० : ७९५७$\frac{३}{४}$ मैल व्यास हें उत्तर

आठवें कृत्य

---

* अबकड कोणतेंही वर्तुळ असावें, ज्याचा मध्य ई आहे, आणि अब, बक, कोणतेही दोन बरोबर कौस असावे, आकृतींत जशा वेगळाल्या ज्या आहेत तशा कर, आणि बई सांध, नंतर उअ व्यास कर, आणि त्यास फ पर्यंत वाढीव, असा कीं बफ बड ज्याचे बरोबर होईल

आतां उईब, उबफ, हे दोन समद्विबाजू त्रिकोण समकोन आहेत, कारण उ कोन दोहोंस साधारण आहे, याजकरितां उई : उब : : उब : उफ. परंतु अफब, उकब, हे दोन त्रिकोण एकरूप अथवा सर्वांशीं सम आहेत, कारण त्यांत फ कोन = बउक कोन, कारण हे प्रत्येक कोन अउब कोना बरोबर आहेत, ज्यांचें माप अब, बक, हे बरोबर कौस आहेत; आणि अबकड चौकोनाचा बाहेरील फअब कोन आंतील समोरचे क कोनाचे बरोबर आहे; आणखी या दोन त्रिकोणामध्यें बफ बाजू = बड बाजू; याजकरितां अफ बाजू ही उक बाजूचे



आठवें कृत्य

कोणे वर्तुळाचे कोसाची लांबी करायाचें

कोसांत जितके अंश आहेत ते .०१७४५ नीं गुणाचे जो गुणाकार येईल

बरोबर आहे. यापासून निघतें कीं वरचा प्रमाणराशी ह्मणजे डई : डब : : डब : डफ = डअ + अफ ; याप्रमाणें रूप होतें. डई : डब : : डब : २डई + डक. तेव्हां आद्यंत पदांचा आणि दोन मध्यपदांचा काटकोन चौकोन करून $\text{डब}^{२} = \text{२डई}^{२} + \text{डई} \times \text{डक}$.

आतां जर डई त्रिज्या = १ घेतला तर या समीकरणास हें रूप होतें $\text{डब}^{२} = \text{२} + \text{डक}$ आणि याचें वर्गमूळ करून $\text{डब} = \sqrt{\text{२} + \text{डक}}$; हें दाखवितें कीं जर कोणत्येही कोसाचें सप्लमेंटल ज्याचें माप २ या संख्येनें अधीक केलें तर त्यांचे बेरिजेचें वर्गमूळ त्याच कोसाचे अर्धाची सप्लमेंटल ज्या होईल.

आतां हें वर्तुळ परिघाचें गणित करायास याप्रमाणें कामांत घ्यावें ; अक कोस परिघाचे $\frac{\text{१}}{\text{६}}$ चे बरोबर घ्यावा आणि वरचे सिद्धांतांत सांगीतल्याप्रमाणें त्यास पुनःपुनः दुभागावें ; असें करून अक ज्या ह्मणजे परिघाचा $\frac{\text{१}}{\text{६}}$ हा आंतील समबाजू षट्कोणाचे एक बाजूचे बरोबर आहे ; याजकरितां तो अई त्रिज्याचे अथवा एकाचे बरोबर ओहे। तर अकड या काटकोन त्रिकोणांत

$$\text{डक} = \sqrt{\text{अड}^{२} - \text{अक}^{२}} = \sqrt{\text{२}^{२} - \text{१}^{२}} = \sqrt{\text{३}} = \text{१.७३२०५०८०७६}$$ ह्मणजे हें सर्वपरिघाचें $\frac{\text{१}}{\text{६}}$ चे सप्लमेंटल ज्याचें माप आहे.

तेव्हां वर सांगीतल्ये सिद्धांताप्रमाणें कोसास पुनःपुनः दुभागून शेवटील वर्गमूळांत २ हा अंक मिळवून या रीतीनें बारावा चोविसावा अठ्ठेचाळिसावा शाहांणवावा इत्यादिक परिघ भागांचे सप्लमेंटल ज्यांचें माप कळेल. जसें

$\sqrt{\text{३.७३२०५०८०७६}}$ = १.९३१८५१६५२५	हें माप सप्लमेंटल ज्यांचें	$\frac{\text{१}}{\text{१२}}$	परिघाचे तितकाव्या भागाचें
$\sqrt{\text{३.९३१८५१६५२५}}$ = १.९८२८८९७२२७		$\frac{\text{१}}{\text{२४}}$	
$\sqrt{\text{३.९८२८८९७२२७}}$ = १.९९५७१७८४६५		$\frac{\text{१}}{\text{४८}}$	
$\sqrt{\text{३.९९५७१७८४६५}}$ = १.९९८९२९१७४३		$\frac{\text{१}}{\text{९६}}$	
$\sqrt{\text{३.९९८९२९१७४३}}$ = १.९९९७३२२७५७		$\frac{\text{१}}{\text{१९२}}$	
$\sqrt{\text{३.९९९७३२२७५७}}$ = १.९९९९३३०६७८		$\frac{\text{१}}{\text{३८४}}$	
$\sqrt{\text{३.९९९९३३०६७८}}$ = १.९९९९८३२६६९		$\frac{\text{१}}{\text{७६८}}$	
$\sqrt{\text{३.९९९९८३२६६९}}$ = ...		$\frac{\text{१}}{\text{१५३६}}$	

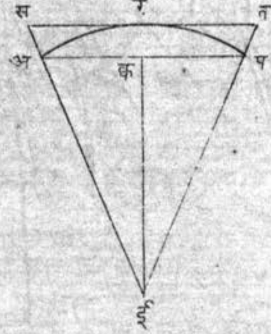
आतां यापासून स्पष्ट कळतें कीं ३.९९९९८३२६६९ हा परिघाचे १५३६ व्ये भागाचे सप्लमेंटल

ज्याचा

येईल तो वर्तुळाचे त्रिज्याचे लांबीनें गुणावा· गुणाकार होईल तो त्या कोसाची लांबी होय†

ज्याचा वर्ग आहे; हा वर्ग ४ ह्मणजे व्यासाचा वर्ग यांतून वजा करून बाकी ह्मणजे ०.००००१६७३३१ ही परिघाचे सांगीतल्ये १५३६ व्ये भागाचे ज्याचा वर्ग होईल; याजकरितां त्याचें वर्गमूळ ह्मणजे √०.००००१६७३३१ = ०.००४०९०६११२ हें त्या ज्याचे लांबीचें माप आहे, ही संख्या १५३६ यांणीं गुणून गुणाकार ६.२८३१७८८ हें वर्तुळांतील समबहुबाजू आकृतीचे परिमितीचें माप आहे, जीस बाजू १५३६ आहेत, आणि यास्तवच त्या बाजू परिघाचे संनिध येवुन केवळ परिघाकारच आल्या याजकरितां त्या परिमितीचें माप परिघाचे मापाजवळ जवळ होईल·

परंतु हें माप खर्‍यें मापाचे जवळ किती येतें तें दाखवाया करितां अकप = ०.००४०९०६११२ ही वर्तुळांतील समबाजू बहुकोन आकृतीची पूर्वीं सांगीतल्या प्रमाणें १५३६ वी एक बाजू असावी आणि सरत ही वर्तुळाचे बाहेरील तीशीं सरूप समबाजू बहुकोन आकृतीची एक बाजू असावी; आणि ई वर्तुळमध्यापासून ईकर लंब कर ह्मणजे तो अप सत यांस क आणि र या स्थळीं दुभागील· आतां अक = ½ अप = ०.००२०४५३०५६ आणि ईअ = १ याजकरितां $ईक^2 = ईअ^2 - अक^2$ = ·९९९९९५८१६७ आणि याजकरितां यांचें वर्गमूळ ईक = ·९९९९९७९०८४ तेव्हां अप सत या समांतर असोन ईक : ईर : : अप : सत अथवा आंतील बहुकोनाकृतीची सर्व परिमिति : बाहेरील बहुकोनाकृतीचें सर्व परिमितीस आहे;



ह्मणजे जसा ·९९९९९७९०८४ : १ : : ६.२८३१७८८ : ६.२८३१९२० हें बाहेरील समबाजू बहुकोन आकृतीचे परिमितीचें माप आहे आतां वर्तुळाचा परिघ आंतील बहुकोनाकृतीचे परिमितीपेक्षां मोठा आहे परंतु बाहेरील बहुकोनाचे परिमितीपेक्षां लाहान आहे याजकरितां ६.२८३१७८८ यापेक्षां मोठा आहे परंतु ६.२८३१९२० यापेक्षां लाहान आहे आणि याजकरितां यांचे बेरिजेचे अर्धा जवळ येईल, ह्मणजे ६.२८३१८५४ यांत शेवटील अंक ४ याचे स्थळीं ३ लिहून माप खरें आहे·

या रीतीवरून सिद्ध जालें कीं जेव्हां व्यास २ आहे तेव्हां परिघ ६.२८३१८५४ आहे याजकरितां जेव्हां व्यास १ आहे तेव्हां परिघ पूर्वीचे अर्धा ३.१४१५९२७ आहे ह्मणून वरचे रीतींत जें प्रमाण १ : ३.१४१६ हें सांगीतलें आहे तें याचे जवळ जवळ आहे; आणि रीतींत दुसरें प्रमाण सांगीतलें आहे असें ७ : २२ अथवा १ : ३$\frac{1}{7}$ = ३.१४२८ इत्यादि हें जवळ जवळचें दुसरें प्रमाण आहे·

† पूर्वकृत्याचे रीतीची सत्यता सिद्ध कराया करितां दाखविलें गेलें कीं जेव्हां वर्तुळाची त्रिज्या १ आहे तेव्हां त्याचा परिघाची लांबी जांत ३६०° अंश आहेत ती = ६.२८३१८५४ आहे याजकरितां असे ३६०° : ६.२८३१८५४ : : १° : ·०१७४५ इत्यादि ही लांबी एक अंशाचे कौसाची आहे याजकरितां हे ·०१७४५ कितीही अंशांचे संख्येनें गुणून तो गुणाकार तितक्ये अंशांचे कौसाची लांबी होईल· पुनः याच कारणास्तव परिघ अथवा कौस हे परस्पर प्रमाणांत आहेत असें त्या वर्तुळांचे व्यास अथवा त्रिज्या याजकरितां अशी त्रिज्या १ : दुसर्‍ये कोणतेही र त्रिज्येस : : सांगीतल्ये पूर्व कौसाची लांबी = ·०१७४५ : जितक्ये अंशाचा कौस आहे त्या संख्येनें ·०१७४५ हे गुणून तो गुणाकार × र ह्मणजे हें वर लिहिल्ये रीती प्रमाणें आहे

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम एक वर्तुळाचा कौस आहे त्यांत ३०° अंश आहेत आणि त्या वर्तुळ त्रिज्याची लांबी ९फुट आहे त्या कौसाची लांबी किती होईल

उत्तर ४·७११५

दुसरें एक वर्तुळाचे कौसांत १२° अंश १० कळा आहेत आणि वर्तुळ त्रिज्याची लांबी १० फुट आहे तर त्या कौसाची लांबी किती होईल

उत्तर २·१२३१

नववें कृत्य

वर्तुळाचें क्षेत्रफळ करायाचें ※

प्रथम रीति परिघार्ध आणि व्यासार्ध हीं दोनीं परस्पर गुणावीं गुणाकार येईल तो त्यावर्तुळाचें क्षेत्रफळ आलें अथवा सगळा परिघ आणि सगळा व्यास हे परस्पर गुणून तो गुणाकार ४ याणीं भागावा· भागाकार येईल तें त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ आलें

※ प्रथमरीतीची सत्यता भूमितीचे ९४ व्ये सिद्धांतापासून स्पष्ट कळत्ये आणि दुसरी तिसरीं या रीती प्रथमरीतीपासून याप्रकारानें उत्पन्न होतात· वर्तुळाचा व्यास दाखवायाकरितां ड आणि परिघ दाखवायाकरितां क घे· आतां प्रथम रीती प्रमाणें डक÷४ हें क्षेत्रफळ आलें परंतु यांतील सातव्ये कृत्यावरून क=३·१४१६ ड याजकरितां वरचें क्षेत्रफळ डक÷४ यास हें रूप होतें ड×३·१४१६ड÷४=·७८५४ड² ही दुसरी रीति आली· आणि त्याच सातव्ये कृत्यावरून ड=क÷३·१४१६ याजकरितां पूर्वींचें क्षेत्रफळ डक÷४ यास हें रूप होतें क÷३·१४१६×क÷४=क²÷१२·५६६४ अथवा १२·५६६४ यांचा व्युत्क्रम घेउन या सर्वांस हें रूप होतें क²×·०७९५८ ही तिसरी रीति आहे

कुरलशी यापासून स्पष्ट कळतें कीं वेगळाल्ये वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें परस्पर प्रमाणांत आहेत जसे त्यांचे व्यासांचे वर्ग अथवा परिघाचे वर्ग; हीच सत्यता भूमितीचे ९३ व्ये सिद्धांतावरून ही सिद्ध होत्ये·

दुसरी रीति व्यासाचा वर्ग करावा आणि तो वर्ग ·७८५४ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ जालें

तिसरी रीति परिघाचा वर्ग करावा आणि तो वर्ग ·०७९५८ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ जालें·

उदाहरणें

प्रथम ज्याचा व्यास १० आणि परिघ ३१·४१६ असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

प्रथम रीतीनें	दुसर्ये रीतीनें	तिसर्ये रीतीनें	
३१·४१६	·७८५४	३१·४१६	
१०	१००	३१·४१६	
४)३१४·१६०	७८·५४		
७८·५४		·०७९५८	याणीं गुण
		७८·५४	क्षेत्रफळ

यावरून दिसतें यातीनही रीतींकरून क्षेत्रफळ ७८·५४ बराबर येतें

दुसरें ज्याचा व्यास ७ आणि परिघ २२ असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल·

उत्तर ३८ $\frac{१}{२}$

तिसरें ज्याचा व्यास २$\frac{१}{२}$ फुट आहे त्या वर्तुळाचें क्षेत्रफळ किती चौरस यार्ड होतील·

उत्तर १·०६९ चौ० या०

चौथें

चौथें ज्याचा परिघ १२ फुट असें एक वर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ११.४५९५

दाहावें कृत्य

दोन वर्तुळपरिघांचे मध्यें जें स्थळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति पूर्वरीतीप्रमाणें दोन वर्तुळांचीं क्षेत्रफळें करून त्यांत वजाबाकी करावी जी बाकी राहील तें त्याचें क्षेत्रफळ होईल

दुसरी रीति मोठे वर्तुळाचे व्यासाचा वर्ग करून त्यांत लाहान वर्तुळाचे व्यासाचा वर्ग वजा करावा जी बाकी राहील ती .७८५४ याणीं गुणावी जो गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ होईल

तिसरी रीति दोन व्यासांची बेरीज घेउन ती त्या दोन व्यासांचे वजाबाकीनें गुणावी गुणाकार येईल तो .७८५४ याणीं गुणावा जो गुणाकार होईल तें क्षेत्रफळ होय कारण भलत्ये दोन अंकांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीनें गुणावी तो गुणाकार त्याच अंकांचे वर्गांचे वजाबाकी बराबर आहे

उदाहरणें

प्रथम एकमध्य असून एक आंत आणि एक त्याचे बाहेर ऐशीं

दोन

दोन वर्तुळें आहेत त्यांत एकाचा व्यास १० आणि एकाचा व्यास ६ आहे तेव्हां त्या दोन परिघांचे मधील स्थळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

आतां १० + ६ = १६ बेरीज आणि १० − ६ = ४ बाकी याजकरितां

·७८५४×१६×४= ·७८५४×६४=५०·२६५६ क्षेत्रफळ उत्तर

दुसरें एक मध्य असून एक आंत आणि एक त्याचे बाहेर ऐशीं दोन वर्तुळें आहेत त्यांत एकाचा व्यास २० आणि एकाचा व्यास १० आहे तेव्हां त्या दोन परिघांचे मधील स्थळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर २३५·६२

अकरावें कृत्य

वर्तुळाचे सेकतोराचें क्षेत्रफळ करावयाचें.

प्रथम रीति वर्तुळाची त्रिज्या सेकतोराचे कोसाचे अर्धानें गुणावी गुणाकार येईल तें क्षेत्रफळ होय अथवा वर्तुळाचा व्यास सेकतोराचे सर्वकोसानें गुणावा आणि तो गुणाकार ४ नीं भागावा जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ होईल.

दुसरी रीति सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ करून मग तें प्रमाण करून चालावें असे ३६०° या क्षेत्रफळास आहेत तसे सेकतोराचे कोसांत जे अंश आहेत ते त्या सेकतोराचे क्षेत्रफळास होतील

उदाहरणें

प्रथम ज्याचे कोसांत १८° असा एक वर्तुळाचा सेकतोर आहे त्या वर्तुळाचा

तुळाच्या व्यास ३ फुट आहे तेव्हां त्या सेकतोराचें क्षेत्रफळ काय होईल

प्रथम रीतीनें

पहिल्यान ३·१४१६ × ३ = ९·४२४८ परिघ आला

आणि जसे ३६०° : ९·४२४८ : : १८° : ·४७१२४ कौसाची लांबी

नंतर ·४७१२४ × ३ ÷ ४ = ·३५३४३ क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसर्ये रीतीनें

पहिल्यान ·७८५४ × ३² = ७·०६८६ हें सर्व वर्तुळाचें क्षेत्रफळ

नंतर जसे ३६०° : ७·६८६ : : १८° : ·३५३४३ सेकतोराचें क्षेत्रफळ

दुसरें ज्याचे कौसाची लांबी २० असा एक वर्तुळाच्या सेकतोर आहे आणि वर्तुळाची त्रिज्या १० तेव्हां त्या सेकतोराचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १००

तिसरें ज्याचे कौसांत १४७°·· २९′ असा एक सेकतोर आहे आणि वर्तुळाची त्रिज्या २५ तेव्हां त्यासेकतोराचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ८०४·३९८६ क्षेत्रफळ

बारावें कृत्य

वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति जा सेकतोर कौसाची लांबी वर्तुळखंड कौसाचे लांबी बराबर आहे त्याचें क्षेत्रफळ पूर्वरीती प्रमाणें करावें

नंतर

नंतर दोन त्रिज्या आणि वर्तुळखंडाची ज्या ऐसा त्रिकोण आहे त्याचें क्षेत्रफळ करावें

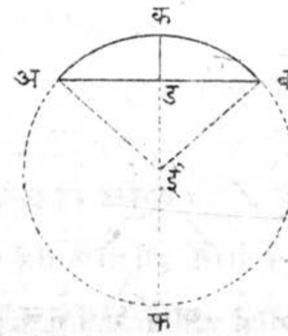
नंतर वर्तुळखंड अर्धवर्तुळाहून लाहान आहे तर त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ सेकतोराचे क्षेत्रफळांत वजा करून बाकी राहील ती त्या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ आलें.

जर वर्तुळखंड अर्धवर्तुळाहून मोठा आहे तर मोठे सेकतोराचें क्षेत्रफळ आणि त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ यांची मेळवणी करून जी बेरीज येईल ती त्या मोठे वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ आलें

याची सत्यता आकृतीचें रूप पाहिल्यानें स्पष्ट कळत्ये

उदाहरणें

प्रथम अबकडअ या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ काय आहे जर अब ज्याची लांबी १२ आहे आणि वर्तुळ त्रिज्या अई किंवा कई १० आहे



प्रथम

जशी अई = १० : ८ उन्चे भुजज्या = ९०° : : अड = ६ : ३६° . . ५२′ १/५ = ३६·८७° म्हणजे हे अंश अईक कोनामध्यें अथवा अक कौसामध्यें आहेत, त्यांची दुपट ७३·७४° हे अंश सगळे

अकब कोंसांत आहेत·

आतां ·७८५४×४००=३१४·१६ हें सगळ्ये वर्तुळाचें क्षेत्रफळ आहे याजकरितां जर ३६०° : ७३·७४° : : ३१४·१६ : ६४·३५०४ हें अकबई सेकतोराचें क्षेत्रफळ आहे

$$\text{पुनः} \sqrt{\text{अई}^2 - \text{अड}^2} = \sqrt{१०० - ३६} = \sqrt{६४} = ८ = \text{उई}$$

नंतर अड×उई=६×८=४८ हें अईब त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ आहे

याजकरितां अकबई सेकतोर – अईब त्रिकोण = ६४·३५०४ – ४८ = १६·३५०४ हें अकबडअ यावर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ आहे·

दुसरी रीति वर्तुळखंडाची उंची वर्तुळाचे व्यासानें भागावी भागाकार येईलतो उंचीशब्दाचे खालचे कोष्टकांत पाहावा उंचीशब्दाचे उजव्ये कडे क्षेत्रफळ शब्द आहे त्याचे खालीं भागाकार अंकाचे समोर जे अंक आहेत ते काढ नंतर ते अंक वर्तुळ व्यासाचे वर्गानीं गुण गुणाकार येईल तो त्या वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ जालें※

टीप जेव्हां भागाकार कोष्टकांत बरोबर मिळत नाहीं तेव्हां असें लागरतमकोष्टकांत अधिकतर उनतर संख्या घेउन त्यांपासून संख्या काढितात, तसें करावें·

※ यारीतीस हा आश्रय आहे कीं सरूप सरळाकृती परस्परांस आहेत जसे त्यांचे सरूप सरळ बाजूचे वर्ग· कोष्टकांत वर्तुळखंडाचें माप त्या वर्तुळाचें आहे कीं ज्याचा व्यास १ आहे· आणखी प्रथम ओळींतील अंक त्या त्या वर्तुळ खंडाची उंची त्याचे त्याचे व्यासानें भागिली ते आहेत· नंतर सरूप वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ कोष्टकांतून काढून तें सांगीतल्ये व्यासाचे वर्गानें गुणून जो गुणाकार येईल तो त्या त्या सांगीतल्ये व्यासाचे वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ होईल·

उंची	क्षेत्रफळ	उंची	क्षेत्रफळ	उंची	क्षेत्रफळ	उंची	क्षेत्रफळ	उंची	क्षेत्रफळ
·०१	·००१३३	·११	·०४७०१	·२१	·११९९०	·३१	·२०७३८	·४१	·३०३१९
·०२	·००३७५	·१२	·०५३३९	·२२	·१२८११	·३२	·२१६६७	·४२	·३१३०४
·०३	·००६८७	·१३	·०६०००	·२३	·१३६४६	·३३	·२२६०२	·४३	·३२२९३
·०४	·०१०५४	·१४	·०६६८३	·२४	·१४४९१	·३४	·२३५४७	·४४	·३३२८४
·०५	·०१४६८	·१५	·०७३८७	·२५	·१५३५४	·३५	·२४४९८	·४५	·३४२७८
·०६	·०१९२४	·१६	·०८१११	·२६	·१६२२६	·३६	·२५४५५	·४६	·३५२७४
·०७	·०२४१९	·१७	·०८८५३	·२७	·१७१०९	·३७	·२६४१८	·४७	·३६२७२
·०८	·०२९४४	·१८	·०९६१३	·२८	·१८००२	·३८	·२७३८६	·४८	·३७२७०
·०९	·०३५०२	·१९	·१०३९०	·२९	·१८९०५	·३९	·२८३५९	·४९	·३८२७०
·१०	·०४०८८	·२०	·१११८२	·३०	·१९८१७	·४०	·२९३३७	·५०	·३९२७०

दुसरें ज्याची उंची २ आणि वर्तुळ व्यास २० असा एक वर्तुळ खंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल ·

२ ÷ २० = ·१ हा भागाकार उंचीशब्दाखालचे कोष्टकांत पाहून त्याचे समोर क्षेत्रफळाखालीं अंक ·०४०८८ आहेत तें काढ

नंतर $·०४०८८ \times २०^{२} = ·०४०८८ \times ४०० = १६·३५२$ हें खंडाचें क्षेत्रफळ उत्तर

तिसरें ज्याचीउंची १८ आणि वर्तुळाचा व्यास ५० असा एक वर्तुळखंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ६३६·३७५ क्षेत्रफळ

सहावें

चवथें ज्याचे ज्याची लांबी १६ आणि वर्तुळाचा व्यास २० असा एक वर्तुळखंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ४४·७२८ क्षेत्रफळ

तेरावें कृत्य
वांकड्ये रेघाकृतीचें क्षेत्रफळ करावयाचें

दोनीं तोंडांची रुंदी मोजून त्यांचे बेरिजेचें अर्ध करावें नंतर लांबीचे हावे तेवढे बरोबर अंतराचे भाग करून मधील भागचिन्हां वरील लंबांची लांबी मोजून त्यांची बेरीज घ्यावी आणि त्यांत तें अर्ध मेळवून लांबीनें गुणावी आणि क्षेत्राचे जितके भाग केले आहेत त्या अंकानीं भागावी जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ आणावें ※

※ या रीतीची सत्यता यापासून स्पष्ट कळल्ये कीं अबकड सांगीतली वांकडी रेघाकृती असावी, जीस अड ईफ गह ऐके बक अशी वेगळाली रुंदी असावी अई ईग गऐ ऐब या बरोबर अंतरानें; वेगळाली रुंदी दाखवायास अनुक्रमानें अ ब क ड ई हीं अक्षरें घे; सगळी लांबी अब दाखवायास ल घे, तेव्हां या आकृतींत वेगळाल्ये भागांची क्षेत्रफळें तिसर्ये कृत्यांतील त्रापीज्यायदा प्रमाणें काढ आणि त्यांची बेरीज घे· असें सर्व भागांची बेरीज हा आहे

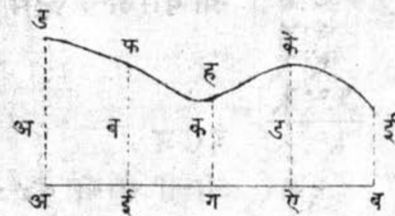
$\frac{अ+ब}{२} \times अई + \frac{ब+क}{२} \times ईग + \frac{क+ड}{२} \times गऐ +$

$\frac{ड+ई}{२} \times ऐब = \frac{अ+ब}{२} \times \frac{१}{४} ल + \frac{ब+क}{२} \times \frac{१}{४}$

$ल + \frac{क+ड}{२} \times \frac{१}{४} ल + \frac{ड+ई}{२} \times \frac{१}{४} ल =$

$(\frac{१}{२} अ + ब + क + ड + \frac{१}{२} ई) \times \frac{१}{४} ल =$

(म + ब + क + ड) $\frac{१}{४}$ ल हें सर्व आकृतीचें रीतीप्रमाणें क्षेत्रफळ आहे; यांत म दोन शेवटील पदांचे बेरिजेचें अर्ध किंवा त्यांचें गणित मध्यप्रमाण आहे;



या आकृतीचे बरोबर ४ अवयव केले परंतु इच्छेस येईल तेवढे अवयव केले तरीं याप्रमाणेंच सत्यता स्पष्ट कळेल

यारीती

यारीतीवरील टीप.

जर भाग बराबर अंतराचे नाहींत तर ते आपीज्यायद झाले त्यांचीं क्षेत्रफळें आपीज्यायदाचे रीतीनें वेगळालीं करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या वांकडीरेषाकृतीचें क्षेत्रफळ होईल

अथवा सर्व भागचिन्ह लंबांची बेरीज घे नंतर ती बेरीज लांबीचे मध्यप्रमाणाकरितां लंबसंख्येच्या अंकानीं भाग तो भागाकार लांबीनें गुण गुणाकार येईल तो जवळ जवळ क्षेत्रफळ जालें

उदाहरणें

प्रथम जीची लांबी ३९ आणि त्याजवर बराबर अंतराचें भागचिन्ह लंब ८·२, ७·४, ९·२, १०·२, ८·६ याप्रमाणें ५ आहेत अशी एक वांकडी रेषाकृति आहे त्या आकृतीचें क्षेत्रफळ असावें तर काय होईल

आतां ८·२
८·६
२) १६·८ दोन तोंडांची बेरीज
८·४ त्या बेरिजेचें अर्ध
७·४
९·२
१०·२
३५·२ बेरीज

३५·२ बेरीज
३९
३१६·८
१०५६
४) १३७२·८
३४३·२ क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसरें जीची लांबी ८४ आणि तिजवर बराबर अंतराचे भागचिन्ह लंब १७·४, २०·६, १४·२, १६·५, २०·१, २४·४ याप्रमाणें एक

वांकडी

वांकडीरेघाकृती आहे तिचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १५५०·६४

चौदावें कृत्य
दीर्घवर्तुळाचा परिघ करावयाचें

दोन आंसांचे वर्ग करून त्यांची बेरीज घ्यावी नंतर त्या बेरिजेचें अर्धकरून त्याचें वर्गमूळ करावें आणि तें ३·१४१६ याणीं गुणावें तो गुणाकार दीर्घ वर्तुळ परिघाचे जवळ जवळ होतो

उदाहरण

जाचा लाहान आंस ४ आणि मोटा आंस ८·१६६६ या दीर्घवर्तुळाचा परिघ किती आहे सांग

उत्तर २०·२

पंधरावें कृत्य
दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

आडवा आणि उभा हे दोनीं आंस परस्पर गुणून गुणाकार येईल तो ·७८५४ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो क्षेत्रफळ आलें

याची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदि कारणांतील दीर्घवर्तुळाचे तिसर्ये सिद्धांताचे दुसर्ये कुरलरीवरून स्पष्ट कळत्ये

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम ज्याचा आडवा आंस ७० आणि उभा आंस ५० असें एक दीर्घवर्तुळ आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर २७४८.९

दुसरें ज्याचा आडवा आंस २४ आणि उभा आंस १८ आहे त्या दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ३३९.२९२८

सोळावें कृत्य
दीर्घवर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

प्रथम रीति एक वर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ करावें ज्या वर्तुळखंडाची उंची आणि ज्या सांगीतल्ये दीर्घवर्तुळ खंडाचे उंचीचे आणि ज्याचे अनुक्रमें बरोबर आहे, नंतर हें प्रमाण कर, जसा सांगीतला उभा आंस : वर्तुळ खंडाचे पायाशीं समांतर दुसर्ये आंसास आहे : : पूर्व काढिलें वर्तुळ खंडाचें क्षेत्रफळ : इछिल्ये दीर्घ वर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळास होईल

या रीतीची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदिकारणांतील दीर्घवर्तुळाचे तिसर्ये सिद्धांताचे दुसर्ये कुरलरीवरूनच कळल्ये

दुसरी

दुसरी रीति दीर्घवर्तुळखंडाची उंची दीर्घवर्तुळाचे उभ्ये आंसानें भागावी आणि तो भागाकार घेउन बाराव्ये कृत्याचे कोष्टकांतून उंचीसमोरचे क्षेत्रफळ अंक घ्यावे नंतर ते अंक व दोन्हीं आंस ऐसे तीन अंक परस्पर गुणून गुणाकार येईल तो क्षेत्रफळ जालें

उदाहरणें

प्रथम जाची उंची २० आणि दीर्घ वर्तुळाचा उभा आंस ७० तसा आडवा आंस ५० असा एक दीर्घ वर्तुळखंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

आतां २० ÷ ७० = ·२८ $\frac{४}{७}$ कोष्टकांत उंचीसमोर क्षेत्रफळ अंक·१८५१८

७०
१२·९६२६०
५०
६४८·१३०००
उत्तर

दुसरें जाची ज्या लाहान आंसाशीं समांतर रेघ आहे आणि उंची १० असा एक दीर्घवर्तुळखंड आहे त्या दीर्घवर्तुळाचे दोन आंसांची लांबी २५ आणि ३५ आहे त्या दीर्घवर्तुळखंडाचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १६२·०३

तिसरें जाची ज्या लोठ्ये आंसाशीं समांतर रेघ आहे आणि उंची ५ दीर्घवर्तुळाचे दोन आंसांची लांबी २५ · ३५ असा एक दीर्घवर्तुळखंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर ९७·८४२५

सचावें

सत्रावें कृत्य

पराबलेचें अथवा पराबलेचे खंडाचें क्षेत्रफळ करावयाचें

पराबलेचे पायाची लांबी आणि उंची परस्पर गुणावी जो गुणाकार येईल त्याचे दोन तृतीयांश घ्यावे तें त्या पराबलेचें क्षेत्रफळ होय

यारीतीची सत्यता शंकुछिन्नाचे आदिकारणांतील पराबलेचे सत्राव्ये सिद्धांतावरून स्पष्टकळते.

उदाहरणें

प्रथम जीची उंची २ आणि पाया १२ अशी एक पराबला किंवा पराबलेचा खंड आहे त्याचें क्षेत्रफळ काय होईल

आतां २×१२=२४ नंतर २४ चे $\frac{२}{३}$ =१६ क्षेत्रफळ हें उत्तर

दुसरें जीची उंची १० आणि पाया १६ अशी एक पराबला आहे तिचें क्षेत्रफळ काय होईल

उत्तर १०६ $\frac{२}{३}$

घनफळ

घनफळांत दोन भेद आहेत एक बाहेरील पातळीचे आंत जो भरींव पिंड आहे त्याचें माप आणि दुसरें त्या भरींव पिंडाचे बाहेर

हेर जी केवळ पानळी आहे तिचें माप

त्यांत पानळीचे आंत जें भरींवपिंडाचें माप आहे त्यास घन फळ ह्मणतात

आणि त्या भरींव पिंडाचे बाहेर जी केवळ पानळी आहे तिचें जें माप त्यास पृष्ठफळ ह्मणतात

सर्व भरींव मानाचे घनानें मापतें ह्मणजे जा मानें मापणे त्यामानाचे घनानें मापतें जसें घनइंच ह्मणजे ज्याचा साहा बाजू एकेक इंच आहेत घनफुट ह्मणजे ज्याचा साहा बाजू एकेक फुट घनयार्ड ह्मणजे ज्याचा साहा बाजू एकेक यार्ड प्रमाण आहेत यांतून जा मापानें मापितो त्यामापांत घनफळ येईल घनइंच घनफुट घनयार्ड याप्रमाणें

भरींव मापावयाकरितां घनमानाचें कोष्टक लिहितो

१७२८	घनइंच =	१	घनफुट
२७	घनफुट =	१	घनयार्ड
१६६$\frac{3}{8}$	घनयार्ड =	१	घनपोल
६४०००	घनपोल =	१	घनफर्लांग
५१२	घनफर्लांग =	१	घनमैल

प्रथम कृत्य

कोणतें एक पृजम अथवा शिलिंदर याचें पृष्ठफळ करायाचें

पृजमाचे

पृजंमाचे एक शेवटाची परिमिति त्याचे लांबीनें किंवा उंचीनें गुणावी; गुणाकार येईल तो त्याचे सर्व बाजूंचें पृष्ठफळ होईल; आणि पाहिजे तर त्याचे दोन शेवटांचीं क्षेत्रफळें त्यांत मिळवावीं.*

अथवा सर्वबाजूंचीं खालीं वर रुंदी क्षेत्रफळें वेगळालीं करून त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्याचें पृष्ठफळ होय

उदाहरणें

प्रथम ज्याचे सर्व बाजूंची लांबी २० वीस फुट असें एक भरीव घन आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर २४०० चौरस फुट

दुसरें ज्याची उंची अथवा लांबी २० वीस फुट आणि दोन ही शेवटांची एकएक बाजू १८ अठरा इंच असें एक त्रिकोण पृजंम आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर ९१·९४८ चौरस फुट

तिसरें ज्याची लांबी अथवा उंची २० फुट आणि शेवटाच्या व्यास २ फुट असें एक शिलिंदर आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर १२५·६६४ चौरस फुट

* या रीतीची सत्यता स्वल्पानें स्पष्ट होत्ये, जर मनांत हा विचार केला कीं कोणत्येही पृजंमाच्या बाजू समांतर रेघ काटकोन चौकोन आहेत, ज्या समांतर रेघ काटकोन चौकोनांची साधारण लांबी पृजंमाची लांबी आहे, आणि त्यांची रुंदी मिळून शेवटाची परिमिति आहे;
आणि स्पष्ट दिसतें कीं हीच रीति शिलिंदरावर ही लागत्ये.

च्यवथें एक लांकडी टांकी आहे; जीची गर्भातील लांबी ३ फुट २ इंच रुंदी २ फुट ८ इंच आणि ओंडी २ फुट ६ इंच आहे, त्यांतून पाणी न झुरावें ह्मणून शिंशाचे पत्रे आंतोन बसवीणें आहेत; ते असे आहेत कीं; एक चौरस फुट पत्रा ७ शेर वजन; आणि दरशेरीं ३ पावलें पडतात; तेव्हां यास किती रुपये लागतील.

उत्तर

दुसरें कृत्य

कोणत्येही शंकूचें पृष्ठफळ करायाचें

शंकूचे पायाची परिमिति झोंकउंचीनें ह्मणजे तिर्कस उंचीनें अथवा बाजूचे लांबीनें गुणून त्या गुणाकाराचें अर्ध त्याचें पृष्ठफळ स्पष्ट होईल

अथवा बाजूंचे त्रिकोणांचे क्षेत्रफळांची बेरीज पृष्ठफळ होईल पाहिजे तेव्हां याजवर पायाचें क्षेत्रफळ मिळवावें.

यांचा ताळा

शंकूचे शिरापासून पायापर्यंत एक्ये बाजूवर बाजूप्रमाणें तिर्कस लंबरेघ करावी आणि तेथून अर्धी पायाची बाजू त्या लंबरेघेनें गुणावी तो गुणाकार त्या शंकूचे एक बाजूचें पृष्ठफळ आलें नंतर जितक्या बाजू असतील तितकीं पृष्ठफळें करुन त्यांची बेरीज घ्यावी ती बेरीज त्या शंकूचे पृष्ठफळा बराबर होय.

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम ज्याचे उभे बाजूची तिचे बराबर तिर्कस रेघ २० फुट आणि पायाचे एकएक बाजूची लांबी ३ फुट असा एक त्रिकोण शंकु आहे त्याचें पायाशिवाय पृष्ठफळ काय होईल·

उत्तर ९० फुट

दुसरें ज्याचे उभे बाजूची तिचे बराबर तिर्कस लंबवत् रेघ ५० फुट आणि पायाचा व्यास ८ १/२ फुट असा एक वर्तुळ शंकु आहे त्याचें पायाशिवाय पृष्ठफळ काय होईल·

उत्तर ६६७·५९ फुट

तिसरें कृत्य

शंकूचें समांतर खंडाचें पृष्ठफळ करायाचें

(पायाशीं समांतर पातळीनें कापलेल्या शंकूचें खालचें समांतर खंड)

शंकूचे समांतर खंडाचा दोन तोंडांचे परिमितींची बेरीज घ्यावी आणि ती बेरीज तिर्कस उंचीनें गुणून गुणाकाराचें अर्ध करावें. तें अर्ध त्या समांतर खंडाचें दोन तोंडां शिवाय पृष्ठफळ होईल·

ही रीति उघड आहे, कारण, या समांतर खंडाचा बाजू त्रापीज्यायद आहेत, त्याचा समोरासमोरचा बाजू समांतर आहेत·

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम पायाचे एकएक बाजूची लांबी ३ फुट ४ इंचववरचे तोंडाचे एकएक बाजूची लांबी २ फुट २ इंच आणि एकबाजू बराबर उभी तिर्कस लंबरेघेचीउंची १० फुट असा एक चौकोन शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें दोन तोंडांशिवाय पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ११० फुट

दुसरें ज्याचे दोन शेवटांचे परिघ ६ आणि ८·४ फुट आणि बाजू बराबर उभी तिर्कस लंबरेघ १२½ असा एक वर्तुळ शंकूचा समांतरखंड आहे त्याचें दोन तोंडांशिवाय पृष्ठफळ काय होईल

उत्तर ९० फुट

चौथें कृत्य

पृजंग अथवा शिलिंदर याचें घनफळ करायाचें

पायाचे पातळीचें क्षेत्रफळ करून तें उंचीनें गुणावें गुणाकार येईल तो त्याचें घनफळ होय ※

टीप

※ या रीतीची सत्यता भूमितीचे ११० व्ये सिद्धांताचे दुसर्‍ये कुरलरी वरून स्पष्ट होत्ये· आणि हीच सत्यता दुसर्‍ये रीतीनें ही विशेष कळत्ये। ही संनिधची आकृति एक समांतर भरींव काट-

कोन

टीप भरींव घनाचें घनफळ करणें तर एक बाजू मापून त्या मापाचा घन करावा समांतर भरींवांचें घनफळ करणें तर त्याची लांबी रुंदी आणि उंची परस्पर गुणावी तो गुणाकार त्याचें घनफळ होय·

उदाहरणें

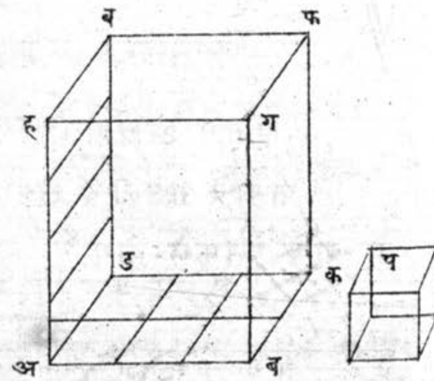
प्रथम ज्याची बाजू २४ इंच असें एक भरींव घन आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर १३८२४ इंच

दुसरें ज्याची लांबी ३ फुट २ इंच व रुंदी २ फुट ८ इंच आणि उंची २ फुट ६ इंच असा एक संगमनर्वरी दगडाचा तुकडा आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर २१ $\frac{1}{9}$ फुट

कोन चौकोन असावी, जीचें माप घ्यावयाचें आहे; आणि प घन तीचे संनिध आहे, हें घनाचें एक माप असावें, ज्याचा बाजू एक इंच अथवा एक फुट किंवा एक यार्ड इत्यादि असाव्या; आणि अबकड पायाची लांबी आणि रुंदी तशी अह उंची ही अशी भागावी कीं प्रत्येक भाग प भरींवांचे पाया बरोबर होतील, ह्मणजे या आकृतीचे पायामध्यें लांबींत तीन भाग आणि रुंदीत दोन भाग आहेत, याजकरितां ३ वेळा २=६ चौरस अक पाया मध्यें, जें चौरस प्रत्येकीं प भरींवाचे पाया बरोबर आहेत· यापासून स्पष्ट आहे कीं समांतर भरींवा मध्यें इतके वेळ प घन आहे कीं, जितके वेळ अक पायामध्यें प घनाचा पाया येतो, आणि अह उंचीमध्यें जितके वेळ प घनाची उंची येत्ये· ह्मणोन कोणत्येंही समांतर भरींवाचा घन यारीतीनें मापला जातो कीं त्याचे पायाचें क्षेत्रफळ उंचीनें गुणावें



आणखी याच कारणास्तव भूमितीचे १०८ व्ये सिद्धांता प्रमाणें सर्व एजमें आणि शिलिंदरें ज्यांचा पाया आणि उंची बरोबर तीं सर्व परस्पर बरोबर आहेत, याजकरितां हीरीति तशीच सर्व भरींवांस सामान्य आहे, त्यांचे पायांची आकृती कशी ही असो·

तिसरें ज्याची बाजू बरोबर उंची १० फुट आणि पायाचे बाजूंची लांबी ३ · ४ · ५ फुट असा एक त्रिकोण शंकु आहे त्याचें घनफळ काय होईल·

उत्तर ६० फुट

चवथें ज्याची उंची २० फुट आणि परिघ ५ फुट ६ इंच असा एक शिलिंदर आहे त्याचें घनफळ काय होईल·

उत्तर ४८·१४५९ फुट

पांचवें दुसर्ये उदाहरणाचे मानाप्रमाणें एक टांकें आहे त्यांत किती पाणी राहील जर १ शेर पाणी राहातें त्या पात्राचें घनफळ २१·५ घन इंच आहे

	खं	म	शे
उत्तर	२ ··	२ ··	१६·७४

पांचवें कृत्य

कोणत्येही शंकूचें घनफळ करायाचें,

शंकूचे पायाचें जें रूप असेल त्या रूपाचे रीतीनें त्याचें क्षेत्रफळ करावें आणि तें शंकूचे उंचीनें गुणावें गुणाकाराचा जो $\frac{१}{३}$ तो त्याचें घनफळ होय ※

※ ही रीति पृजंमाचे रीती पासून उत्पन्न होत्ये· कारण, भूमितीचे ११५ व्ये सिद्धांतांतील कुरलरी वरून सिद्ध आलें कीं, कोणताही शंकु पृजंमाचा तिसरा भाग आहे, ज्याचा पाया आणि उंची बरोबर आहे·

उदाहरणें

प्रथम ज्याचे पायाचे बाजूची लांबी ३० आणि उंची २५ असा एक चौरस शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ७५००

दुसरें ज्याचे पायाचे बाजूची लांबी ३ आणि उंची ३० असा एक समत्रिकोण शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ३८.९७११७

तिसरें ज्याचे पायाचा तीन बाजू ५ . ६ . ७ फुट आणि उंची १४ फुट ६ इंच असा एक विषमत्रिकोण शंकू आहे. त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ७१.०३५२

चौथें ज्याचे पायाचे बाजूची लांबी २ आणि उंची १२ असा एक पंचकोण शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर २७.५२७६

पांचवें ज्याचे पायाचे बाजू लांबी ६ इंच आणि उंची ६४ फुट असा एक षट्कोण शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर १.३८५६४ घन फुट

साहावें पायाचा परिघ ९ आणि उंची १० $\frac{१}{२}$ फुट असा एक

वर्तुळ

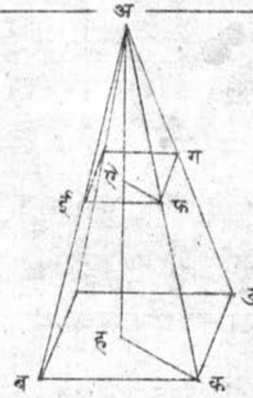
वर्तुळ शंकू आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर २२·५६०९३

साह्यावें कृत्य

शंकूचे समांतर खंडाचें घनफळ करायाचें, पायाशीं समांतरपातळीनें कापलेला शंकूचा पायाकडील जो तुकडा त्यास समांतरखंड ह्मणतात·

समांतर खंडाचे दोनी शेवटांचीं क्षेत्रफळें आणि त्यांचें मध्यप्रमाण या तीन अंकांची बेरीज घ्यावी नंतर त्या बेरिजेचा $\frac{१}{३}$ खंडाचे मध्याचें क्षेत्रफळ होईल· मग तें मध्याचें क्षेत्रफळ खंडाचे उंचीनें गुणावें गुणाकार येईल तो त्या समांतर खंडाचें घनफळ होईल ※



※ अबकड कोणताही शंकु असावा, ज्याचा एकखंड बकडगफई आहे, आतां बकड पायाचें क्षेत्रफळ दाखवायाकरितां अ^{२} घे, आणि या खंडाचे ईफग वरचे बाजूचें क्षेत्रफळ दाखवाया करितां ब^{२} घे, खंडाची ऐह उंची दाखवाया करितां ह घे, खंडाचे वर राहिल्ये शंकूची उंची ऐअ दाखवाया करितां क घे, तेव्हां क+ह= अह, शंकूची सर्वउंची,

आतां याचे पूर्वीचे कृत्यावरून $\frac{१}{३}$ अ^{२}(क+ह) हें अबकड सर्व शंकूचें घनफळ आहे, आणि $\frac{१}{३}$ ब^{२}क= समांतर खंडावरील अईफग तुकड्याचें घनफळ आहे, याजकरितां या दोहोंची वजाबाकी ह्मणजे $\frac{१}{३}$अ^{२}(क+ह) − $\frac{१}{३}$ ब^{२}क हें बकडगफई खंडाचें घनफळ आहे, परंतु क पद खंडाचे कोणत्येही अवयवाचें माप नाहीं, याजकरितां या कोष्टकांतून क पद काढून त्याचे स्थळीं त्याची किमत ठेविली पाहिजे, ती यारीतीनें निघत्ये, भूमितीचे ११२ व्ये सिद्धांता प्रमाणें अ^{२} : ब^{२} : : (क+ह)^{२} : क^{२}, अथवा अ : ब : : क+ह : क, याजकरितां भूमितीचे ६९ व्ये सिद्धांता प्रमाणें अ−ब : ब : : ह : क, आणि अ−ब : अ : : ह : क+ह· याजकरितां क= $\frac{बह}{अ-ब}$ आणि क+ह= $\frac{अह}{अ-ब}$, तर कोष्टकांत क आणि क+ह यांची किमत ठेवुन खंडाचें घनफळ दाखवायाकरितां कोष्टकाचें रूप याप्रमाणें होतें,

$\frac{१}{३}$ अ^{२} × $\frac{अह}{अ-ब}$ − $\frac{१}{३}$ ब^{२} × $\frac{बह}{अ-ब}$ = $\frac{१}{३}$ ह × $\frac{अ^{३}-ब^{३}}{अ-ब}$ = $\frac{१}{३}$ ह × (अ^{२}+अब+ब^{२}) ही वर सांगीतली रीति आहे, जांत अब हें अ^{२} आणि ब^{२} यांचें मध्यप्रमाण आहे·

टीप

टीप. ही सामान्य रीति दुसर्यें प्रकारानें ही लिहिली जात्ये; जेव्हां समांतर खंडाचीं दोनही शेवटें वर्तुळ अथवा समबाजू बहुकोन आहेत. असें आहे तेव्हां प्रत्येक बहुकोनाचे एकेक बाजूच्या वर्ग घ्यावा; आणि एकाची एक बाजू दुसर्याचे एक बाजूनें गुणावी. नंतर या तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी मग ती बेरीज जशी बहुकोन आकृति आहे, तशा आकृतीचे कोष्टकांतील क्षेत्र अथवा गुणकांक घेउन त्यांणीं गुणावी. त्या गुणाकाराच्या जो $\frac{१}{६}$ तो समांतर खंडाचें मध्यप्रमाण क्षेत्रफळ होईल, त्यास खंडाचे उंचीनें गुणून तो गुणाकार समांतर खंडाचें घनफळ होईल. आणि जेव्हा वर्तुळ शंकुखंड आहे, दोनीं शेवटें वर्तुळ आहेत. तेव्हां त्या दोन शेवटांचे व्यासांचे अथवा परिघांचे वर्ग घ्यावे, आणि ज्यांचे वर्ग घेतले ते व्यास अथवा परिघ परस्पर गुणावे, नंतर या तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी, ती बेरीज कोष्टक संख्येनें गुणावी; ह्मणजे व्यास घेतला आहे तर ·७८५४ याणीं, आणि परिघ घेतला आहे तर ·०७९५८ याणीं गुणावी; नंतर या गुणाकाराचा $\frac{१}{३}$, खंडाचे उंचीनें गुणावा, तो गुणाकार त्या समांतर खंडाचें घनफळ होईल.

उदाहरणें

प्रथम ज्याचीं दोनीं तोडें चौरस त्याचा बाजू १५·६ इंच आणि उंची २४ फुट असा एक समांतर खंड लांकडाचा तुकडा आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर १९$\frac{१}{२}$ घनफुट

दुसरें ज्याचीं दोनीं तोंडें पंचकोण त्याची बाजू १०.६ इंच आणि उंची ५ फुट असा एक समांतरखंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ९.३१०२५ घनफुट

तिसरें ज्याचे दोन तोंडांचे व्यास ८.४ आणि उंची १८ असा एक वर्तुळ शंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर ५२७.७८८८

चवथें ज्याचे दोन तोंडांचे परिघ २०, १० आणि उंची २५ असा एक वर्तुळशंकूचा समांतर खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ४६४.२१६

पांचवें एक पिंप आहे ज्याचे दोन शेवटांचे व्यास २०, २० आणि मध्याचा व्यास २८ आणि उंची ४० इंच आहे तेव्हां त्या पिपांत किती पाणी राहील (पिंप ह्मणजे दोन वर्तुळ शंकूचे समांतरखंड ज्यांचीं मोठीं तोंडें एकत्र सांधलेलीं असें)

खं म शे
उत्तर १ . . १ . ९.४४०,६७८४ पाणि

सातवें कृत्य

गोल अथवा गोलखंड याचें पृष्ठफळ करायाचें

प्रथम रीति गोलाचा आंस आणि गोलाचा परिघ हे परस्पर गुणून जो गुणाकार येईल तो गोलाचें पृष्ठफळ आलें

दुसरी

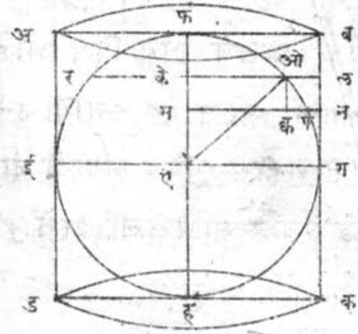
दुसरी रीति गोलाचे आंसाच्या वर्ग करून तो ३·१४१६ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्या गोलाचें पृष्ठफळ आलें

तिसरी रीति गोलाचे परिघाचा वर्ग करून तो ·३१८३ याणीं गुणावा अथवा ३·१४१६ याणीं भागावा भागाकार येईल तो त्या गोलाचें पृष्ठफळ आलें ※

टीप

※ यारीती पुढील गोल पृष्ठफळाचे सिद्धांतावरून उत्पन्न होतात· ह्मणजे कीं, गोलाचें पृष्ठफळ त्या गोलाचे भोंवतील शिलिंदराचे वांकड्ये बाजूचे पृष्ठफळा बरोबर आहे· अथवा, गोलाचें पृष्ठफळ, गोलाचे आंसावरील वर्तुळाचे चौपट आहे· तें याप्रमाणें सिद्ध होतें

अबकड एक शिलिंदर जें ईफगह गोलाभोंवती संलग्न आहे· फह आंसावर फबकह काटकोन चौकोन फिरल्या पासून शिलिंदर उत्पन्न जालें आणि फह आंसावर फगह अर्धवर्तुळ फिरल्या पासून गोल उत्पन्न जालें· आतां केल मन दोन रेघा फह आंसावर लंबकर, अशाकीं, शिलिंदराच्या आणि गोलाच्या लन आणि ओप खंड आंत घेतील, तेव्हां लनचे फिरण्या पासून जें शिलिंदर होतें त्याचें पृष्ठफळ, ओप कोसाचे फिरण्यापासून जो गोलखंड होतो त्याचे पृष्ठफळाबरोबर होईल· ह्मणोन मनांत आण कीं, केल आणि मन या दोन समांतर रेघा अतिसमीप आहेत, आतां एओ सांध, आणि लनशीं समांतर ओक्ष कर, तेव्हां एकेओ ओक्षप हे दोन त्रिकोण समकोन असोन ओप : ओक्ष अथवा लन : : एओ अथवा केल : केओ, ह्मणोन असा केल पासून परिघ होतो तो : केओ पासूनचे परिघाला, याजकरितां ओप × केओ रेघेचे परिघानें याचा काटकोन चौकोन, लन × केल रेघेचे परिघानें याचे काटकोन चौकोनाचे बरोबर आहे, ह्मणोन ओप कोस फिरून जें गोल खंडाचें पृष्ठफळ करितो तें, लनचे फिरण्या पासून जें शिलिंदर होतें त्याचे पृष्ठफळाचे बरोबर आहे·



आणि कोणत्येही जागेवर याप्रमाणे केलें असतां असेंच सिद्ध होईल, याजकरितां याचे कित्येक संख्यांची बेरीज ही बरोबर होईल, ह्मणजे फगह अर्धवर्तुळाचे फिरण्या पासून जें गोल उत्पन्न होतें त्याचें पृष्ठफळ, शिलिंदराचे बक उंचीचे फिरण्यापासून जें शिलिंदर उत्पन्न होतें त्याचे वांकड्ये बाजूचे पृष्ठफळा बरोबर आहे, त्याप्रमाणें ही कोणत्ये गोलखंडाचें पृष्ठफळ, असें फओचे फिरण्या पासून उत्पन्न जाल्ये गोलखंडाचें पृष्ठफळ, त्याचे प्रतियोगी बलचे फिरण्यापासून उत्पन्न जाल्ये शिलिंदराचे पृष्ठफळा बरोबर आहे·

प्रथम कुरलरी यांतून निघतें कीं गोलाचें पृष्ठफळ, त्याचे स्लोटये चार वर्तुळांचे बरोबर आहे,

अथवा

टीप गोलखंडाचें पृष्ठफळ करणें तर ज्या गोलाचा खंड आहे. त्या गोलाचा परिघ खंडाचे उंचीनें गुणावा तो गुणाकार त्या खंडाचें पृष्ठफळ होय.

उदाहरणें

प्रथम ज्याचा आंस ७ आणि परिघ २२ असा एक गोल आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १५४

दुसरें ज्याचा आंस २४ इंच असा एक गोल आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १८०९.५६१६

तिसरें पृथ्वीचा आंस ७९५७ $\frac{३}{४}$ मैल आणि परिघ २५००० मैल आहे तेव्हां पृथ्वीचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर १९८९४३७५० चौरस मैल

चवथें ज्याची उंची ९ इंच आणि त्याचे गोलाचा आंस ४२ इंच असा एक गोलखंड आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल.

उत्तर ११८७.५२४८ चौरस इंच

अथवा ईफगहई परिघ किंवा डकचा परिघ × बक उंचीनें अथवा फह व्यासानें याचे बरोबर आहे. दुसरी कुरलरी यांतूनही निघतें कीं गोलाचा कोणताही अवयव ह्मणजे खंड अथवा (ओन) ह्मणजे अनंतिमखंड याचें पृष्ठफळ याचे बरोबर आहे कीं तोचे गोलखंडाचा परिघ × त्याचे उंचीनें, याजकरितां गोलखंडांचीं पृष्ठफळें परस्परांस आहेत, जशा त्यांचा उंच्या.

पांचवें ज्याची उंची २ फुट आणि त्याचे गोलाच्या आंस १२½ फुट असा एक गोलखंड आहे त्याचें पृष्ठफळ काय होईल·

उत्तर ७८·५४ चौरसफुट

आठवें कृत्य
गोलाचें घनफळ करायाचें

प्रथम रीति गोलाचें पृष्ठफळ आंसानें गुणावें त्या गुणाकाराचा ⅙ त्या गोलाचें घनफळ होईल ※ अथवा याचेच बराबर हें आहे जे गोलाचे आंसाचा वर्ग करून परिघानें गुणावा गुणाकार येईल त्याचा ⅙ त्या गोलाचें घनफळ होईल·

दुसरी रीति गोलाचे आंसाचा घनकरावा आणि तो ·५२३६ यांणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्या गोलाचें घनफळ होईल·

तिसरी रीति गोलाचे परिघाचा घनकरावा आणि तो ·०१६८८ यांणीं गुणावा गुणाकार येईल तो त्या गोलाचें घनफळ होईल·

※ ह्मणोन आंस दाखवायास ड अक्षर घे, परिघ दाखवायास क घे, पृष्ठफळ अथवा त्याचे भोंवतील शिलिंदर दाखवायास स घे; आणि ३·१४१६ ही संख्या दाखवायास अ घे,

तेव्हां ¼ स = शिलिंदराचा पाया अथवा गोलाचें एक मोटें वर्तुळ; आणि ड शिलिंदराची उंची दाखवितो; याजकरितां ¼ डस शिलिंदराचें घनफळ आहे; परंतु भूमितीचे ११७ व्ये सिद्धांता पासून कोणतेंही गोल त्याचा भोंवतील शिलिंदराचे ⅔ आहे, ह्मणोन ¼ डसचे ⅔ = ⅙ डस गोलाचें घनफळ आहे; ह्मणोन ही प्रथम रीति आहे·

पुन: यास्तव कीं स पृष्ठफळ = अड²; याजकरितां ⅙ डस = ⅙ अड³ = ·५२३६ ड³; ह्मणजे ही दुसरी रीति आहे· पुन: ड = क ÷ अ; याजकरितां ⅙ अड³ = ⅙ क³ ÷ अ² = ·०१६८८ ही घनफळाची तिसरी रीति आहे·

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम ज्याचा आंस १२ असा एक गोळा आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ९०४·७८०८

दुसरें पृथ्वी गोलाचा परिघ २५००० मैल आहे तेव्हां पृथ्वीगोलाचें घनफळ काय होईल·

उत्तर २६३७५०००००००

नवें कृत्य

गोलखंडाचें घनफळ करायाचें·

※ प्रथम रीति ज्या गोलाचा खंड आहे त्या गोलाचे आंसाची तिपट करून त्यांत खंडाचे उंचीची दुपट वजा करावी बाकी राहील ती उंचीचे वर्गानें गुणावी आणि तो गुणाकार ·५२३६ यानीं गुणावा· गुणाकार येईल तो त्यागोलखंडाचें घनफळ होईल·

दुसरी

※ भूमितीचे ११७ व्ये सिद्धांताचे निसर्ये कुरलशी पासून स्पष्ट आलें कीं पफन गोलखंड, अबलओ शिलिंदर आणि अबमक शंकुखंड यांचे वजाबाकीचे बरोबर आहे·

आतां अब अथवा फह गोलाचा किंवा शिलिंदराचा व्यास दाखवायास ड अक्षर घे, गोलखंडाची उंची फके दाखवायास ह घे, त्या गोलखंडाचे पायाची त्रिज्या पके दाखवायास र घे, आणि ३·१४१६ हा

दुसरी रीति गोलखंडाचे पायाचे त्रिज्याचा वर्ग तिपटकरून नंतर खंडाचे उंचीच्या वर्ग करावा दोहोंची बेरीज घ्यावी नंतर ती बेरीज खंडाचे उंचीनें गुणावी तो गुणाकार .५२३६ याणीं गुणावा गुणाकार येईल तें त्या गोलखंडाचें घनफळ होईल.

ही संख्या दाखवायास अ घे, तेव्हां अबऐ शंकूचें घनफळ $= \frac{१}{४}$ अड$^{२} \times \frac{१}{३}$ फऐ $= \frac{१}{२४}$ अड^{३}; आणि अबऐ क्रमऐ हे दोन सरूप शंकू आहेत, याजकरितां फऐ^{३} : केऐ^{३} : :

$\frac{१}{२४}$ अड^{३} : $\frac{१}{२४}$ अड$^{३} \times \left(\frac{\frac{१}{२}ड - ह}{\frac{१}{२}ड}\right)^{३}$ हें

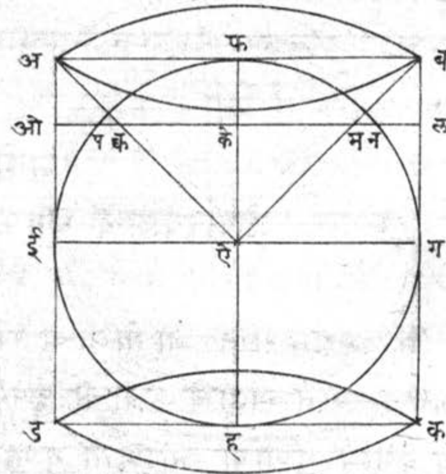
क्रमऐ शंकूचे बरोबर आहे; याजकरितां अबऐ शंकु क्रमऐ शंकु = अबमक शंकु खंड आहे, ह्मणजे याचे बरोबर कीं $\frac{१}{२४}$

अड$^{३} - \frac{१}{२४}$ अड$^{३} \times \left(\frac{\frac{१}{२}ड - ह}{\frac{१}{२}ड}\right)^{३} = \frac{१}{४}$

अडह$^{२} - \frac{१}{२}$ अडह$^{२} + \frac{१}{३}$ अह^{३}.

आतां $\frac{१}{४}$ अड^{२}ह = अबलओ शिलिंदराचें घनफळ आहे.

तेव्हां या दोहोंची वजा बाकी ही आहे कीं $\frac{१}{२}$ अडह$^{२} - \frac{१}{३}$ अह$^{३} = \frac{१}{६}$ अह$^{२} \times$ (३ड − २ह) ह्मणजे हें पफन गोलखंडाचें घनफळ होय; ह्मणोन ही प्रथम रीति आहे.



पुनः यास्तवच कीं भूमितीचे ८७ व्ये सिद्धांताचे कुरलरीवरून पके^{२} = फके × केह, ह्मणजे र^{२} = ह (ड − ह), याजकरितां ड $= \frac{र^{२}}{ह} +$ ह आणि, ३ड − २ह $= \frac{३र^{२}}{ह} + ह = \frac{३र^{२}+ह^{२}}{ह}$; ही किमत पूर्वरीतीचे समीकरणांत ठेविल्यानंतर त्याचें रूप याप्रमाणें होईल, $\frac{१}{६}$ अह$^{२} \times \frac{३र^{२}+ह^{२}}{ह} = \frac{१}{६}$ अह × (३र^{२} + ह^{२}) ही वर सांगीतलेली दुसरी रीति आहे.

टीप अर्ध गोलांत त्याचा खंड वजा केल्यानें त्याचे (ओनाचें) अनंतिम खंडाचें घनफळ होईल

उदाहरणें

उदाहरणें

प्रथम. ज्याची उंची २ फुट आणि गोलाचा व्यास ८ फुट असा एक गोलखंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल

उत्तर ४१.८८८

दुसरें ज्याची उंची ९ आणि पायाचा व्यास २० असा एक गोल खंड आहे त्याचें घनफळ काय होईल.

उत्तर १७९५.४२४४



TABLES

OF

LOGARITHMS.

&c.

कोष्टक

लाग्रतंमांचें

इत्यादि

कोष्टक

आंत

संख्यांचीं लाग्रतमें

आहेत

१ पासून १०००० पर्यंत

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या १ —— १०० पर्यंत   लाग्रतम १.००००००० —— २.०००००००

संख्या	लाग्रतमें	संख्या	लाग्रतम	संख्या	लाग्रतम	संख्या	लाग्रतम
१	०.०००००००	२६	१.४१४९७३३	५१	१.७०७५७०२	७६	१.८८०८१३६
२	०.३०१०३००	२७	१.४३१३६३८	५२	१.७१६००३३	७७	१.८८६४९०७
३	०.४७७१२१३	२८	१.४४७१५८०	५३	१.७२४२७५९	७८	१.८९२०९४६
४	०.६०२०६००	२९	१.४६२३९८०	५४	१.७३२३९३८	७९	१.८९७६२७१
५	०.६९८९७००	३०	१.४७७१२१३	५५	१.७४०३६२७	८०	१.९०३०९००
६	०.७७८१५१३	३१	१.४९१३६१७	५६	१.७४८१८८०	८१	१.९०८४८५०
७	०.८४५०९८०	३२	१.५०५१५००	५७	१.७५५८७४९	८२	१.९१३८१३९
८	०.९०३०९००	३३	१.५१८५१३९	५८	१.७६३४२८०	८३	१.९१९०७८१
९	०.९५४२४२५	३४	१.५३१४७८९	५९	१.७७०८५२०	८४	१.९२४२७९३
१०	१.०००००००	३५	१.५४४०६८०	६०	१.७७८१५१३	८५	१.९२९४१८९
११	१.०४१३९२७	३६	१.५५६३०२५	६१	१.७८५३२९८	८६	१.९३४४९८५
१२	१.०७९१८१२	३७	१.५६८२०१७	६२	१.७९२३९१७	८७	१.९३९५१९३
१३	१.११३९४३४	३८	१.५७९७८३६	६३	१.७९९३४०५	८८	१.९४४४८२७
१४	१.१४६१२८०	३९	१.५९१०६४६	६४	१.८०६१८००	८९	१.९४९३९००
१५	१.१७६०९१३	४०	१.६०२०६००	६५	१.८१२९१३४	९०	१.९५४२४२५
१६	१.२०४१२००	४१	१.६१२७८३९	६६	१.८१९५४३९	९१	१.९५९०४१४
१७	१.२३०४४८९	४२	१.६२३२४९३	६७	१.८२६०७४८	९२	१.९६३७८७८
१८	१.२५५२७२५	४३	१.६३३४६८५	६८	१.८३२५०८९	९३	१.९६८४८२९
१९	१.२७८७५३६	४४	१.६४३४५२७	६९	१.८३८८४९१	९४	१.९७३१२७९
२०	१.३०१०३००	४५	१.६५३२१२५	७०	१.८४५०९८०	९५	१.९७७७२३६
२१	१.३२२२१९३	४६	१.६६२७५७८	७१	१.८५१२५८३	९६	१.९८२२७१२
२२	१.३४२४२२७	४७	१.६७२०९७९	७२	१.८५७३३२५	९७	१.९८६७७१७
२३	१.३६१७२७८	४८	१.६८१२४१२	७३	१.८६३३२२९	९८	१.९९१२२६१
२४	१.३८०२११२	४९	१.६९०१९६१	७४	१.८६९२३१७	९९	१.९९५६३५२
२५	१.३९७९४००	५०	१.६९८९७००	७५	१.८७५०६१३	१००	२.०००००००
संख्या	लाग्रतम	संख्या	लाग्रतम	संख्या	लाग्रतम	संख्या	लाग्रतम

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतंमें

संख्या १००० —— १६०० लाग्रतंम ०००००० —— २०४१२०

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
१००	००००००	०००४३४	०००८६८	००१३०१	००१७३४	००२१६६	००२५९८	००३०२९	००३४६१	००३८९१	४३२
१०१	४३२१	४७५१	५१८०	५६०९	६०३८	६४६६	६८९४	७३२१	७७४८	८१७४	४२८
१०२	८६००	९०२६	९४५१	९८७६	०१०३००	०१०७२४	०१११४७	०११५७०	०११९९३	०१२४१५	४२४
१०३	०१२८३७	०१३२५९	०१३६८०	०१४१००	४५२०	४९४०	५३६०	५७७९	६१९७	६६१६	४२०
१०४	७०३३	७४५१	७८६८	८२८४	८७००	९११६	९५३२	९९४७	०२०३६१	०२०७७५	४१६
१०५	०२११८९	०२१६०३	०२२०१६	०२२४२८	०२२८४१	०२३२५२	०२३६६४	०२४०७५	४४८६	४८९६	४१२
१०६	५३०६	५७१५	६१२४	६५३३	६९४२	७३५०	७७५७	८१६४	८५७१	८९७८	४०८
१०७	९३८४	९७८९	०३०१९५	०३०६००	०३१००४	०३१४०८	०३१८१२	०३२२१६	०३२६१९	०३३०२१	४०४
१०८	०३३४२४	०३३८२६	४२२७	४६२८	५०२९	५४३०	५८३०	६२२९	६६२९	७०२८	४००
१०९	७४२६	७८२५	८२२३	८६२०	९०१७	९४१४	९८११	०४०२०७	०४०६०२	०४०९९८	३९७
११०	०४१३९३	०४१७८७	०४२१८२	०४२५७६	०४२९६९	०४३३६२	०४३७५५	०४४१४८	०४४५४०	०४४९३२	३९३
१११	५३२३	५७१४	६१०५	६४९५	६८८५	७२७५	७६६४	८०५३	८४४२	८८३०	३९०
११२	९२१८	९६०६	९९९३	०५०३८०	०५०७६६	०५११५३	०५१५३८	०५१९२४	०५२३०९	०५२६९४	३८६
११३	०५३०७८	०५३४६३	०५३८४६	४२३०	४६१३	४९९६	५३७८	५७६०	६१४२	६५२४	३८३
११४	६९०५	७२८६	७६६६	८०४६	८४२६	८८०५	९१८५	९५६३	९९४२	०६०३२०	३७९
११५	०६०६९८	०६१०७५	०६१४५२	०६१८२९	०६२२०६	०६२५८२	०६२९५८	०६३३३३	०६३७०९	४०८३	३७६
११६	४४५८	४८३२	५२०६	५५८०	५९५३	६३२६	६६९९	७०७१	७४४३	७८१४	३७३
११७	८१८६	८५५७	८९२८	९२९८	९६६८	०७००३८	०७०४०७	०७०७७६	०७११४५	०७१५१४	३७०
११८	०७१८८२	०७२२५०	०७२६१७	०७२९८५	०७३३५२	३७१८	४०८५	४४५१	४८१६	५१८२	३६६
११९	५५४७	५९१२	६२७६	६६४०	७००४	७३६८	७७३१	८०९४	८४५७	८८१९	३६३
१२०	०७९१८१	०७९५४३	०७९९०४	०८०२६६	०८०६२६	०८०९८७	०८१३४७	०८१७०७	०८२०६७	०८२४२६	३६०
१२१	०८२७८५	०८३१४४	०८३५०३	३८६१	४२१९	४५७६	४९३४	५२९१	५६४७	६००४	३५७
१२२	६३६०	६७१६	७०७१	७४२६	७७८१	८१३६	८४९०	८८४५	९१९८	९५५२	३५४
१२३	९९०५	०९०२५८	०९०६११	०९०९६३	०९१३१५	०९१६६७	०९२०१८	०९२३७०	०९२७२१	०९३०७१	३५२
१२४	०९३४२२	३७७२	४१२२	४४७१	४८२०	५१६९	५५१८	५८६६	६२१४	६५६२	३४९
१२५	६९१०	७२५७	७६०४	७९५१	८२९७	८६४४	८९९०	९३३५	९६८१	१०००२६	३४६
१२६	१००३७१	१००७१५	१०१०५९	१०१४०३	१०१७४७	१०२०९०	१०२४३४	१०२७७७	१०३११९	३४६२	३४३
१२७	३८०४	४१४६	४४८७	४८२८	५१६९	५५१०	५८५१	६१९१	६५३१	६८७०	३४१
१२८	७२१०	७५४९	७८८८	८२२७	८५६५	८९०३	९२४१	९५७८	९९१६	११०२५३	३३८
१२९	११०५९०	११०९२६	१११२६२	१११५९८	१११९३४	११२२७०	११२६०५	११२९४०	११३२७५	३६०९	३३५
१३०	११३९४३	११४२७७	११४६११	११४९४४	११५२७८	११५६११	११५९४३	११६२७६	११६६०८	११६९४०	३३३
१३१	७२७१	७६०३	७९३४	८२६५	८५९५	८९२६	९२५६	९५८६	९९१५	१२०२४५	३३०
१३२	१२०५७४	१२०९०३	१२१२३१	१२१५६०	१२१८८८	१२२२१६	१२२५४४	१२२८७१	१२३१९८	३५२५	३२८
१३३	३८५२	४१७८	४५०४	४८३०	५१५६	५४८१	५८०६	६१३१	६४५६	६७८१	३२५
१३४	७१०५	७४२९	७७५३	८०७६	८३९९	८७२२	९०४५	९३६८	९६९०	१३००१२	३२३
१३५	१३०३३४	१३०६५५	१३०९७७	१३१२९८	१३१६१९	१३१९३९	१३२२६०	१३२५८०	१३२९००	३२१९	३२१
१३६	३५३९	३८५८	४१७७	४४९६	४८१४	५१३३	५४५१	५७६९	६०८६	६४०३	३१८
१३७	६७२१	७०३७	७३५४	७६७०	७९८७	८३०३	८६१८	८९३४	९२४९	९५६४	३१६
१३८	९८७९	१४०१९४	१४०५०८	१४०८२२	१४११३६	१४१४५०	१४१७६३	१४२०७६	१४२३८९	१४२७०२	३१४
१३९	१४३०१५	३३२७	३६३९	३९५१	४२६३	४५७४	४८८५	५१९६	५५०७	५८१८	३११
१४०	१४६१२८	१४६४३८	१४६७४८	१४७०५८	१४७३६७	१४७६७६	१४७९८५	१४८२९४	१४८६०३	१४८९११	३०९
१४१	९२१९	९५२७	९८३४	१५०१४२	१५०४४९	१५०७५६	१५१०६३	१५१३७०	१५१६७६	१५१९८२	३०७
१४२	१५२२८८	१५२५९४	१५२९००	३२०५	३५१०	३८१५	४११९	४४२४	४७२८	५०३२	३०५
१४३	५३३६	५६४०	५९४३	६२४६	६५४९	६८५२	७१५४	७४५७	७७५९	८०६१	३०३
१४४	८३६२	८६६४	८९६५	९२६६	९५६७	९८६८	१६०१६८	१६०४६८	१६०७६८	१६१०६८	३००
१४५	१६१३६८	१६१६६७	१६१९६७	१६२२६६	१६२५६४	१६२८६३	३१६१	३४६०	३७५७	४०५५	२९८
१४६	४३५३	४६५०	४९४७	५२४४	५५४१	५८३८	६१३४	६४३०	६७२६	७०२२	२९६
१४७	७३१७	७६१३	७९०८	८२०३	८४९७	८७९२	९०८६	९३८०	९६७४	९९६८	२९४
१४८	१७०२६२	१७०५५५	१७०८४८	१७११४१	१७१४३४	१७१७२६	१७२०१९	१७२३११	१७२६०३	१७२८९५	२९३
१४९	३१८६	३४७८	३७६९	४०६०	४३५१	४६४१	४९३२	५२२२	५५१२	५८०२	२९०
१५०	१७६०९१	१७६३८१	१७६६७०	१७६९५९	१७७२४८	१७७५३६	१७७८२५	१७८११३	१७८४०१	१७८६८९	२८८
१५१	८९७७	९२६४	९५५२	९८३९	१८०१२६	१८०४१३	१८०६९९	१८०९८६	१८१२७२	१८१५५८	२८७
१५२	१८१८४४	१८२१२९	१८२४१५	१८२७००	२९८५	३२७०	३५५४	३८३९	४१२३	४४०७	२८५
१५३	४६९१	४९७५	५२५८	५५४२	५८२५	६१०८	६३९१	६६७४	६९५६	७२३९	२८३
१५४	७५२१	७८०३	८०८४	८३६६	८६४७	८९२८	९२०९	९४९०	९७७१	१९००५१	२८१
१५५	१९०३३२	१९०६१२	१९०८९२	१९११७१	१९१४५१	१९१७३०	१९२०१०	१९२२८८	१९२५६७	२८४६	२७९
१५६	३१२५	३४०३	३६८१	३९५९	४२३७	४५१४	४७९२	५०६९	५३४६	५६२३	२७८
१५७	५९००	६१७६	६४५३	६७२९	७००५	७२८१	७५५६	७८३२	८१०७	८३८२	२७६
१५८	८६५७	८९३२	९२०६	९४८१	९७५५	२०००२९	२००३०३	२००५७७	२००८५०	२०११२४	२७४
१५९	२०१३९७	२०१६७०	२०१९४३	२०२२१६	२०२४८८	२७६१	३०३३	३३०५	३५७७	३८४८	२७२
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या १६०० — २२००   लाग्रतम २०४१२० — ३४२४२३

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
१६०	२०४१२०	२०४३९१	२०४६६२	२०४९३३	२०५२०४	२०५४७५	२०५७४५	२०६०१६	२०६२८६	२०६५५६	२७१
१६१	६८२६	७०९५	७३६५	७६३४	७९०३	८१७२	८४४१	८७१०	८९७८	९२४७	२६९
१६२	९५१५	९७८३	२१००५१	२१०३१८	२१०५८६	२१०८५३	२१११२१	२११३८८	२११६५४	२११९२१	२६७
१६३	२१२१८८	२१२४५४	२७२०	२९८६	३२५२	३५१८	३७८३	४०४९	४३१४	४५७९	२६६
१६४	४८४४	५१०९	५३७३	५६३८	५९०२	६१६६	६४३०	६६९४	६९५७	७२२१	२६४
१६५	७४८४	७७४७	८०१०	८२७३	८५३५	८७९८	९०६०	९३२२	९५८४	९८४६	२६२
१६६	२२०१०८	२२०३७०	२२०६३१	२२०८९२	२२११५३	२२१४१४	२२१६७५	२२१९३६	२२२१९६	२२२४५६	२६१
१६७	२७१६	२९७६	३२३६	३४९६	३७५५	४०१५	४२७४	४५३३	४७९२	५०५१	२५९
१६८	५३०९	५५६८	५८२६	६०८४	६३४२	६६००	६८५८	७११५	७३७३	७६३०	२५८
१६९	७८८७	८१४४	८४००	८६५७	८९१३	९१७०	९४२६	९६८२	९९३८	२३०१९३	२५६
१७०	२३०४४९	२३०७०४	२३०९६०	२३१२१५	२३१४७०	२३१७२४	२३१९७९	२३२२३३	२३२४८८	२३२७४२	२५४
१७१	२९९६	३२५०	३५०४	३७५७	४०११	४२६४	४५१७	४७७०	५०२३	५२७६	२५३
१७२	५५२८	५७८१	६०३३	६२८५	६५३७	६७८८	७०४०	७२९१	७५४३	७७९४	२५२
१७३	८०४६	८२९७	८५४८	८७९९	९०४९	९२९९	९५५०	९८००	२४००५०	२४०३००	२५०
१७४	२४०५४९	२४०७९९	२४१०४८	२४१२९७	२४१५४६	२४१७९५	२४२०४४	२४२२९३	२५४१	२७९०	२४९
१७५	३०३८	३२८६	३५३४	३७८२	४०३०	४२७७	४५२५	४७७२	५०१९	५२६६	२४७
१७६	५५१३	५७५९	६००६	६२५२	६४९९	६७४५	६९९१	७२३६	७४८२	७७२८	२४६
१७७	७९७३	८२१९	८४६४	८७०९	८९५४	९१९८	९४४३	९६८७	९९३२	२५०१७६	२४५
१७८	२५०४२०	२५०६६४	२५०९०८	२५११५१	२५१३९५	२५१६३८	२५१८८१	२५२१२५	२५२३६८	२६१०	२४३
१७९	२८५३	३०९६	३३३८	३५८०	३८२२	४०६४	४३०६	४५४८	४७९०	५०३१	२४२
१८०	२५५२७३	२५५५१४	२५५७५५	२५५९९६	२५६२३७	२५६४७७	२५६७१८	२५६९५८	२५७१९८	२५७४३९	२४१
१८१	७६७९	७९१८	८१५८	८३९८	८६३७	८८७७	९११६	९३५५	९५९४	९८३३	२३९
१८२	२६००७१	२६०३१०	२६०५४८	२६०७८७	२६१०२५	२६१२६३	२६१५०१	२६१७३८	२६१९७६	२६२२१४	२३८
१८३	२४५१	२६८८	२९२५	३१६२	३३९९	३६३६	३८७३	४१०९	४३४५	४५८२	२३७
१८४	४८१८	५०५४	५२९०	५५२५	५७६१	५९९६	६२३२	६४६७	६७०२	६९३७	२३५
१८५	७१७२	७४०६	७६४१	७८७५	८११०	८३४४	८५७८	८८१२	९०४६	९२७९	२३४
१८६	९५१३	९७४६	९९८०	२७०२१३	२७०४४६	२७०६७९	२७०९१२	२७११४४	२७१३७७	२७१६०९	२३३
१८७	२७१८४२	२७२०७४	२७२३०६	२५३८	२७७०	३००१	३२३३	३४६४	३६९६	३९२७	२३२
१८८	४१५८	४३८९	४६२०	४८५०	५०८१	५३११	५५४२	५७७२	६००२	६२३२	२३०
१८९	६४६२	६६९१	६९२१	७१५१	७३८०	७६०९	७८३८	८०६७	८२९६	८५२५	२२९
१९०	२७८७५४	२७८९८२	२७९२११	२७९४३९	२७९६६७	२७९८९५	२८०१२३	२८०३५१	२८०५७८	२८०८०६	२२८
१९१	२८१०३३	२८१२६१	२८१४८८	२८१७१५	२८१९४२	२८२१६९	२३९६	२६२२	२८४९	३०७५	२२७
१९२	३३०१	३५२७	३७५३	३९७९	४२०५	४४३१	४६५६	४८८२	५१०७	५३३२	२२६
१९३	५५५७	५७८२	६००७	६२३२	६४५६	६६८१	६९०५	७१३०	७३५४	७५७८	२२५
१९४	७८०२	८०२५	८२४९	८४७३	८६९६	८९२०	९१४३	९३६६	९५८९	९८१२	२२३
१९५	२९००३५	२९०२५७	२९०४८०	२९०७०२	२९०९२५	२९११४७	२९१३६९	२९१५९१	२९१८१३	२९२०३४	२२२
१९६	२२५६	२४७८	२६९९	२९२०	३१४१	३३६३	३५८४	३८०४	४०२५	४२४६	२२१
१९७	४४६६	४६८७	४९०७	५१२७	५३४७	५५६७	५७८७	६००७	६२२६	६४४६	२२०
१९८	६६६५	६८८४	७१०४	७३२३	७५४२	७७६१	७९७९	८१९८	८४१६	८६३५	२१९
१९९	८८५३	९०७१	९२८९	९५०७	९७२५	९९४३	३००१६१	३००३७८	३००५९५	३००८१३	२१८
२००	३०१०३०	३०१२४७	३०१४६४	३०१६८१	३०१८९८	३०२११४	३०२३३१	३०२५४७	३०२७६४	३०२९८०	२१७
२०१	३१९६	३४१२	३६२८	३८४४	४०५९	४२७५	४४९१	४७०६	४९२१	५१३६	२१६
२०२	५३५१	५५६६	५७८१	५९९६	६२११	६४२५	६६३९	६८५४	७०६८	७२८२	२१४
२०३	७४९६	७७१०	७९२४	८१३७	८३५१	८५६४	८७७८	८९९१	९२०४	९४१७	२१३
२०४	९६३०	९८४३	३१००५६	३१०२६८	३१०४८१	३१०६९३	३१०९०६	३१११९८	३११३३०	३११५४२	२१२
२०५	३११७५४	३११९६६	२१७७	२३८९	२६००	२८१२	३०२३	३२३४	३४४५	३६५६	२११
२०६	३८६७	४०७८	४२८९	४४९९	४७१०	४९२०	५१३०	५३४०	५५५०	५७६०	२१०
२०७	५९७०	६१८०	६३९०	६५९९	६८०९	७०१८	७२२७	७४३६	७६४५	७८५४	२०९
२०८	८०६३	८२७२	८४८१	८६८९	८८९८	९१०६	९३१४	९५२२	९७३०	९९३८	२०८
२०९	३२०१४६	३२०३५४	३२०५६२	३२०७६९	३२०९७७	३२११८४	३२१३९१	३२१५९८	३२१८०५	३२२०१२	२०७
२१०	३२२२१९	३२२४२६	३२२६३३	३२२८३९	३२३०४६	३२३२५२	३२३४५८	३२३६६४	३२३८७१	३२४०७७	२०६
२११	४२८२	४४८८	४६९४	४८९९	५१०५	५३१०	५५१६	५७२१	५९२६	६१३१	२०५
२१२	६३३६	६५४१	६७४५	६९५०	७१५५	७३५९	७५६३	७७६७	७९७२	८१७६	२०४
२१३	८३८०	८५८३	८७८७	८९९१	९१९४	९३९८	९६०१	९८०४	३३०००८	३३०२११	२०३
२१४	३३०४१४	३३०६१७	३३०८१९	३३१०२२	३३१२२५	३३१४२७	३३१६३०	३३१८३२	२०३४	२२३६	२०२
२१५	२४३८	२६४०	२८४२	३०४४	३२४६	३४४७	३६४९	३८५०	४०५१	४२५३	२०२
२१६	४४५४	४६५५	४८५६	५०५६	५२५७	५४५८	५६५८	५८५९	६०५९	६२६०	२०१
२१७	६४६०	६६६०	६८६०	७०६०	७२६०	७४५९	७६५९	७८५८	८०५८	८२५७	२००
२१८	८४५६	८६५६	८८५५	९०५४	९२५३	९४५१	९६५०	९८४९	३४००४७	३४०२४६	१९९
२१९	३४०४४४	३४०६४२	३४०८४१	३४१०३९	३४१२३७	३४१४३५	३४१६३२	३४१८३०	२०२८	२२२५	१९८
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या २२०० —— २८०० लाग्रतम ३४२४२३ —— ४४७१५८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
२२०	३४२४२३	३४२६२०	३४२८१७	३४३०१४	३४३२१२	३४३४०९	३४३६०६	३४३८०२	३४३९९९	३४४१९६	१९७
२२१	४३९२	४५८९	४७८५	४९८१	५१७८	५३७४	५५७०	५७६६	५९६२	६१५७	१९६
२२२	६३५३	६५४९	६७४४	६९३९	७१३५	७३३०	७५२५	७७२०	७९१५	८११०	१९५
२२३	८३०५	८५००	८६९४	८८८९	९०८३	९२७८	९४७२	९६६६	९८६०	३५००५४	१९४
२२४	३५०२४८	३५०४४२	३५०६३६	३५०८२९	३५१०२३	३५१२१६	३५१४१०	३५१६०३	३५१७९६	१९८९	१९३
२२५	२१८२	२३७५	२५६८	२७६१	२९५४	३१४७	३३३९	३५३२	३७२४	३९१६	१९३
२२६	४१०८	४३०१	४४९३	४६८५	४८७६	५०६८	५२६०	५४५२	५६४३	५८३४	१९२
२२७	६०२६	६२१७	६४०८	६५९९	६७९०	६९८१	७१७२	७३६३	७५५४	७७४४	१९१
२२८	७९३५	८१२५	८३१६	८५०६	८६९६	८८८६	९०७६	९२६६	९४५६	९६४६	१९०
२२९	९८३५	३६००२५	३६०२१५	३६०४०४	३६०५९३	३६०७८३	३६०९७२	३६११६१	३६१३५०	३६१५३९	१८९
२३०	३६१७२८	३६१९१७	३६२१०५	३६२२९४	३६२४८२	३६२६७१	३६२८५९	३६३०४८	३६३२३६	३६३४२४	१८८
२३१	३६१२	३८००	३९८८	४१७६	४३६३	४५५१	४७३९	४९२६	५११३	५३०१	१८८
२३२	५४८८	५६७५	५८६२	६०४९	६२३६	६४२३	६६१०	६७९६	६९८३	७१६९	१८७
२३३	७३५६	७५४२	७७२९	७९१५	८१०१	८२८७	८४७३	८६५९	८८४५	९०३०	१८६
२३४	९२१६	९४०१	९५८७	९७७२	९९५८	३७०१४३	३७०३२८	३७०५१३	३७०६९८	३७०८८३	१८५
२३५	३७१०६८	३७१२५३	३७१४३७	३७१६२२	३७१८०६	१९९१	२१७५	२३६०	२५४४	२७२८	१८४
२३६	२९१२	३०९६	३२८०	३४६४	३६४७	३८३१	४०१५	४१९८	४३८२	४५६५	१८४
२३७	४७४८	४९३२	५११५	५२९८	५४८१	५६६४	५८४६	६०२९	६२१२	६३९४	१८३
२३८	६५७७	६७५९	६९४२	७१२४	७३०६	७४८८	७६७०	७८५२	८०३४	८२१६	१८२
२३९	८३९८	८५८०	८७६१	८९४३	९१२४	९३०६	९४८७	९६६८	९८४९	३८००३०	१८१
२४०	३८०२११	३८०३९२	३८०५७३	३८०७५४	३८०९३४	३८१११५	३८१२९६	३८१४७६	३८१६५६	३८१८३७	१८१
२४१	२०१७	२१९७	२३७७	२५५७	२७३७	२९१७	३०९७	३२७७	३४५६	३६३६	१८०
२४२	३८१५	३९९५	४१७४	४३५३	४५३३	४७१२	४८९१	५०७०	५२४९	५४२८	१७९
२४३	५६०६	५७८५	५९६४	६१४२	६३२१	६४९९	६६७७	६८५६	७०३४	७२१२	१७८
२४४	७३९०	७५६८	७७४६	७९२३	८१०१	८२७९	८४५६	८६३४	८८११	८९८९	१७८
२४५	९१६६	९३४३	९५२०	९६९८	९८७५	३९००५१	३९०२२८	३९०४०५	३९०५८२	३९०७५९	१७७
२४६	३९०९३५	३९१११२	३९१२८८	३९१४६४	३९१६४१	१८१७	१९९३	२१६९	२३४५	२५२१	१७६
२४७	२६९७	२८७३	३०४८	३२२४	३४००	३५७५	३७५१	३९२६	४१०१	४२७७	१७६
२४८	४४५२	४६२७	४८०२	४९७७	५१५२	५३२६	५५०१	५६७६	५८५०	६०२५	१७५
२४९	६१९९	६३७४	६५४८	६७२२	६८९६	७०७१	७२४५	७४१९	७५९२	७७६६	१७४
२५०	३९७९४०	३९८११४	३९८२८७	३९८४६१	३९८६३४	३९८८०८	३९८९८१	३९९१५४	३९९३२८	३९९५०१	१७३
२५१	९६७४	९८४७	४०००२०	४००१९२	४००३६५	४००५३८	४००७११	४००८८३	४०१०५६	४०१२२८	१७३
२५२	४०१४००	४०१५७३	१७४५	१९१७	२०८९	२२६१	२४३३	२६०५	२७७७	२९४९	१७२
२५३	३१२०	३२९२	३४६४	३६३५	३८०७	३९७८	४१४९	४३२०	४४९२	४६६३	१७१
२५४	४८३४	५००५	५१७५	५३४६	५५१७	५६८८	५८५८	६०२९	६१९९	६३७०	१७१
२५५	६५४०	६७१०	६८८१	७०५१	७२२१	७३९१	७५६१	७७३१	७९००	८०७०	१७०
२५६	८२४०	८४१०	८५७९	८७४९	८९१८	९०८७	९२५७	९४२६	९५९५	९७६४	१६९
२५७	९९३३	४१०१०२	४१०२७१	४१०४४०	४१०६०८	४१०७७७	४१०९४६	४१११४४	४१११२८३	४११४५१	१६९
२५८	४११६२०	१७८८	१९५६	२१२४	२२९२	२४६०	२६२८	२७९६	२९६४	३१३२	१६८
२५९	३३००	३४६७	३६३५	३८०२	३९७०	४१३७	४३०५	४४७२	४६३९	४८०६	१६७
२६०	४१४९७३	४१५१४०	४१५३०७	४१५४७४	४१५६४१	४१५८०८	४१५९७४	४१६१४१	४१६३०८	४१६४७४	१६७
२६१	६६४०	६८०७	६९७३	७१३९	७३०६	७४७२	७६३८	७८०४	७९७०	८१३५	१६६
२६२	८३०१	८४६७	८६३३	८७९८	८९६४	९१२९	९२९५	९४६०	९६२५	९७९१	१६५
२६३	९९५६	४२०१२१	४२०२८६	४२०४५१	४२०६१६	४२०७८१	४२०९४५	४२१११०	४२१२७५	४२१४३९	१६५
२६४	४२१६०४	१७६८	१९३३	२०९७	२२६१	२४२६	२५९०	२७५४	२९१८	३०८२	१६४
२६५	३२४६	३४१०	३५७३	३७३७	३९०१	४०६४	४२२८	४३९२	४५५५	४७१८	१६४
२६६	४८८२	५०४५	५२०८	५३७१	५५३४	५६९७	५८६०	६०२३	६१८६	६३४९	१६३
२६७	६५११	६६७४	६८३६	६९९९	७१६१	७३२४	७४८६	७६४८	७८११	७९७३	१६२
२६८	८१३५	८२९७	८४५९	८६२१	८७८२	८९४४	९१०६	९२६८	९४२९	९५९१	१६२
२६९	९७५२	९९१४	४३००७५	४३०२३६	४३०३९८	४३०५५९	४३०७२०	४३०८८१	४३१०४२	४३१२०३	१६१
२७०	४३१३६४	४३१५२५	४३१६८५	४३१८४६	४३२००७	४३२१६७	४३२३२८	४३२४८८	४३२६४९	४३२८०९	१६०
२७१	२९६९	३१२९	३२९०	३४५०	३६१०	३७७०	३९३०	४०९०	४२४९	४४०९	१६०
२७२	४५६९	४७२८	४८८८	५०४८	५२०७	५३६६	५५२६	५६८५	५८४४	६००३	१५९
२७३	६१६३	६३२२	६४८१	६६४०	६८००	६९५७	७११६	७२७५	७४३३	७५९२	१५९
२७४	७७५१	७९०९	८०६७	८२२६	८३८४	८५४२	८७००	८८५९	९०१७	९१७५	१५८
२७५	९३३३	९४९१	९६४८	९८०६	९९६४	४४०१२२	४४०२७९	४४०४३७	४४०५९४	४४०७५२	१५८
२७६	४४०९०९	४४१०६६	४४१२२४	४४१३८१	४४१५३८	१६९५	१८५२	२००९	२१६६	२३२३	१५७
२७७	२४८०	२६३६	२७९३	२९५०	३१०६	३२६३	३४१९	३५७६	३७३२	३८८८	१५७
२७८	४०४५	४२०१	४३५७	४५१३	४६६९	४८२५	४९८१	५१३७	५२९३	५४४८	१५६
२७९	५६०४	५७६०	५९१५	६०७१	६२२६	६३८२	६५३७	६६९२	६८४८	७००३	१५५
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्याओंलाग्रतमें

संख्या २८०० —— ३४०० लाग्रतम ४४७१५८ —— ५३१४७९

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
२८०	४४७१५८	४४७३१३	४४७४६८	४४७६२३	४४७७७८	४४७९३३	४४८०८८	४४८२४२	४४८३९७	४४८५५२	१५५
२८१	८७०६	८८६१	९०१५	९१७०	९३२४	९४७८	९६३३	९७८७	९९४१	४५००९५	१५४
२८२	४५०२४९	४५०४०३	४५०५५७	४५०७११	४५०८६५	४५१०१८	४५११७२	४५१३२६	४५१४७९	१६३३	१५४
२८३	१७८६	१९४०	२०९३	२२४७	२४००	२५५३	२७०६	२८५९	३०१२	३१६५	१५३
२८४	३३१८	३४७१	३६२४	३७७७	३९३०	४०८२	४२३५	४३८७	४५४०	४६९२	१५३
२८५	४८४५	४९९७	५१४९	५३०२	५४५४	५६०६	५७५८	५९१०	६०६२	६२१४	१५२
२८६	६३६६	६५१८	६६७०	६८२१	६९७३	७१२५	७२७६	७४२८	७५७९	७७३१	१५२
२८७	७८८२	८०३३	८१८४	८३३६	८४८७	८६३८	८७८९	८९४०	९०९१	९२४२	१५१
२८८	९३९२	९५४३	९६९४	९८४४	९९९५	४६०१४६	४६०२९६	४६०४४७	४६०५९७	४६०७४७	१५१
२८९	४६०८९८	४६१०४८	४६११९८	४६१३४८	४६१४९८	१६४८	१७९८	१९४८	२०९८	२२४८	१५०
२९०	४६२३९८	४६२५४८	४६२६९७	४६२८४७	४६२९९७	४६३१४६	४६३२९६	४६३४४५	४६३५९४	४६३७४४	१५०
२९१	३८९३	४०४२	४१९१	४३४०	४४८९	४६३९	४७८८	४९३६	५०८५	५२३४	१४९
२९२	५३८३	५५३२	५६८०	५८२९	५९७७	६१२६	६२७४	६४२३	६५७१	६७१९	१४९
२९३	६८६८	७०१६	७१६४	७३१२	७४६०	७६०८	७७५६	७९०४	८०५२	८२००	१४८
२९४	८३४७	८४९५	८६४३	८७९०	८९३८	९०८५	९२३३	९३८०	९५२७	९६७५	१४८
२९५	९८२२	९९६९	४७०११६	४७०२६३	४७०४१०	४७०५५७	४७०७०४	४७०८५१	४७०९९८	४७११४४	१४७
२९६	४७१२९२	४७१४३८	१५८५	१७३१	१८७८	२०२४	२१७१	२३१७	२४६३	२६१०	१४६
२९७	२७५६	२९०२	३०४८	३१९४	३३४०	३४८६	३६३२	३७७८	३९२४	४०६९	१४६
२९८	४२१६	४३६२	४५०८	४६५३	४७९९	४९४४	५०९०	५२३५	५३८१	५५२६	१४६
२९९	५६७१	५८१६	५९६२	६१०७	६२५२	६३९७	६५४२	६६८७	६८३२	६९७६	१४५
३००	४७७१२१	४७७२६६	४७७४११	४७७५५५	४७७७००	४७७८४४	४७७९८९	४७८१३३	४७८२७८	४७८४२२	१४५
३०१	८५६६	८७११	८८५५	८९९९	९१४३	९२८७	९४३१	९५७५	९७१९	९८६३	१४४
३०२	४८०००७	४८०१५१	४८०२९४	४८०४३८	४८०५८२	४८०७२५	४८०८६९	४८१०१२	४८११५६	४८१२९९	१४४
३०३	१४४३	१५८६	१७२९	१८७२	२०१६	२१५९	२३०२	२४४५	२५८८	२७३१	१४३
३०४	२८७४	३०१६	३१५९	३३०२	३४४५	३५८७	३७३०	३८७२	४०१५	४१५७	१४३
३०५	४३००	४४४२	४५८५	४७२७	४८६९	५०११	५१५३	५२९५	५४३७	५५७९	१४२
३०६	५७२१	५८६३	६००५	६१४७	६२८८	६४३०	६५७२	६७१४	६८५५	६९९७	१४२
३०७	७१३८	७२८०	७४२१	७५६३	७७०४	७८४५	७९८६	८१२७	८२६९	८४१०	१४१
३०८	८५५१	८६९२	८८३३	८९७४	९११४	९२५५	९३९६	९५३७	९६७७	९८१८	१४१
३०९	९९५८	४९००९९	४९०२३९	४९०३८०	४९०५२०	४९०६६१	४९०८०१	४९०९४१	४९१०८१	४९१२२२	१४०
३१०	४९१३६२	४९१५०२	४९१६४२	४९१७८२	४९१९२२	४९२०६२	४९२२०१	४९२३४१	४९२४८१	४९२६२१	१४०
३११	२७६०	२९००	३०४०	३१७९	३३१९	३४५८	३५९७	३७३७	३८७६	४०१५	१३९
३१२	४१५५	४२९४	४४३३	४५७२	४७११	४८५०	४९८९	५१२८	५२६७	५४०६	१३९
३१३	५५४४	५६८३	५८२२	५९६०	६०९९	६२३८	६३७६	६५१५	६६५३	६७९१	१३९
३१४	६९३०	७०६८	७२०६	७३४४	७४८३	७६२१	७७५९	७८९७	८०३५	८१७३	१३८
३१५	८३११	८४४८	८५८६	८७२४	८८६२	८९९९	९१३७	९२७५	९४१२	९५५०	१३८
३१६	९६८७	९८२४	९९६२	५०००९९	५००२३६	५००३७४	५००५११	५००६४८	५००७८५	५००९२२	१३७
३१७	५०१०५९	५०११९६	५०१३३३	१४७०	१६०७	१७४४	१८८०	२०१७	२१५४	२२९१	१३७
३१८	२४२७	२५६४	२७००	२८३७	२९७३	३१०९	३२४६	३३८२	३५१८	३६५५	१३६
३१९	३७९१	३९२७	४०६३	४१९९	४३३५	४४७१	४६०७	४७४३	४८७८	५०१४	१३६
३२०	५०५१५०	५०५२८६	५०५४२१	५०५५५७	५०५६९३	५०५८२८	५०५९६४	५०६०९९	५०६२३४	५०६३७०	१३६
३२१	६५०५	६६४०	६७७६	६९११	७०४६	७१८१	७३१६	७४५१	७५८६	७७२१	१३५
३२२	७८५६	७९९१	८१२६	८२६०	८३९५	८५३०	८६६४	८७९९	८९३३	९०६८	१३५
३२३	९२०३	९३३७	९४७१	९६०६	९७४०	९८७४	५१०००९	५१०१४३	५१०२७७	५१०४११	१३४
३२४	५१०५४५	५१०६७९	५१०८१३	५१०९४७	५११०८१	५११२१५	१३४९	१४८२	१६१६	१७५०	१३४
३२५	१८८३	२०१७	२१५१	२२८४	२४१८	२५५१	२६८४	२८१८	२९५१	३०८४	१३३
३२६	३२१८	३३५१	३४८४	३६१७	३७५०	३८८३	४०१६	४१४९	४२८२	४४१५	१३३
३२७	४५४८	४६८१	४८१३	४९४६	५०७९	५२११	५३४४	५४७६	५६०९	५७४१	१३३
३२८	५८७४	६००६	६१३९	६२७१	६४०३	६५३५	६६६८	६८००	६९३२	७०६४	१३२
३२९	७१९६	७३२८	७४६०	७५९२	७७२४	७८५५	७९८७	८११९	८२५१	८३८२	१३२
३३०	५१८५१४	५१८६४६	५१८७७७	५१८९०९	५१९०४०	५१९१७१	५१९३०३	५१९४३४	५१९५६६	५१९६९७	१३१
३३१	९८२८	९९५९	५२००९०	५२०२२१	५२०३५२	५२०४८४	५२०६१५	५२०७४५	५२०८७६	५२१००७	१३१
३३२	५२११३८	५२१२६९	१४००	१५३०	१६६१	१७९२	१९२२	२०५३	२१८३	२३१४	१३१
३३३	२४४४	२५७५	२७०५	२८३५	२९६६	३०९६	३२२६	३३५६	३४८६	३६१६	१३०
३३४	३७४६	३८७६	४००६	४१३६	४२६६	४३९६	४५२६	४६५६	४७८५	४९१५	१३०
३३५	५०४५	५१७४	५३०४	५४३४	५५६३	५६९३	५८२२	५९५१	६०८१	६२१०	१२९
३३६	६३३९	६४६९	६५९८	६७२७	६८५६	६९८५	७११४	७२४३	७३७२	७५०१	१२९
३३७	७६३०	७७५९	७८८८	८०१६	८१४५	८२७४	८४०२	८५३१	८६६०	८७८८	१२९
३३८	८९१७	९०४५	९१७४	९३०२	९४३०	९५५९	९६८७	९८१५	९९४३	५३००७२	१२८
३३९	५३०२००	५३०३२८	५३०४५६	५३०५८४	५३०७१२	५३०८४०	५३०९६८	५३१०९६	५३१२२३	१३५१	१२८
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ३४०१ —— ४००० लाग्रतमें ५३१४७९ —— ६०२०६०

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
३४०	५३१४७९	५३१६०७	५३१७३४	५३१८६२	५३१९९०	५३२११७	५३२२४५	५३२३७२	५३२५००	५३२६२७	१२८
३४१	२७५४	२८८२	३००९	३१३६	३२६४	३३९१	३५१८	३६४५	३७७२	३८९९	१२७
३४२	४०२६	४१५३	४२८०	४४०७	४५३४	४६६१	४७८७	४९१४	५०४१	५१६७	१२७
३४३	५२९४	५४२१	५५४७	५६७४	५८००	५९२७	६०५३	६१७९	६३०६	६४३२	१२६
३४४	६५५८	६६८५	६८११	६९३७	७०६३	७१८९	७३१५	७४४१	७५६७	७६९३	१२६
३४५	७८१९	७९४५	८०७१	८१९७	८३२२	८४४८	८५७४	८६९९	८८२५	८९५१	१२६
३४६	९०७६	९२०२	९३२७	९४५२	९५७८	९७०३	९८२९	९९५४	५४००७९	५४०२०४	१२५
३४७	५४०३३०	५४०४५५	५४०५८०	५४०७०५	५४०८३०	५४०९५५	५४१०८०	५४१२०५	१३३०	१४५४	१२५
३४८	१५७९	१७०४	१८२९	१९५३	२०७८	२२०३	२३२७	२४५२	२५७६	२७०१	१२५
३४९	२८२५	२९५०	३०७४	३१९९	३३२३	३४४७	३५७१	३६९६	३८२०	३९४४	१२४
३५०	५४४०६८	५४४१९२	५४४३१६	५४४४४०	५४४५६४	५४४६८८	५४४८१२	५४४९३६	५४५०६०	५४५१८३	१२४
३५१	५३०७	५४३१	५५५५	५६७८	५८०२	५९२५	६०४९	६१७२	६२९६	६४१९	१२४
३५२	६५४३	६६६६	६७८९	६९१३	७०३६	७१५९	७२८२	७४०५	७५२८	७६५२	१२३
३५३	७७७५	७८९८	८०२१	८१४४	८२६७	८३८९	८५१२	८६३५	८७५८	८८८१	१२३
३५४	९००३	९१२६	९२४९	९३७१	९४९४	९६१६	९७३९	९८६१	९९८४	५५०१०६	१२३
३५५	५५०२२८	५५०३५१	५५०४७३	५५०५९५	५५०७१७	५५०८४०	५५०९६२	५५१०८४	५५१२०६	१३२८	१२२
३५६	१४५०	१५७२	१६९४	१८१६	१९३८	२०५९	२१८१	२३०३	२४२५	२५४७	१२२
३५७	२६६८	२७९०	२९११	३०३३	३१५४	३२७६	३३९८	३५१९	३६४०	३७६२	१२१
३५८	३८८३	४००४	४१२६	४२४७	४३६८	४४८९	४६१०	४७३१	४८५२	४९७३	१२१
३५९	५०९४	५२१५	५३३६	५४५७	५५७८	५६९९	५८२०	५९४०	६०६१	६१८२	१२१
३६०	५५६३०३	५५६४२३	५५६५४४	५५६६६४	५५६७८५	५५६९०५	५५७०२६	५५७१४६	५५७२६७	५५७३८७	१२०
३६१	७५०७	७६२७	७७४८	७८६८	७९८८	८१०८	८२२८	८३४९	८४६९	८५८९	१२०
३६२	८७०९	८८२९	८९४८	९०६८	९१८८	९३०८	९४२८	९५४८	९६६७	९७८७	१२०
३६३	९९०७	५६००२६	५६०१४६	५६०२६५	५६०३८५	५६०५०४	५६०६२४	५६०७४३	५६०८६३	५६०९८२	११९
३६४	५६११०१	१२२१	१३४०	१४५९	१५७८	१६९८	१८१७	१९३६	२०५५	२१७४	११९
३६५	२२९३	२४१२	२५३१	२६५०	२७६९	२८८७	३००६	३१२५	३२४४	३३६२	११९
३६६	३४८१	३६००	३७१८	३८३७	३९५५	४०७४	४१९२	४३११	४४२९	४५४८	११९
३६७	४६६६	४७८४	४९०३	५०२१	५१३९	५२५७	५३७६	५४९४	५६१२	५७३०	११८
३६८	५८४८	५९६६	६०८४	६२०२	६३२०	६४३७	६५५५	६६७३	६७९१	६९०९	११८
३६९	७०२६	७१४४	७२६२	७३७९	७४९७	७६१४	७७३२	७८४९	७९६७	८०८४	११८
३७०	५६८२०२	५६८३१९	५६८४३६	५६८५५४	५६८६७१	५६८७८८	५६८९०५	५६९०२३	५६९१४०	५६९२५७	११७
३७१	९३७४	९४९१	९६०८	९७२५	९८४२	९९५९	५७००७६	५७०१९२	५७०३०९	५७०४२६	११७
३७२	५७०५४३	५७०६६०	५७०७७६	५७०८९३	५७१०१०	५७११२६	१२४३	[illegible]	[illegible]	१५९२	११७
३७३	१७०९	१८२५	१९४२	२०५८	२१७४	२२९१	२४०७	२५२३	२६३९	२७५५	११६
३७४	२८७२	२९८८	३१०४	३२२०	३३३६	३४५२	३५६८	३६८४	३८००	३९१५	११६
३७५	४०३१	४१४७	४२६३	४३७८	४४९४	४६१०	४७२६	४८४१	४९५७	५०७२	११६
३७६	५१८८	५३०३	५४१९	५५३४	५६५०	५७६५	५८८०	५९९६	६१११	६२२६	११५
३७७	६३४१	६४५७	६५७२	६६८७	६८०२	६९१७	७०३२	७१४७	७२६२	७३७७	११५
३७८	७४९२	७६०७	७७२२	७८३६	७९५१	८०६६	८१८१	८२९५	८४१०	८५२४	११५
३७९	८६३९	८७५४	८८६८	८९८३	९०९७	९२१२	९३२६	९४४१	९५५५	९६६९	११४
३८०	५७९७८४	५७९८९८	५८००१२	५८०१२६	५८०२४१	५८०३५५	५८०४६९	५८०५८३	५८०६९७	५८०८११	११४
३८१	५८०९२५	५८१०३९	११५३	१२६७	१३८१	१४९५	१६०८	१७२२	१८३६	१९५०	११४
३८२	२०६३	२१७७	२२९१	२४०४	२५१८	२६३१	२७४५	२८५८	२९७२	३०८५	११४
३८३	३१९९	३३१२	३४२६	३५३९	३६५२	३७६५	३८७९	३९९२	४१०५	४२१८	११३
३८४	४३३१	४४४४	४५५७	४६७०	४७८३	४८९६	५००९	५१२२	५२३५	५३४८	११३
३८५	५४६१	५५७४	५६८६	५७९९	५९१२	६०२४	६१३७	६२५०	६३६२	६४७५	११३
३८६	६५८७	६७००	६८१२	६९२५	७०३७	७१४९	७२६२	७३७४	७४८६	७५९९	११२
३८७	७७११	७८२३	७९३५	८०४७	८१६०	८२७२	८३८४	८४९६	८६०८	८७२०	११२
३८८	८८३२	८९४४	९०५६	९१६७	९२७९	९३९१	९५०३	९६१४	९७२६	९८३८	११२
३८९	९९५०	५९००६१	५९०१७३	५९०२८४	५९०३९६	५९०५०७	५९०६१९	५९०७३०	५९०८४२	५९०९५३	११२
३९०	५९१०६५	५९११७६	५९१२८७	५९१३९९	५९१५१०	५९१६२१	५९१७३२	५९१८४३	५९१९५४	५९२०६६	१११
३९१	२१७७	२२८८	२३९९	२५१०	२६२१	२७३२	२८४३	२९५४	३०६४	३१७५	१११
३९२	३२८६	३३९७	३५०८	३६१८	३७२९	३८४०	३९५०	४०६१	४१७१	४२८२	१११
३९३	४३९३	४५०३	४६१४	४७२४	४८३४	४९४५	५०५५	५१६५	५२७६	५३८६	११०
३९४	५४९६	५६०६	५७१७	५८२७	५९३७	६०४७	६१५७	६२६७	६३७७	६४८७	११०
३९५	६५९७	६७०७	६८१७	६९२७	७०३७	७१४६	७२५६	७३६६	७४७६	७५८५	११०
३९६	७६९५	७८०५	७९१४	८०२४	८१३४	८२४३	८३५३	८४६२	८५७२	८६८१	११०
३९७	८७९१	८९००	९००९	९११९	९२२८	९३३७	९४४६	९५५५	९६६५	९७७४	१०९
३९८	९८८३	९९९२	६००१०१	६००२१०	६००३१९	६००४२८	६००५३७	६००६४६	६००७५५	६००८६४	१०९
३९९	६००९७३	६०१०८२	११९१	१२९९	१४०८	१५१७	१६२५	१७३४	१८४३	१९५१	१०९
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्या-चीं लाग्रतंमें

संख्या ४००० —— ४६०० लाग्रतंम ६०२०६० —— ६६२७५८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
४००	६०२०६०	६०२१६९	६०२२७७	६०२३८६	६०२४९४	६०२६०३	६०२७११	६०२८१९	६०२९२८	६०३०३६	१०८
४०१	३१४४	३२५३	३३६१	३४६९	३५७७	३६८६	३७९४	३९०२	४०१०	४११८	१०८
४०२	४२२६	४३३४	४४४२	४५५०	४६५८	४७६६	४८७४	४९८२	५०८९	५१९७	१०८
४०३	५३०५	५४१३	५५२१	५६२८	५७३६	५८४४	५९५१	६०५९	६१६६	६२७४	१०८
४०४	६३८१	६४८९	६५९६	६७०४	६८११	६९१९	७०२६	७१३३	७२४१	७३४८	१०७
४०५	७४५५	७५६२	७६६९	७७७७	७८८४	७९९१	८०९८	८२०५	८३१२	८४१९	१०७
४०६	८५२६	८६३३	८७४०	८८४७	८९५४	९०६१	९१६७	९२७४	९३८१	९४८८	१०७
४०७	९५९४	९७०१	९८०८	९९१४	६१००२१	६१०१२८	६१०२३४	६१०३४१	६१०४४७	६१०५५४	१०७
४०८	६१०६६०	६१०७६७	६१०८७३	६१०९७९	१०८६	११९२	१२९८	१४०५	१५११	१६१७	१०६
४०९	१७२३	१८२९	१९३६	२०४२	२१४८	२२५४	२३६०	२४६६	२५७२	२६७८	१०६
४१०	६१२७८४	६१२८९०	६१२९९६	६१३१०२	६१३२०७	६१३३१३	६१३४१९	६१३५२५	६१३६३०	६१३७३६	१०६
४११	३८४२	३९४७	४०५३	४१५९	४२६४	४३७०	४४७५	४५८१	४६८६	४७९२	१०६
४१२	४८९७	५००३	५१०८	५२१३	५३१९	५४२४	५५२९	५६३४	५७४०	५८४५	१०५
४१३	५९५०	६०५५	६१६०	६२६५	६३७०	६४७६	६५८१	६६८६	६७९०	६८९५	१०५
४१४	७०००	७१०५	७२१०	७३१५	७४२०	७५२५	७६२९	७७३४	७८३९	७९४३	१०५
४१५	८०४८	८१५३	८२५७	८३६२	८४६६	८५७१	८६७६	८७८०	८८८४	८९८९	१०५
४१६	९०९३	९१९८	९३०२	९४०६	९५११	९६१५	९७१९	९८२४	९९२८	६२००३२	१०४
४१७	६२०१३६	६२०२४०	६२०३४४	६२०४४८	६२०५५२	६२०६५६	६२०७६०	६२०८६४	६२०९६८	१०७२	१०४
४१८	११७६	१२८०	१३८४	१४८८	१५९२	१६९५	१७९९	१९०३	२००७	२११०	१०४
४१९	२२१४	२३१८	२४२१	२५२५	२६२८	२७३२	२८३५	२९३९	३०४२	३१४६	१०४
४२०	६२३२४९	६२३३५३	६२३४५६	६२३५५९	६२३६६३	६२३७६६	६२३८६९	६२३९७३	६२४०७६	६२४१७९	१०३
४२१	४२८२	४३८५	४४८८	४५९१	४६९५	४७९८	४९०१	५००४	५१०७	५२१०	१०३
४२२	५३१२	५४१५	५५१८	५६२१	५७२४	५८२७	५९२९	६०३२	६१३५	६२३८	१०३
४२३	६३४०	६४४३	६५४६	६६४८	६७५१	६८५३	६९५६	७०५८	७१६१	७२६३	१०३
४२४	७३६६	७४६८	७५७१	७६७३	७७७५	७८७८	७९८०	८०८२	८१८५	८२८७	१०२
४२५	८३८९	८४९१	८५९३	८६९५	८७९७	८९००	९००२	९१०४	९२०६	९३०८	१०२
४२६	९४१०	९५१२	९६१३	९७१५	९८१७	९९१९	६३००२१	६३०१२३	६३०२२४	६३०३२६	१०२
४२७	६३०४२८	६३०५३०	६३०६३१	६३०७३३	६३०८३५	६३०९३६	१०३८	११३९	१२४१	१३४२	१०२
४२८	१४४४	१५४५	१६४७	१७४८	१८४९	१९५१	२०५२	२१५३	२२५५	२३५६	१०१
४२९	२४५७	२५५९	२६६०	२७६१	२८६२	२९६३	३०६४	३१६५	३२६६	३३६७	१०१
४३०	६३३४६८	६३३५६९	६३३६७०	६३३७७१	६३३८७२	६३३९७३	६३४०७४	६३४१७५	६३४२७६	६३४३७६	१००
४३१	४४७७	४५७८	४६७९	४७७९	४८८०	४९८१	५०८१	५१८२	५२८३	५३८३	१००
४३२	५४८४	५५८४	५६८५	५७८५	५८८६	५९८६	६०८७	६१८७	६२८७	६३८८	१००
४३३	६४८८	६५८८	६६८८	६७८९	६८८९	६९८९	७०८९	७१८९	७२९०	७३९०	१००
४३४	७४९०	७५९०	७६९०	७७९०	७८९०	७९९०	८०९०	८१९०	८२९०	८३८९	९९
४३५	८४८९	८५८९	८६८९	८७८९	८८८८	८९८८	९०८८	९१८८	९२८७	९३८७	९९
४३६	९४८६	९५८६	९६८६	९७८५	९८८५	९९८४	६४००८४	६४०१८३	६४०२८३	६४०३८२	९९
४३७	६४०४८१	६४०५८१	६४०६८०	६४०७७९	६४०८७९	६४०९७८	१०७७	११७७	१२७६	१३७५	९९
४३८	१४७४	१५७३	१६७२	१७७१	१८७१	१९७०	२०६९	२१६८	२२६७	२३६६	९९
४३९	२४६५	२५६३	२६६२	२७६१	२८६०	२९५९	३०५८	३१५६	३२५५	३३५४	९९
४४०	६४३४५३	६४३५५१	६४३६५०	६४३७४९	६४३८४७	६४३९४६	६४४०४४	६४४१४३	६४४२४२	६४४३४०	९८
४४१	४४३९	४५३७	४६३६	४७३४	४८३२	४९३१	५०२९	५१२७	५२२६	५३२४	९८
४४२	५४२२	५५२१	५६१९	५७१७	५८१५	५९१३	६०११	६११०	६२०८	६३०६	९८
४४३	६४०४	६५०२	६६००	६६९८	६७९६	६८९४	६९९२	७०८९	७१८७	७२८५	९८
४४४	७३८३	७४८१	७५७९	७६७६	७७७४	७८७२	७९६९	८०६७	८१६५	८२६२	९८
४४५	८३६०	८४५८	८५५५	८६५३	८७५०	८८४८	८९४५	९०४३	९१४०	९२३७	९७
४४६	९३३५	९४३२	९५३०	९६२७	९७२४	९८२१	९९१९	६५००१६	६५०११३	६५०२१०	९७
४४७	६५०३०८	६५०४०५	६५०५०२	६५०५९९	६५०६९६	६५०७९३	६५०८९०	०९८७	१०८४	११८१	९७
४४८	१२७८	१३७५	१४७२	१५६९	१६६६	१७६२	१८५९	१९५६	२०५३	२१५०	९७
४४९	२२४६	२३४३	२४४०	२५३६	२६३३	२७३०	२८२६	२९२३	३०१९	३११६	९७
४५०	६५३२१३	६५३३०९	६५३४०५	६५३५०२	६५३५९८	६५३६९५	६५३७९१	६५३८८८	६५३९८४	६५४०८०	९६
४५१	४१७७	४२७३	४३६९	४४६५	४५६२	४६५८	४७५४	४८५०	४९४६	५०४२	९६
४५२	५१३८	५२३५	५३३१	५४२७	५५२३	५६१९	५७१५	५८१०	५९०६	६००२	९६
४५३	६०९८	६१९४	६२९०	६३८६	६४८२	६५७७	६६७३	६७६९	६८६४	६९६०	९६
४५४	७०५६	७१५२	७२४७	७३४३	७४३८	७५३४	७६२९	७७२५	७८२०	७९१६	९६
४५५	८०११	८१०७	८२०२	८२९८	८३९३	८४८८	८५८४	८६७९	८७७४	८८७०	९५
४५६	८९६५	९०६०	९१५५	९२५०	९३४६	९४४१	९५३६	९६३१	९७२६	९८२१	९५
४५७	९९१६	६६००११	६६०१०६	६६०२०१	६६०२९६	६६०३९१	६६०४८६	६६०५८१	६६०६७६	६६०७७१	९५
४५८	६६०८६५	०९६०	१०५५	११५०	१२४५	१३३९	१४३४	१५२९	१६२३	१७१८	९५
४५९	१८१३	१९०७	२००२	२०९६	२१९१	२२८६	२३८०	२४७५	२५६९	२६६३	९५
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ४६०० —— ५२००   लाग्रतंम ६६२७५८ —— ७१६००३

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
४६०	६६२७५८	६६२८५२	६६२९४७	६६३०४१	६६३१३५	६६३२३०	६६३३२४	६६३४१८	६६३५१२	६६३६०७	९४
४६१	३७०१	३७९५	३८८९	३९८३	४०७८	४१७२	४२६६	४३६०	४४५४	४५४८	९४
४६२	४६४२	४७३६	४८३०	४९२४	५०१८	५११२	५२०६	५२९९	५३९३	५४८७	९४
४६३	५५८१	५६७५	५७६९	५८६२	५९५६	६०५०	६१४३	६२३७	६३३१	६४२४	९४
४६४	६५१८	६६१२	६७०५	६७९९	६८९२	६९८६	७०७९	७१७३	७२६६	७३६०	९४
४६५	७४५३	७५४६	७६४०	७७३३	७८२६	७९२०	८०१३	८१०६	८१९९	८२९३	९३
४६६	८३८६	८४७९	८५७२	८६६५	८७५९	८८५२	८९४५	९०३८	९१३१	९२२४	९३
४६७	९३१७	९४१०	९५०३	९५९६	९६८९	९७८२	९८७५	९९६७	६७००६०	६७०१५३	९३
४६८	६७०२४६	६७०३३९	६७०४३१	६७०५२४	६७०६१७	६७०७१०	६७०८०२	६७०८९५	०९८८	१०८०	९३
४६९	११७३	१२६५	१३५८	१४५१	१५४३	१६३६	१७२८	१८२१	१९१३	२००५	९३
४७०	६७२०९८	६७२१९०	६७२२८३	६७२३७५	६७२४६७	६७२५६०	६७२६५२	६७२७४४	६७२८३६	६७२९२९	९२
४७१	३०२१	३११३	३२०५	३२९७	३३९०	३४८२	३५७४	३६६६	३७५८	३८५०	९२
४७२	३९४२	४०३४	४१२६	४२१८	४३१०	४४०२	४४९४	४५८६	४६७७	४७६९	९२
४७३	४८६१	४९५३	५०४५	५१३७	५२२८	५३२०	५४१२	५५०३	५५९५	५६८७	९२
४७४	५७७८	५८७०	५९६२	६०५३	६१४५	६२३६	६३२८	६४१९	६५११	६६०२	९२
४७५	६६९४	६७८५	६८७६	६९६८	७०५९	७१५१	७२४२	७३३३	७४२४	७५१६	९१
४७६	७६०७	७६९८	७७८९	७८८१	७९७२	८०६३	८१५४	८२४५	८३३६	८४२७	९१
४७७	८५१८	८६०९	८७००	८७९१	८८८२	८९७३	९०६४	९१५५	९२४६	९३३७	९१
४७८	९४२८	९५१९	९६१०	९७००	९७९१	९८८२	९९७३	६८००६३	६८०१५४	६८०२४५	९१
४७९	६८०३३६	६८०४२६	६८०५१७	६८०६०७	६८०६९८	६८०७८९	६८०८७९	०९७०	१०६०	११५१	९१
४८०	६८१२४१	६८१३३२	६८१४२२	६८१५१३	६८१६०३	६८१६९३	६८१७८४	६८१८७४	६८१९६४	६८२०५५	९०
४८१	२१४५	२२३५	२३२६	२४१६	२५०६	२५९६	२६८६	२७७७	२८६७	२९५७	९०
४८२	३०४७	३१३७	३२२७	३३१७	३४०७	३४९७	३५८७	३६७७	३७६७	३८५७	९०
४८३	३९४७	४०३७	४१२७	४२१७	४३०७	४३९६	४४८६	४५७६	४६६६	४७५६	९०
४८४	४८४५	४९३५	५०२५	५११४	५२०४	५२९४	५३८३	५४७३	५५६३	५६५२	९०
४८५	५७४२	५८३१	५९२१	६०१०	६१००	६१८९	६२७९	६३६८	६४५८	६५४७	८९
४८६	६६३६	६७२६	६८१५	६९०४	६९९४	७०८३	७१७२	७२६१	७३५१	७४४०	८९
४८७	७५२९	७६१८	७७०७	७७९६	७८८६	७९७५	८०६४	८१५३	८२४२	८३३१	८९
४८८	८४२०	८५०९	८५९८	८६८७	८७७६	८८६५	८९५३	९०४२	९१३१	९२२०	८९
४८९	९३०९	९३९८	९४८६	९५७५	९६६४	९७५३	९८४१	९९३०	६९००१९	६९०१०७	८९
४९०	६९०१९६	६९०२८५	६९०३७३	६९०४६२	६९०५५०	६९०६३९	६९०७२८	६९०८१६	६९०९०५	६९०९९३	८९
४९१	१०८१	११७०	१२५८	१३४७	१४३५	१५२४	१६१२	१७००	१७८९	१८७७	८८
४९२	१९६५	२०५३	२१४२	२२३०	२३१८	२४०६	२४९४	२५८३	२६७१	२७५९	८८
४९३	२८४७	२९३५	३०२३	३१११	३१९९	३२८७	३३७५	३४६३	३५५१	३६३९	८८
४९४	३७२७	३८१५	३९०३	३९९१	४०७८	४१६६	४२५४	४३४२	४४३०	४५१७	८८
४९५	४६०५	४६९३	४७८१	४८६८	४९५६	५०४४	५१३१	५२१९	५३०७	५३९४	८८
४९६	५४८२	५५६९	५६५७	५७४४	५८३२	५९१९	६००७	६०९४	६१८२	६२६९	८७
४९७	६३५६	६४४४	६५३१	६६१८	६७०६	६७९३	६८८०	६९६८	७०५५	७१४२	८७
४९८	७२२९	७३१७	७४०४	७४९१	७५७८	७६६५	७७५२	७८३९	७९२६	८०१४	८७
४९९	८१०१	८१८८	८२७५	८३६२	८४४९	८५३५	८६२२	८७०९	८७९६	८८८३	८७
५००	६९८९७०	६९९०५७	६९९१४४	६९९२३१	६९९३१७	६९९४०४	६९९४९१	६९९५७८	६९९६६४	६९९७५१	८७
५०१	९८३८	९९२४	७०००११	७०००९८	७००१८४	७००२७१	७००३५८	७००४४४	७००५३१	७००६१७	८७
५०२	७००७०४	७००७९०	०८७७	०९६३	१०५०	११३६	१२२२	१३०९	१३९५	१४८२	८६
५०३	१५६८	१६५४	१७४१	१८२७	१९१३	१९९९	२०८६	२१७२	२२५८	२३४४	८६
५०४	२४३१	२५१७	२६०३	२६८९	२७७५	२८६१	२९४७	३०३३	३११९	३२०५	८६
५०५	३२९१	३३७७	३४६३	३५४९	३६३५	३७२१	३८०७	३८९३	३९७९	४०६५	८६
५०६	४१५१	४२३६	४३२२	४४०८	४४९४	४५७९	४६६५	४७५१	४८३७	४९२२	८६
५०७	५००८	५०९४	५१७९	५२६५	५३५०	५४३६	५५२२	५६०७	५६९३	५७७८	८६
५०८	५८६४	५९४९	६०३५	६१२०	६२०६	६२९१	६३७६	६४६२	६५४७	६६३२	८५
५०९	६७१८	६८०३	६८८८	६९७४	७०५९	७१४४	७२२९	७३१५	७४००	७४८५	८५
५१०	७०७५७०	७०७६५५	७०७७४०	७०७८२६	७०७९११	७०७९९६	७०८०८१	७०८१६६	७०८२५१	७०८३३६	८५
५११	८४२१	८५०६	८५९१	८६७६	८७६१	८८४६	८९३१	९०१५	९१००	९१८५	८५
५१२	९२७०	९३५५	९४४०	९५२४	९६०९	९६९४	९७७९	९८६३	९९४८	७१००३३	८५
५१३	७१०११७	७१०२०२	७१०२८७	७१०३७१	७१०४५६	७१०५४०	७१०६२५	७१०७१०	७१०७९४	०८७९	८५
५१४	०९६३	१०४८	११३२	१२१७	१३०१	१३८५	१४७०	१५५४	१६३९	१७२३	८४
५१५	१८०७	१८९२	१९७६	२०६०	२१४४	२२२९	२३१३	२३९७	२४८१	२५६६	८४
५१६	२६५०	२७३४	२८१८	२९०२	२९८६	३०७०	३१५४	३२३८	३३२३	३४०७	८४
५१७	३४९१	३५७५	३६५९	३७४२	३८२६	३९१०	३९९४	४०७८	४१६२	४२४६	८४
५१८	४३३०	४४१४	४४९७	४५८१	४६६५	४७४९	४८३३	४९१६	५०००	५०८४	८४
५१९	५१६७	५२५१	५३३५	५४१८	५५०२	५५८६	५६६९	५७५३	५८३६	५९२०	८४
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्याओंकी लाग्रतंमें

संख्या ५२०० —— ५८००   लाग्रतंम ७१६००३ —— ७६३४२८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
५२०	७१६००३	७१६०८७	७१६१७०	७१६२५४	७१६३३७	७१६४२१	७१६५०४	७१६५८८	७१६६७१	७१६७५४	८३
५२१	६८३८	६९२१	७००४	७०८८	७१७१	७२५४	७३३८	७४२१	७५०४	७५८७	८३
५२२	७६७१	७७५४	७८३७	७९२०	८००३	८०८६	८१६९	८२५३	८३३६	८४१९	८३
५२३	८५०२	८५८५	८६६८	८७५१	८८३४	८९१७	९०००	९०८३	९१६५	९२४८	८३
५२४	९३३१	९४१४	९४९७	९५८०	९६६३	९७४५	९८२८	९९११	९९९४	७२००७७	८३
५२५	७२०१५९	७२०२४२	७२०३२५	७२०४०७	७२०४९०	७२०५७३	७२०६५५	७२०७३८	७२०८२१	०९०३	८३
५२६	०९८६	१०६८	११५१	१२३३	१३१६	१३९८	१४८१	१५६३	१६४६	१७२८	८२
५२७	१८११	१८९३	१९७५	२०५८	२१४०	२२२२	२३०५	२३८७	२४६९	२५५२	८२
५२८	२६३४	२७१६	२७९८	२८८१	२९६३	३०४५	३१२७	३२०९	३२९१	३३७४	८२
५२९	३४५६	३५३८	३६२०	३७०२	३७८४	३८६६	३९४८	४०३०	४११२	४१९४	८२
५३०	७२४२७६	७२४३५८	७२४४४०	७२४५२२	७२४६०४	७२४६८५	७२४७६७	७२४८४९	७२४९३१	७२५०१३	८२
५३१	५०९५	५१७६	५२५८	५३४०	५४२२	५५०३	५५८५	५६६७	५७४८	५८३०	८२
५३२	५९१२	५९९३	६०७५	६१५६	६२३८	६३२०	६४०१	६४८३	६५६४	६६४६	८२
५३३	६७२७	६८०९	६८९०	६९७२	७०५३	७१३४	७२१६	७२९७	७३७९	७४६०	८१
५३४	७५४१	७६२३	७७०४	७७८५	७८६६	७९४८	८०२९	८११०	८१९१	८२७३	८१
५३५	८३५४	८४३५	८५१६	८५९७	८६७८	८७५९	८८४१	८९२२	९००३	९०८४	८१
५३६	९१६५	९२४६	९३२७	९४०८	९४८९	९५७०	९६५१	९७३२	९८१३	९८९३	८१
५३७	९९७४	७३००५५	७३०१३६	७३०२१७	७३०२९८	७३०३७८	७३०४५९	७३०५४०	७३०६२१	७३०७०२	८१
५३८	७३०७८२	०८६३	०९४४	१०२४	११०५	११८६	१२६६	१३४७	१४२८	१५०८	८१
५३९	१५८९	१६६९	१७५०	१८३०	१९११	१९९१	२०७२	२१५२	२२३३	२३१३	८१
५४०	७३२३९४	७३२४७४	७३२५५५	७३२६३५	७३२७१५	७३२७९६	७३२८७६	७३२९५६	७३३०३७	७३३११७	८०
५४१	३१९७	३२७८	३३५८	३४३८	३५१८	३५९८	३६७९	३७५९	३८३९	३९१९	८०
५४२	३९९९	४०७९	४१६०	४२४०	४३२०	४४००	४४८०	४५६०	४६४०	४७२०	८०
५४३	४८००	४८८०	४९६०	५०४०	५१२०	५२००	५२७९	५३५९	५४३९	५५१९	८०
५४४	५५९९	५६७९	५७५९	५८३८	५९१८	५९९८	६०७८	६१५७	६२३७	६३१७	८०
५४५	६३९७	६४७६	६५५६	६६३५	६७१५	६७९५	६८७४	६९५४	७०३४	७११३	८०
५४६	७१९३	७२७२	७३५२	७४३१	७५११	७५९०	७६७०	७७४९	७८२९	७९०८	७९
५४७	७९८७	८०६७	८१४६	८२२५	८३०५	८३८४	८४६३	८५४३	८६२२	८७०१	७९
५४८	८७८१	८८६०	८९३९	९०१८	९०९७	९१७७	९२५६	९३३५	९४१४	९४९३	७९
५४९	९५७२	९६५१	९७३१	९८१०	९८८९	९९६८	७४००४७	७४०१२६	७४०२०५	७४०२८४	७९
५५०	७४०३६३	७४०४४२	७४०५२१	७४०६००	७४०६७८	७४०७५७	७४०८३६	७४०९१५	७४०९९४	७४१०७३	७९
५५१	११५२	१२३०	१३०९	१३८८	१४६७	१५४६	१६२४	१७०३	१७८२	१८६०	७९
५५२	१९३९	२०१८	२०९६	२१७५	२२५४	२३३२	२४११	२४८९	२५६८	२६४६	७९
५५३	२७२५	२८०४	२८८२	२९६१	३०३९	३११८	३१९६	३२७५	३३५३	३४३१	७८
५५४	३५१०	३५८८	३६६७	३७४५	३८२३	३९०२	३९८०	४०५८	४१३६	४२१५	७८
५५५	४२९३	४३७१	४४४९	४५२८	४६०६	४६८४	४७६२	४८४०	४९१९	४९९७	७८
५५६	५०७५	५१५३	५२३१	५३०९	५३८७	५४६५	५५४३	५६२१	५६९९	५७७७	७८
५५७	५८५५	५९३३	६०११	६०८९	६१६७	६२४५	६३२३	६४०१	६४७९	६५५६	७८
५५८	६६३४	६७१२	६७९०	६८६८	६९४५	७०२३	७१०१	७१७९	७२५६	७३३४	७८
५५९	७४१२	७४८९	७५६७	७६४५	७७२२	७८००	७८७८	७९५५	८०३३	८११०	७८
५६०	७४८१८८	७४८२६६	७४८३४३	७४८४२१	७४८४९८	७४८५७६	७४८६५३	७४८७३१	७४८८०८	७४८८८५	७७
५६१	८९६३	९०४०	९११८	९१९५	९२७२	९३५०	९४२७	९५०४	९५८२	९६५९	७७
५६२	९७३६	९८१४	९८९१	९९६८	७५००४५	७५०१२३	७५०२००	७५०२७७	७५०३५४	७५०४३१	७७
५६३	७५०५०८	७५०५८६	७५०६६३	७५०७४०	०८१७	०८९४	०९७१	१०४८	११२५	१२०२	७७
५६४	१२७९	१३५६	१४३३	१५१०	१५८७	१६६४	१७४१	१८१८	१८९५	१९७२	७७
५६५	२०४८	२१२५	२२०२	२२७९	२३५६	२४३३	२५०९	२५८६	२६६३	२७४०	७७
५६६	२८१६	२८९३	२९७०	३०४७	३१२३	३२००	३२७७	३३५३	३४३०	३५०६	७७
५६७	३५८३	३६६०	३७३६	३८१३	३८८९	३९६६	४०४२	४११९	४१९५	४२७२	७७
५६८	४३४८	४४२५	४५०१	४५७८	४६५४	४७३०	४८०७	४८८३	४९६०	५०३६	७६
५६९	५११२	५१८९	५२६५	५३४१	५४१७	५४९४	५५७०	५६४६	५७२२	५७९९	७६
५७०	७५५८७५	७५५९५१	७५६०२७	७५६१०३	७५६१८०	७५६२५६	७५६३३२	७५६४०८	७५६४८४	७५६५६०	७६
५७१	६६३६	६७१२	६७८८	६८६४	६९४०	७०१६	७०९२	७१६८	७२४४	७३२०	७६
५७२	७३९६	७४७२	७५४८	७६२४	७७००	७७७५	७८५१	७९२७	८००३	८०७९	७६
५७३	८१५५	८२३०	८३०६	८३८२	८४५८	८५३३	८६०९	८६८५	८७६१	८८३६	७६
५७४	८९१२	८९८८	९०६३	९१३९	९२१४	९२९०	९३६६	९४४१	९५१७	९५९२	७६
५७५	९६६८	९७४३	९८१९	९८९४	९९७०	७६००४५	७६०१२१	७६०१९६	७६०२७२	७६०३४७	७५
५७६	७६०४२२	७६०४९८	७६०५७३	७६०६४९	७६०७२४	०७९९	०८७५	०९५०	१०२५	११०१	७५
५७७	११७६	१२५१	१३२६	१४०२	१४७७	१५५२	१६२७	१७०२	१७७८	१८५३	७५
५७८	१९२८	२००३	२०७८	२१५३	२२२८	२३०३	२३७८	२४५३	२५२९	२६०४	७५
५७९	२६७९	२७५४	२८२९	२९०४	२९७८	३०५३	३१२८	३२०३	३२७८	३३५३	७५
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लायनंमें

संख्या ५८०० — ६४०० लायनंम ७६३४२८ — ८०६१८०

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
५८०	७६३४२८	७६३५०३	७६३५७८	७६३६५३	७६३७२८	७६३८०३	७६३८७७	७६३९५२	७६४०२७	७६४१०१	७५
५८१	४१७६	४२५१	४३२६	४४००	४४७५	४५५०	४६२४	४६९९	४७७४	४८४८	७५
५८२	४९२३	४९९८	५०७२	५१४७	५२२१	५२९६	५३७०	५४४५	५५२०	५५९४	७५
५८३	५६६९	५७४३	५८१८	५८९२	५९६६	६०४१	६११५	६१९०	६२६४	६३३८	७४
५८४	६४१३	६४८७	६५६२	६६३६	६७१०	६७८५	६८५९	६९३३	७००७	७०८२	७४
५८५	७१५६	७२३०	७३०४	७३७९	७४५३	७५२७	७६०१	७६७५	७७४९	७८२३	७४
५८६	७८९८	७९७२	८०४६	८१२०	८१९४	८२६८	८३४२	८४१६	८४९०	८५६४	७४
५८७	८६३८	८७१२	८७८६	८८६०	८९३४	९००८	९०८२	९१५६	९२३०	९३०३	७४
५८८	९३७७	९४५१	९५२५	९५९९	९६७३	९७४६	९८२०	९८९४	९९६८	७७००४२	७४
५८९	७७०११५	७७०१८९	७७०२६३	७७०३३६	७७०४१०	७७०४८४	७७०५५७	७७०६३१	७७०७०५	०७७८	७४
५९०	७७०८५२	७७०९२६	७७०९९९	७७१०७३	७७११४६	७७१२२०	७७१२९३	७७१३६७	७७१४४०	७७१५१४	७४
५९१	१५८७	१६६१	१७३४	१८०८	१८८१	१९५५	२०२८	२१०२	२१७५	२२४८	७३
५९२	२३२२	२३९५	२४६८	२५४२	२६१५	२६८८	२७६२	२८३५	२९०८	२९८१	७३
५९३	३०५५	३१२८	३२०१	३२७४	३३४८	३४२१	३४९४	३५६७	३६४०	३७१३	७३
५९४	३७८६	३८६०	३९३३	४००६	४०७९	४१५२	४२२५	४२९८	४३७१	४४४४	७३
५९५	४५१७	४५९०	४६६३	४७३६	४८०९	४८८२	४९५५	५०२८	५१००	५१७३	७३
५९६	५२४६	५३१९	५३९२	५४६५	५५३८	५६१०	५६८३	५७५६	५८२९	५९०२	७३
५९७	५९७४	६०४७	६१२०	६१९३	६२६५	६३३८	६४११	६४८३	६५५६	६६२९	७३
५९८	६७०१	६७७४	६८४६	६९१९	६९९२	७०६४	७१३७	७२०९	७२८२	७३५४	७३
५९९	७४२७	७४९९	७५७२	७६४४	७७१७	७७८९	७८६२	७९३४	८००६	८०७९	७२
६००	७७८१५१	७७८२२४	७७८२९६	७७८३६८	७७८४४१	७७८५१३	७७८५८५	७७८६५८	७७८७३०	७७८८०२	७२
६०१	८८७४	८९४७	९०१९	९०९१	९१६३	९२३६	९३०८	९३८०	९४५२	९५२४	७२
६०२	९५९६	९६६९	९७४१	९८१३	९८८५	९९५७	७८००२९	७८०१०१	७८०१७३	७८०२४५	७२
६०३	७८०३१७	७८०३८९	७८०४६१	७८०५३३	७८०६०५	७८०६७७	०७४९	०८२१	०८९३	०९६५	७२
६०४	१०३७	११०९	११८१	१२५३	१३२४	१३९६	१४६८	१५४०	१६१२	१६८४	७२
६०५	१७५५	१८२७	१८९९	१९७१	२०४२	२११४	२१८६	२२५८	२३२९	२४०१	७२
६०६	२४७३	२५४४	२६१६	२६८८	२७५९	२८३१	२९०२	२९७४	३०४६	३११७	७२
६०७	३१८९	३२६०	३३३२	३४०३	३४७५	३५४६	३६१८	३६८९	३७६१	३८३२	७१
६०८	३९०४	३९७५	४०४६	४११८	४१८९	४२६१	४३३२	४४०३	४४७५	४५४६	७१
६०९	४६१७	४६८९	४७६०	४८३१	४९०२	४९७४	५०४५	५११६	५१८७	५२५९	७१
६१०	७८५३३०	७८५४०१	७८५४७२	७८५५४३	७८५६१५	७८५६८६	७८५७५७	७८५८२८	७८५८९९	७८५९७०	७१
६११	६०४१	६११२	६१८३	६२५४	६३२५	६३९६	६४६७	६५३८	६६०९	६६८०	७१
६१२	६७५१	६८२२	६८९३	६९६४	७०३५	७१०६	७१७७	७२४८	७३१९	७३९०	७१
६१३	७४६०	७५३१	७६०२	७६७३	७७४४	७८१५	७८८५	[illegible]	८०२७	८०९८	७१
६१४	८१६८	८२३९	८३१०	८३८१	८४५१	८५२२	८५९३	८६६३	८७३४	[illegible]	७१
६१५	८८७५	८९४६	९०१६	९०८७	९१५७	९२२८	९२९९	९३६९	९४४०	९५१०	७१
६१६	९५८१	९६५१	९७२२	९७९२	९८६३	९९३३	७९०००४	७९००७४	७९०१४४	७९०२१५	७१
६१७	७९०२८५	७९०३५६	७९०४२६	७९०४९६	७९०५६७	७९०६३७	०७०७	०७७८	०८४८	०९१८	७०
६१८	०९८८	१०५९	११२९	११९९	१२६९	१३४०	१४१०	१४८०	१५५०	१६२०	७०
६१९	१६९१	१७६१	१८३१	१९०१	१९७१	२०४१	२१११	२१८१	२२५२	२३२२	७०
६२०	७९२३९२	७९२४६२	७९२५३२	७९२६०२	७९२६७२	७९२७४२	७९२८१२	७९२८८२	७९२९५२	७९३०२२	७०
६२१	३०९२	३१६२	३२३१	३३०१	३३७१	३४४१	३५११	३५८१	३६५१	३७२१	७०
६२२	३७९०	३८६०	३९३०	४०००	४०७०	४१३९	४२०९	४२७९	४३४९	४४१८	७०
६२३	४४८८	४५५८	४६२७	४६९७	४७६७	४८३६	४९०६	४९७६	५०४५	५११५	७०
६२४	५१८५	५२५४	५३२४	५३९३	५४६३	५५३२	५६०२	५६७२	५७४१	५८११	७०
६२५	५८८०	५९४९	६०१९	६०८८	६१५८	६२२७	६२९७	६३६६	६४३६	६५०५	६९
६२६	६५७४	६६४४	६७१३	६७८२	६८५२	६९२१	६९९०	७०६०	७१२९	७१९८	६९
६२७	७२६८	७३३७	७४०६	७४७५	७५४५	७६१४	७६८३	७७५२	७८२१	७८९०	६९
६२८	७९६०	८०२९	८०९८	८१६७	८२३६	८३०५	८३७४	८४४३	८५१३	८५८२	६९
६२९	८६५१	८७२०	८७८९	८८५८	८९२७	८९९६	९०६५	९१३४	९२०३	९२७२	६९
६३०	७९९३४१	७९९४०९	७९९४७८	७९९५४७	७९९६१६	७९९६८५	७९९७५४	७९९८२३	७९९८९२	७९९९६१	६९
६३१	८०००२९	८०००९८	८००१६७	८००२३६	८००३०५	८००३७३	८००४४२	८००५११	८००५८०	८००६४८	६९
६३२	०७१७	०७८६	०८५४	०९२३	०९९२	१०६१	११२९	११९८	१२६६	१३३५	६९
६३३	१४०४	१४७२	१५४१	१६०९	१६७८	१७४७	१८१५	१८८४	१९५२	२०२१	६९
६३४	२०८९	२१५८	२२२६	२२९५	२३६३	२४३२	२५००	२५६८	२६३७	२७०५	६९
६३५	२७७४	२८४२	२९१०	२९७९	३०४७	३११६	३१८४	३२५२	३३२१	३३८९	६८
६३६	३४५७	३५२५	३५९४	३६६२	३७३०	३७९८	३८६७	३९३५	४००३	४०७१	६८
६३७	४१३९	४२०८	४२७६	४३४४	४४१२	४४८०	४५४८	४६१६	४६८५	४७५३	६८
६३८	४८२१	४८८९	४९५७	५०२५	५०९३	५१६१	५२२९	५२९७	५३६५	५४३३	६८
६३९	५५०१	५५६९	५६३७	५७०५	५७७३	५८४१	५९०८	५९७६	६०४४	६११२	६८
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ६४०० —— ७००० लाग्रतम ८०६१८० —— ८४५०९८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
६४०	८०६१८०	८०६२४८	८०६३१६	८०६३८४	८०६४५१	८०६५१९	८०६५८७	८०६६५५	८०६७२३	८०६७९०	६८
६४१	६८५८	६९२६	६९९४	७०६१	७१२९	७१९७	७२६४	७३३२	७४००	७४६७	६८
६४२	७५३५	७६०३	७६७०	७७३८	७८०६	७८७३	७९४१	८००८	८०७६	८१४३	६८
६४३	८२११	८२७९	८३४६	८४१४	८४८१	८५४९	८६१६	८६८४	८७५१	८८१८	६७
६४४	८८८६	८९५३	९०२१	९०८८	९१५६	९२२३	९२९०	९३५८	९४२५	९४९२	६७
६४५	९५६०	९६२७	९६९४	९७६२	९८२९	९८९६	९९६४	८१००३१	८१००९८	८१०१६५	६७
६४६	८१०२३३	८१०३००	८१०३६७	८१०४३४	८१०५०१	८१०५६८	८१०६३६	०७०३	०७७०	०८३७	६७
६४७	०९०४	०९७१	१०३९	११०६	११७३	१२४०	१३०७	१३७४	१४४१	१५०८	६७
६४८	१५७५	१६४२	१७०९	१७७६	१८४३	१९१०	१९७७	२०४४	२१११	२१७८	६७
६४९	२२४५	२३१२	२३७९	२४४५	२५१२	२५७९	२६४६	२७१३	२७८०	२८४७	६७
६५०	८१२९१३	८१२९८०	८१३०४७	८१३११४	८१३१८०	८१३२४७	८१३३१४	८१३३८१	८१३४४८	८१३५१४	६७
६५१	३५८१	३६४८	३७१४	३७८१	३८४८	३९१४	३९८१	४०४८	४११४	४१८१	६७
६५२	४२४८	४३१४	४३८१	४४४७	४५१४	४५८१	४६४७	४७१४	४७८०	४८४७	६७
६५३	४९१३	४९८०	५०४६	५११३	५१७९	५२४६	५३१२	५३७८	५४४५	५५११	६६
६५४	५५७८	५६४४	५७११	५७७७	५८४३	५९१०	५९७६	६०४२	६१०९	६१७५	६६
६५५	६२४१	६३०८	६३७४	६४४०	६५०६	६५७३	६६३९	६७०५	६७७१	६८३८	६६
६५६	६९०४	६९७०	७०३६	७१०२	७१६८	७२३५	७३०१	७३६७	७४३३	७४९९	६६
६५७	७५६५	७६३१	७६९८	७७६४	७८३०	७८९६	७९६२	८०२८	८०९४	८१६०	६६
६५८	८२२६	८२९२	८३५८	८४२४	८४९०	८५५६	८६२२	८६८८	८७५४	८८२०	६६
६५९	८८८५	८९५१	९०१७	९०८३	९१४९	९२१५	९२८१	९३४६	९४१२	९४७८	६६
६६०	८१९५४४	८१९६१०	८१९६७६	८१९७४१	८१९८०७	८१९८७३	८१९९३८	८२०००४	८२००७०	८२०१३६	६६
६६१	८२०२०१	८२०२६७	८२०३३३	८२०३९८	८२०४६४	८२०५३०	८२०५९५	०६६१	०७२६	०७९२	६६
६६२	०८५८	०९२३	०९८९	१०५५	११२०	११८६	१२५१	१३१७	१३८२	१४४८	६६
६६३	१५१४	१५७९	१६४५	१७१०	१७७५	१८४१	१९०६	१९७२	२०३७	२१०३	६५
६६४	२१६८	२२३३	२२९९	२३६४	२४३०	२४९५	२५६०	२६२६	२६९१	२७५६	६५
६६५	२८२२	२८८७	२९५२	३०१८	३०८३	३१४८	३२१३	३२७८	३३४४	३४०९	६५
६६६	३४७४	३५३९	३६०४	३६७०	३७३५	३८००	३८६५	३९३०	३९९६	४०६१	६५
६६७	४१२६	४१९१	४२५६	४३२१	४३८६	४४५१	४५१६	४५८१	४६४६	४७११	६५
६६८	४७७६	४८४१	४९०६	४९७१	५०३६	५१०१	५१६६	५२३१	५२९६	५३६१	६५
६६९	५४२६	५४९१	५५५६	५६२१	५६८६	५७५१	५८१५	५८८०	५९४५	६०१०	६५
६७०	८२६०७५	८२६१४०	८२६२०४	८२६२६९	८२६३३४	८२६३९९	८२६४६४	८२६५२८	८२६५९३	८२६६५८	६५
६७१	६७२३	६७८७	६८५२	६९१७	६९८१	७०४६	७१११	७१७५	७२४०	७३०५	६५
६७२	७३६९	७४३४	७४९९	७५६३	७६२८	७६९२	७७५७	७८२१	७८८६	७९५१	६५
६७३	८०१५	८०७९	[illegible]	८२०९	८२७३	८३३८	८४०२	८४६७	८५३१	८५९५	६४
६७४	८६६०	८७२४	८७८९	८८५३	८९१८	८९८२	९०४६	९१११	९१७५	९२४०	६४
६७५	९३०४	९३६८	९४३२	९४९७	९५६१	९६२५	९६९०	९७५४	९८१८	९८८२	६४
६७६	९९४७	८३००११	८३००७५	८३०१३९	८३०२०४	८३०२६८	८३०३३२	८३०३९६	८३०४६०	८३०५२५	६४
६७७	८३०५८९	०६५३	०७१७	०७८१	०८४५	०९०९	०९७३	१०३७	११०२	११६६	६४
६७८	१२३०	१२९४	१३५८	१४२२	१४८६	१५५०	१६१४	१६७८	१७४२	१८०६	६४
६७९	१८७०	१९३४	१९९८	२०६२	२१२६	२१९०	२२५३	२३१७	२३८१	२४४५	६४
६८०	८३२५०९	८३२५७३	८३२६३७	८३२७००	८३२७६४	८३२८२८	८३२८९२	८३२९५६	८३३०२०	८३३०८३	६४
६८१	३१४७	३२११	३२७५	३३३८	३४०२	३४६६	३५३०	३५९३	३६५७	३७२१	६४
६८२	३७८४	३८४८	३९१२	३९७५	४०३९	४१०३	४१६६	४२३०	४२९४	४३५७	६४
६८३	४४२१	४४८४	४५४८	४६११	४६७५	४७३८	४८०२	४८६६	४९२९	४९९३	६४
६८४	५०५६	५१२०	५१८३	५२४७	५३१०	५३७३	५४३७	५५००	५५६४	५६२७	६३
६८५	५६९१	५७५४	५८१७	५८८१	५९४४	६००७	६०७१	६१३४	६१९७	६२६१	६३
६८६	६३२४	६३८७	६४५१	६५१४	६५७७	६६४१	६७०४	६७६७	६८३०	६८९४	६३
६८७	६९५७	७०२०	७०८३	७१४६	७२१०	७२७३	७३३६	७३९९	७४६२	७५२५	६३
६८८	७५८८	७६५२	७७१५	७७७८	७८४१	७९०४	७९६७	८०३०	८०९३	८१५६	६३
६८९	८२१९	८२८२	८३४५	८४०८	८४७१	८५३४	८५९७	८६६०	८७२३	८७८६	६३
६९०	८३८८४९	८३८९१२	८३८९७५	८३९०३८	८३९१०१	८३९१६४	८३९२२७	८३९२८९	८३९३५२	८३९४१५	६३
६९१	९४७८	९५४१	९६०४	९६६६	९७२९	९७९२	९८५५	९९१८	९९८१	८४००४३	६३
६९२	८४०१०६	८४०१६९	८४०२३२	८४०२९४	८४०३५७	८४०४२०	८४०४८२	८४०५४५	८४०६०८	०६७१	६३
६९३	०७३३	०७९६	०८५८	०९२१	०९८४	१०४६	११०९	११७१	१२३४	१२९६	६३
६९४	१३५९	१४२२	१४८४	१५४७	१६०९	१६७२	१७३४	१७९७	१८६०	१९२२	६३
६९५	१९८५	२०४७	२११०	२१७२	२२३५	२२९७	२३६०	२४२२	२४८४	२५४७	६२
६९६	२६०९	२६७१	२७३४	२७९६	२८५९	२९२१	२९८३	३०४६	३१०८	३१७०	६२
६९७	३२३३	३२९५	३३५७	३४२०	३४८२	३५४४	३६०६	३६६८	३७३१	३७९३	६२
६९८	३८५५	३९१७	३९८०	४०४२	४१०४	४१६६	४२२८	४२९१	४३५३	४४१५	६२
६९९	४४७७	४५३९	४६०१	४६६४	४७२६	४७८८	४८५०	४९१२	४९७४	५०३६	६२
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ७००० —— ७६०० लाग्रतम ८४५०९८ —— ८८०८१४

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
७००	८४५०९८	८४५१६०	८४५२२२	८४५२८४	८४५३४६	८४५४०८	८४५४७०	८४५५३२	८४५५९४	८४५६५६	६२
७०१	५७१८	५७८०	५८४२	५९०४	५९६६	६०२८	६०९०	६१५१	६२१३	६२७५	६२
७०२	६३३७	६३९९	६४६१	६५२३	६५८५	६६४६	६७०८	६७७०	६८३२	६८९४	६२
७०३	६९५५	७०१७	७०७९	७१४१	७२०२	७२६४	७३२६	७३८८	७४४९	७५११	६२
७०४	७५७३	७६३४	७६९६	७७५८	७८१९	७८८१	७९४३	८००४	८०६६	८१२८	६२
७०५	८१८९	८२५१	८३१२	८३७४	८४३५	८४९७	८५५९	८६२०	८६८२	८७४३	६२
७०६	८८०५	८८६६	८९२८	८९८९	९०५१	९११२	९१७४	९२३५	९२९७	९३५८	६१
७०७	९४१९	९४८१	९५४२	९६०४	९६६५	९७२६	९७८८	९८४९	९९११	९९७२	६१
७०८	८५००३३	८५००९५	८५०१५६	८५०२१७	८५०२७९	८५०३४०	८५०४०१	८५०४६२	८५०५२४	८५०५८५	६१
७०९	०६४६	०७०७	०७६९	०८३०	०८९१	०९५२	१०१४	१०७५	११३६	११९७	६१
७१०	८५१२५८	८५१३२०	८५१३८१	८५१४४२	८५१५०३	८५१५६४	८५१६२५	८५१६८६	८५१७४७	८५१८०९	६१
७११	१८७०	१९३१	१९९२	२०५३	२११४	२१७५	२२३६	२२९७	२३५८	२४१९	६१
७१२	२४८०	२५४१	२६०२	२६६३	२७२४	२७८५	२८४६	२९०७	२९६८	३०२९	६१
७१३	३०९०	३१५०	३२११	३२७२	३३३३	३३९४	३४५५	३५१६	३५७७	३६३७	६१
७१४	३६९८	३७५९	३८२०	३८८१	३९४१	४००२	४०६३	४१२४	४१८५	४२४५	६१
७१५	४३०६	४३६७	४४२८	४४८८	४५४९	४६१०	४६७०	४७३१	४७९२	४८५२	६१
७१६	४९१३	४९७४	५०३४	५०९५	५१५६	५२१६	५२७७	५३३७	५३९८	५४५९	६१
७१७	५५१९	५५८०	५६४०	५७०१	५७६१	५८२२	५८८२	५९४३	६००३	६०६४	६१
७१८	६१२४	६१८५	६२४५	६३०६	६३६६	६४२७	६४८७	६५४८	६६०८	६६६८	६०
७१९	६७२९	६७८९	६८५०	६९१०	६९७०	७०३१	७०९१	७१५२	७२१२	७२७२	६०
७२०	८५७३३२	८५७३९३	८५७४५३	८५७५१३	८५७५७४	८५७६३४	८५७६९४	८५७७५५	८५७८१५	८५७८७५	६०
७२१	७९३५	७९९५	८०५६	८११६	८१७६	८२३६	८२९७	८३५७	८४१७	८४७७	६०
७२२	८५३७	८५९७	८६५७	८७१८	८७७८	८८३८	८८९८	८९५८	९०१८	९०७८	६०
७२३	९१३८	९१९८	९२५८	९३१८	९३७९	९४३९	९४९९	९५५९	९६१९	९६७९	६०
७२४	९७३९	९७९९	९८५९	९९१८	९९७८	८६००३८	८६००९८	८६०१५८	८६०२१८	८६०२७८	६०
७२५	८६०३३८	८६०३९८	८६०४५८	८६०५१८	८६०५७८	०६३७	०६९७	०७५७	०८१७	०८७७	६०
७२६	०९३७	०९९६	१०५६	१११६	११७६	१२३६	१२९५	१३५५	१४१५	१४७५	६०
७२७	१५३४	१५९४	१६५४	१७१४	१७७३	१८३३	१८९३	१९५२	२०१२	२०७२	६०
७२८	२१३१	२१९१	२२५१	२३१०	२३७०	२४३०	२४८९	२५४९	२६०८	२६६८	६०
७२९	२७२८	२७८७	२८४७	२९०६	२९६६	३०२५	३०८५	३१४४	३२०४	३२६३	६०
७३०	८६३३२३	८६३३८२	८६३४४२	८६३५०१	८६३५६१	८६३६२०	८६३६८०	८६३७३९	८६३७९९	८६३८५८	५९
७३१	३९१७	३९७७	४०३६	४०९६	४१५५	४२१४	४२७४	४३३३	४३९२	४४५२	५९
७३२	४५११	४५७०	४६३०	४६८९	४७४८	४८०८	४८६७	४९२६	४९८५	५०४५	५९
७३३	५१०४	५१६३	५२२२	५२८२	५३४१	५४००	५४५९	५५१९	५५७८	५६३७	५९
७३४	५६९६	५७५५	५८१४	५८७४	५९३३	५९९२	६०५१	६११०	६१६९	६२२८	५९
७३५	६२८७	६३४६	६४०५	६४६५	६५२४	६५८३	६६४२	६७०१	६७६०	६८१९	५९
७३६	६८७८	६९३७	६९९६	७०५५	७११४	७१७३	७२३२	७२९१	७३५०	७४०९	५९
७३७	७४६७	७५२६	७५८५	७६४४	७७०३	७७६२	७८२१	७८८०	७९३९	७९९८	५९
७३८	८०५६	८११५	८१७४	८२३३	८२९२	८३५०	८४०९	८४६८	८५२७	८५८६	५९
७३९	८६४४	८७०३	८७६२	८८२१	८८७९	८९३८	८९९७	९०५६	९११४	९१७३	५९
७४०	८६९२३२	८६९२९०	८६९३४९	८६९४०८	८६९४६६	८६९५२५	८६९५८४	८६९६४२	८६९७०१	८६९७६०	५९
७४१	९८१८	९८७७	९९३५	९९९४	८७००५३	८७०१११	८७०१७०	८७०२२८	८७०२८७	८७०३४५	५९
७४२	८७०४०४	८७०४६२	८७०५२१	८७०५७९	०६३८	०६९६	०७५५	०८१३	०८७२	०९३०	५८
७४३	०९८९	१०४७	११०६	११६४	१२२३	१२८१	१३३९	१३९८	१४५६	१५१५	५८
७४४	१५७३	१६३१	१६९०	१७४८	१८०६	१८६५	१९२३	१९८१	२०४०	२०९८	५८
७४५	२१५६	२२१५	२२७३	२३३१	२३८९	२४४८	२५०६	२५६४	२६२२	२६८१	५८
७४६	२७३९	२७९७	२८५५	२९१३	२९७२	३०३०	३०८८	३१४६	३२०४	३२६२	५८
७४७	३३२१	३३७९	३४३७	३४९५	३५५३	३६११	३६६९	३७२७	३७८५	३८४४	५८
७४८	३९०२	३९६०	४०१८	४०७६	४१३४	४१९२	४२५०	४३०८	४३६६	४४२४	५८
७४९	४४८२	४५४०	४५९८	४६५६	४७१४	४७७२	४८३०	४८८८	४९४५	५००३	५८
७५०	८७५०६१	८७५११९	८७५१७७	८७५२३५	८७५२९३	८७५३५१	८७५४०९	८७५४६६	८७५५२४	८७५५८२	५८
७५१	५६४०	५६९८	५७५६	५८१३	५८७१	५९२९	५९८७	६०४५	६१०२	६१६०	५८
७५२	६२१८	६२७६	६३३३	६३९१	६४४९	६५०७	६५६४	६६२२	६६८०	६७३७	५८
७५३	६७९५	६८५३	६९१०	६९६८	७०२६	७०८३	७१४१	७१९९	७२५६	७३१४	५८
७५४	७३७१	७४२९	७४८७	७५४४	७६०२	७६५९	७७१७	७७७४	७८३२	७८८९	५८
७५५	७९४७	८००४	८०६२	८११९	८१७७	८२३४	८२९२	८३४९	८४०७	८४६४	५७
७५६	८५२२	८५७९	८६३७	८६९४	८७५२	८८०९	८८६६	८९२४	८९८१	९०३९	५७
७५७	९०९६	९१५३	९२११	९२६८	९३२५	९३८३	९४४०	९४९७	९५५५	९६१२	५७
७५८	९६६९	९७२६	९७८४	९८४१	९८९८	९९५६	८८००१३	८८००७०	८८०१२७	८८०१८५	५७
७५९	८८०२४२	८८०२९९	८८०३५६	८८०४१३	८८०४७१	८८०५२८	०५८५	०६४२	०६९९	०७५६	५७
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक
संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ७६०० — ८२०० लाग्रतमें ८८०८१४ — ९१३८१४

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
७६०	८८०८१४	८८०८७१	८८०९२८	८८०९८५	८८१०४२	८८१०९९	८८११५६	८८१२१३	८८१२७१	८८१३२८	५७
७६१	१३८५	१४४२	१४९९	१५५६	१६१३	१६७०	१७२७	१७८४	१८४१	१८९८	५७
७६२	१९५५	२०१२	२०६९	२१२६	२१८३	२२४०	२२९७	२३५४	२४११	२४६८	५७
७६३	२५२५	२५८१	२६३८	२६९५	२७५२	२८०९	२८६६	२९२३	२९८०	३०३७	५७
७६४	३०९३	३१५०	३२०७	३२६४	३३२१	३३७७	३४३४	३४९१	३५४८	३६०५	५७
७६५	३६६१	३७१८	३७७५	३८३२	३८८८	३९४५	४००२	४०५९	४११५	४१७२	५७
७६६	४२२९	४२८५	४३४२	४३९९	४४५५	४५१२	४५६९	४६२५	४६८२	४७३९	५७
७६७	४७९५	४८५२	४९०९	४९६५	५०२२	५०७८	५१३५	५१९२	५२४८	५३०५	५७
७६८	५३६१	५४१८	५४७४	५५३१	५५८७	५६४४	५७००	५७५७	५८१३	५८७०	५७
७६९	५९२६	५९८३	६०३९	६०९६	६१५२	६२०९	६२६५	६३२१	६३७८	६४३४	५६
७७०	८८६४९१	८८६५४७	८८६६०४	८८६६६०	८८६७१६	८८६७७३	८८६८२९	८८६८८५	८८६९४२	८८६९९८	५६
७७१	७०५४	७१११	७१६७	७२२३	७२८०	७३३६	७३९२	७४४९	७५०५	७५६१	५६
७७२	७६१७	७६७४	७७३०	७७८६	७८४२	७८९८	७९५५	८०११	८०६७	८१२३	५६
७७३	८१७९	८२३६	८२९२	८३४८	८४०४	८४६०	८५१६	८५७३	८६२९	८६८५	५६
७७४	८७४१	८७९७	८८५३	८९०९	८९६५	९०२१	९०७७	९१३४	९१९०	९२४६	५६
७७५	९३०२	९३५८	९४१४	९४७०	९५२६	९५८२	९६३८	९६९४	९७५०	९८०६	५६
७७६	९८६२	९९१८	९९७४	८९००३०	८९००८६	८९०१४१	८९०१९७	८९०२५३	८९०३०९	८९०३६५	५६
७७७	८९०४२१	८९०४७७	८९०५३३	०५८९	०६४५	०७००	०७५६	०८१२	०८६८	०९२४	५६
७७८	०९८०	१०३५	१०९१	११४७	१२०३	१२५९	१३१४	१३७०	१४२६	१४८२	५६
७७९	१५३७	१५९३	१६४९	१७०५	१७६०	१८१६	१८७२	१९२८	१९८३	२०३९	५६
७८०	८९२०९५	८९२१५०	८९२२०६	८९२२६२	८९२३१७	८९२३७३	८९२४२९	८९२४८४	८९२५४०	८९२५९५	५६
७८१	२६५१	२७०७	२७६२	२८१८	२८७३	२९२९	२९८५	३०४०	३०९६	३१५१	५६
७८२	३२०७	३२६२	३३१८	३३७३	३४२९	३४८४	३५४०	३५९५	३६५१	३७०६	५६
७८३	३७६२	३८१७	३८७३	३९२८	३९८४	४०३९	४०९४	४१५०	४२०५	४२६१	५५
७८४	४३१६	४३७१	४४२७	४४८२	४५३८	४५९३	४६४८	४७०४	४७५९	४८१४	५५
७८५	४८७०	४९२५	४९८०	५०३६	५०९१	५१४६	५२०१	५२५७	५३१२	५३६७	५५
७८६	५४२३	५४७८	५५३३	५५८८	५६४४	५६९९	५७५४	५८०९	५८६४	५९२०	५५
७८७	५९७५	६०३०	६०८५	६१४०	६१९५	६२५१	६३०६	६३६१	६४१६	६४७१	५५
७८८	६५२६	६५८१	६६३६	६६९२	६७४७	६८०२	६८५७	६९१२	६९६७	७०२२	५५
७८९	७०७७	७१३२	७१८७	७२४२	७२९७	७३५२	७४०७	७४६२	७५१७	७५७२	५५
७९०	८९७६२७	८९७६८२	८९७७३७	८९७७९२	८९७८४७	८९७९०२	८९७९५७	८९८०१२	८९८०६७	८९८१२२	५५
७९१	८१७६	८२३१	८२८६	८३४१	८३९६	८४५१	८५०६	८५६१	८६१५	८६७०	५५
७९२	८७२५	८७८०	८८३५	८८९०	८९४४	८९९९	९०५४	९१०९	९१६४	९२१८	५५
७९३	९२७३	९३२८	९३८३	९४३७	९४९२	९५४७	९६०२	९६५६	९७११	९७६६	५५
७९४	९८२१	९८७५	९९३०	९९८५	९०००३९	९०००९४	९००१४९	९००२०३	९००२५८	९००३१२	५५
७९५	९००३६७	९००४२२	९००४७६	०५३१	०५८६	०६४०	०६९५	०७४९	०८०४	०८५९	५५
७९६	०९१३	०९६८	१०२२	१०७७	११३१	११८६	१२४०	१२९५	१३४९	१४०४	५५
७९७	१४५८	१५१३	१५६७	१६२२	१६७६	१७३१	१७८५	१८४०	१८९४	१९४८	५४
७९८	२००३	२०५७	२११२	२१६६	२२२१	२२७५	२३२९	२३८४	२४३८	२४९२	५४
७९९	२५४७	२६०१	२६५५	२७१०	२७६४	२८१८	२८७३	२९२७	२९८१	३०३६	५४
८००	९०३०९०	९०३१४४	९०३१९९	९०३२५३	९०३३०७	९०३३६१	९०३४१६	९०३४७०	९०३५२४	९०३५७८	५४
८०१	३६३३	३६८७	३७४१	३७९५	३८४९	३९०४	३९५८	४०१२	४०६६	४१२०	५४
८०२	४१७४	४२२९	४२८३	४३३७	४३९१	४४४५	४४९९	४५५३	४६०७	४६६१	५४
८०३	४७१६	४७७०	४८२४	४८७८	४९३२	४९८६	५०४०	५०९४	५१४८	५२०२	५४
८०४	५२५६	५३१०	५३६४	५४१८	५४७२	५५२६	५५८०	५६३४	५६८८	५७४२	५४
८०५	५७९६	५८५०	५९०४	५९५८	६०१२	६०६६	६११९	६१७३	६२२७	६२८१	५४
८०६	६३३५	६३८९	६४४३	६४९७	६५५१	६६०४	६६५८	६७१२	६७६६	६८२०	५४
८०७	६८७४	६९२७	६९८१	७०३५	७०८९	७१४३	७१९६	७२५०	७३०४	७३५८	५४
८०८	७४११	७४६५	७५१९	७५७३	७६२६	७६८०	७७३४	७७८७	७८४१	७८९५	५४
८०९	७९४९	८००२	८०५६	८११०	८१६३	८२१७	८२७०	८३२४	८३७८	८४३१	५४
८१०	९०८४८५	९०८५३९	९०८५९२	९०८६४६	९०८६९९	९०८७५३	९०८८०७	९०८८६०	९०८९१४	९०८९६७	५४
८११	९०२१	९०७४	९१२८	९१८१	९२३५	९२८९	९३४२	९३९६	९४४९	९५०३	५४
८१२	९५५६	९६१०	९६६३	९७१६	९७७०	९८२३	९८७७	९९३०	९९८४	९१००३७	५३
८१३	९१००९१	९१०१४४	९१०१९७	९१०२५१	९१०३०४	९१०३५८	९१०४११	९१०४६४	९१०५१८	०५७१	५३
८१४	०६२४	०६७८	०७३१	०७८४	०८३८	०८९१	०९४४	०९९८	१०५१	११०४	५३
८१५	११५८	१२११	१२६४	१३१७	१३७१	१४२४	१४७७	१५३०	१५८४	१६३७	५३
८१६	१६९०	१७४३	१७९७	१८५०	१९०३	१९५६	२००९	२०६३	२११६	२१६९	५३
८१७	२२२२	२२७५	२३२८	२३८१	२४३५	२४८८	२५४१	२५९४	२६४७	२७००	५३
८१८	२७५३	२८०६	२८५९	२९१३	२९६६	३०१९	३०७२	३१२५	३१७८	३२३१	५३
८१९	३२८४	३३३७	३३९०	३४४३	३४९६	३५४९	३६०२	३६५५	३७०८	३७६१	५३
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांचीं लाग्रतमें

संख्या ८२०० — ८८०० लाग्रतम ९१३८१४ — ९४४४८३

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
८२०	९१३८१४	९१३८६७	९१३९२०	९१३९७३	९१४०२६	९१४०७९	९१४१३२	९१४१८४	९१४२३७	९१४२९०	५३
८२१	४३४३	४३९६	४४४९	४५०२	४५५५	४६०८	४६६०	४७१३	४७६६	४८१९	५३
८२२	४८७२	४९२५	४९७७	५०३०	५०८३	५१३६	५१८९	५२४१	५२९४	५३४७	५३
८२३	५४००	५४५३	५५०५	५५५८	५६११	५६६४	५७१६	५७६९	५८२२	५८७५	५३
८२४	५९२७	५९८०	६०३३	६०८५	६१३८	६१९१	६२४३	६२९६	६३४९	६४०१	५३
८२५	६४५४	६५०७	६५५९	६६१२	६६६४	६७१७	६७७०	६८२२	६८७५	६९२७	५३
८२६	६९८०	७०३३	७०८५	७१३८	७१९०	७२४३	७२९५	७३४८	७४००	७४५३	५३
८२७	७५०६	७५५८	७६११	७६६३	७७१६	७७६८	७८२०	७८७३	७९२५	७९७८	५२
८२८	८०३०	८०८३	८१३५	८१८८	८२४०	८२९३	८३४५	८३९७	८४५०	८५०२	५२
८२९	८५५५	८६०७	८६५९	८७१२	८७६४	८८१६	८८६९	८९२१	८९७३	९०२६	५२
८३०	९१९०७८	९१९१३०	९१९१८३	९१९२३५	९१९२८७	९१९३४०	९१९३९२	९१९४४४	९१९४९६	९१९५४९	५२
८३१	९६०१	९६५३	९७०६	९७५८	९८१०	९८६२	९९१४	९९६७	९२००१९	९२००७१	५२
८३२	९२०१२३	९२०१७६	९२०२२८	९२०२८०	९२०३३२	९२०३८४	९२०४३६	९२०४८९	०५४१	०५९३	५२
८३३	०६४५	०६९७	०७४९	०८०१	०८५३	०९०६	०९५८	१०१०	१०६२	१११४	५२
८३४	११६६	१२१८	१२७०	१३२२	१३७४	१४२६	१४७८	१५३०	१५८२	१६३४	५२
८३५	१६८६	१७३८	१७९०	१८४२	१८९४	१९४६	१९९८	२०५०	२१०२	२१५४	५२
८३६	२२०६	२२५८	२३१०	२३६२	२४१४	२४६६	२५१८	२५७०	२६२२	२६७४	५२
८३७	२७२५	२७७७	२८२९	२८८१	२९३३	२९८५	३०३७	३०८९	३१४०	३१९२	५२
८३८	३२४४	३२९६	३३४८	३३९९	३४५१	३५०३	३५५५	३६०७	३६५८	३७१०	५२
८३९	३७६२	३८१४	३८६५	३९१७	३९६९	४०२१	४०७२	४१२४	४१७६	४२२८	५२
८४०	९२४२७९	९२४३३१	९२४३८३	९२४४३४	९२४४८६	९२४५३८	९२४५८९	९२४६४१	९२४६९३	९२४७४४	५२
८४१	४७९६	४८४८	४८९९	४९५१	५००३	५०५४	५१०६	५१५७	५२०९	५२६१	५२
८४२	५३१२	५३६४	५४१५	५४६७	५५१८	५५७०	५६२१	५६७३	५७२५	५७७६	५२
८४३	५८२८	५८७९	५९३१	५९८२	६०३४	६०८५	६१३७	६१८८	६२४०	६२९१	५१
८४४	६३४२	६३९४	६४४५	६४९७	६५४८	६६००	६६५१	६७०२	६७५४	६८०५	५१
८४५	६८५७	६९०८	६९५९	७०११	७०६२	७११४	७१६५	७२१६	७२६८	७३१९	५१
८४६	७३७०	७४२२	७४७३	७५२४	७५७६	७६२७	७६७८	७७३०	७७८१	७८३२	५१
८४७	७८८३	७९३५	७९८६	८०३७	८०८८	८१४०	८१९१	८२४२	८२९३	८३४५	५१
८४८	८३९६	८४४७	८४९८	८५४९	८६०१	८६५२	८७०३	८७५४	८८०५	८८५७	५१
८४९	८९०८	८९५९	९०१०	९०६१	९११२	९१६३	९२१५	९२६६	९३१७	९३६८	५१
८५०	९२९४१९	९२९४७०	९२९५२१	९२९५७२	९२९६२३	९२९६७४	९२९७२५	९२९७७६	९२९८२७	९२९८७९	५१
८५१	९९३०	९९८१	९३००३२	९३००८३	९३०१३४	९३०१८५	९३०२३६	९३०२८७	९३०३३८	९३०३८९	५१
८५२	९३०४४०	९३०४९१	०५४२	०५९२	०६४३	०६९४	०७४५	०७९६	०८४७	०८९८	५१
८५३	०९४९	१०००	१०५१	११०२	११५३	१२०४	१२५४	१३०५	१३५६	१४०७	५१
८५४	१४५८	१५०९	१५६०	१६१०	१६६१	१७१२	१७६३	१८१४	१८६४	१९१५	५१
८५५	१९६६	२०१७	२०६८	२११८	२१६९	२२२०	२२७१	२३२२	२३७२	२४२३	५१
८५६	२४७४	२५२४	२५७५	२६२६	२६७७	२७२७	२७७८	२८२९	२८७९	२९३०	५१
८५७	२९८१	३०३१	३०८२	३१३३	३१८३	३२३४	३२८५	३३३५	३३८६	३४३७	५१
८५८	३४८७	३५३८	३५८९	३६३९	३६९०	३७४०	३७९१	३८४१	३८९२	३९४३	५१
८५९	३९९३	४०४४	४०९४	४१४५	४१९५	४२४६	४२९६	४३४७	४३९७	४४४८	५१
८६०	९३४४९८	९३४५४९	९३४५९९	९३४६५०	९३४७००	९३४७५१	९३४८०१	९३४८५२	९३४९०२	९३४९५३	५०
८६१	५००३	५०५४	५१०४	५१५४	५२०५	५२५५	५३०६	५३५६	५४०६	५४५७	५०
८६२	५५०७	५५५८	५६०८	५६५८	५७०९	५७५९	५८०९	५८६०	५९१०	५९६०	५०
८६३	६०११	६०६१	६१११	६१६२	६२१२	६२६२	६३१३	६३६३	६४१३	६४६३	५०
८६४	६५१४	६५६४	६६१४	६६६५	६७१५	६७६५	६८१५	६८६५	६९१६	६९६६	५०
८६५	७०१६	७०६६	७११६	७१६७	७२१७	७२६७	७३१७	७३६७	७४१८	७४६८	५०
८६६	७५१८	७५६८	७६१८	७६६८	७७१८	७७६९	७८१९	७८६९	७९१९	७९६९	५०
८६७	८०१९	८०६९	८११९	८१६९	८२१९	८२६९	८३१९	८३७०	८४२०	८४७०	५०
८६८	८५२०	८५७०	८६२०	८६७०	८७२०	८७७०	८८२०	८८७०	८९२०	८९७०	५०
८६९	९०२०	९०७०	९१२०	९१७०	९२२०	९२७०	९३१९	९३६९	९४१९	९४६९	५०
८७०	९३९५१९	९३९५६९	९३९६१९	९३९६६९	९३९७१९	९३९७६९	९३९८१९	९३९८६९	९३९९१८	९३९९६८	५०
८७१	९४००१८	९४००६८	९४०११८	९४०१६८	९४०२१८	९४०२६७	९४०३१७	९४०३६७	९४०४१७	९४०४६७	५०
८७२	०५१६	०५६६	०६१६	०६६६	०७१६	०७६५	०८१५	०८६५	०९१५	०९६४	५०
८७३	१०१४	१०६४	१११४	११६३	१२१३	१२६३	१३१३	१३६२	१४१२	१४६२	५०
८७४	१५११	१५६१	१६११	१६६०	१७१०	१७६०	१८०९	१८५९	१९०९	१९५८	५०
८७५	२००८	२०५८	२१०७	२१५७	२२०७	२२५६	२३०६	२३५५	२४०५	२४५५	५०
८७६	२५०४	२५५४	२६०३	२६५३	२७०२	२७५२	२८०१	२८५१	२९०१	२९५०	५०
८७७	३०००	३०४९	३०९९	३१४८	३१९८	३२४७	३२९७	३३४६	३३९६	३४४५	४९
८७८	३४९५	३५४४	३५९३	३६४३	३६९२	३७४२	३७९१	३८४१	३८९०	३९३९	४९
८७९	३९८९	४०३८	४०८८	४१३७	४१८६	४२३६	४२८५	४३३५	४३८४	४४३३	४९
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांची लाग्रतंमें

संख्या ८८०० —— ९४०० | लाग्रतंम ९४४४८३ —— ९७३१२८

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
८८०	९४४४८३	९४४५३२	९४४५८१	९४४६३१	९४४६८०	९४४७२९	९४४७७९	९४४८२८	९४४८७७	९४४९२७	४९
८८१	४९७६	५०२५	५०७४	५१२४	५१७३	५२२२	५२७२	५३२१	५३७०	५४१९	४९
८८२	५४६९	५५१८	५५६७	५६१६	५६६५	५७१५	५७६४	५८१३	५८६२	५९१२	४९
८८३	५९६१	६०१०	६०५९	६१०८	६१५७	६२०७	६२५६	६३०५	६३५४	६४०३	४९
८८४	६४५२	६५०१	६५५१	६६००	६६४९	६६९८	६७४७	६७९६	६८४५	६८९४	४९
८८५	६९४३	६९९२	७०४१	७०९०	७१३९	७१८९	७२३८	७२८७	७३३६	७३८५	४९
८८६	७४३४	७४८३	७५३२	७५८१	७६३०	७६७९	७७२८	७७७७	७८२६	७८७५	४९
८८७	७९२४	७९७३	८०२२	८०७०	८११९	८१६८	८२१७	८२६६	८३१५	८३६४	४९
८८८	८४१३	८४६२	८५११	८५६०	८६०८	८६५७	८७०६	८७५५	८८०४	८८५३	४९
८८९	८९०२	८९५१	८९९९	९०४८	९०९७	९१४६	९१९५	९२४४	९२९२	९३४१	४९
८९०	९४९३९०	९४९४३९	९४९४८८	९४९५३६	९४९५८५	९४९६३४	९४९६८३	९४९७३१	९४९७८०	९४९८२९	४९
८९१	९८७८	९९२६	९९७५	९५००२४	९५००७३	९५०१२१	९५०१७०	९५०२१९	९५०२६७	९५०३१६	४९
८९२	९५०३६५	९५०४१४	९५०४६२	०५११	०५६०	०६०८	०६५७	०७०६	०७५४	०८०३	४९
८९३	०८५१	०९००	०९४९	०९९७	१०४६	१०९४	११४३	११९२	१२४०	१२८९	४९
८९४	१३३८	१३८६	१४३५	१४८३	१५३२	१५८०	१६२९	१६७७	१७२६	१७७४	४९
८९५	१८२३	१८७२	१९२०	१९६९	२०१७	२०६६	२११४	२१६३	२२११	२२६०	४८
८९६	२३०८	२३५६	२४०५	२४५३	२५०२	२५५०	२५९९	२६४७	२६९६	२७४४	४८
८९७	२७९२	२८४१	२८८९	२९३८	२९८६	३०३४	३०८३	३१३१	३१८०	३२२८	४८
८९८	३२७६	३३२५	३३७३	३४२१	३४७०	३५१८	३५६६	३६१५	३६६३	३७११	४८
८९९	३७६०	३८०८	३८५६	३९०५	३९५३	४००१	४०४९	४०९८	४१४६	४१९४	४८
९००	९५४२४३	९५४२९१	९५४३३९	९५४३८७	९५४४३५	९५४४८४	९५४५३२	९५४५८०	९५४६२८	९५४६७७	४८
९०१	४७२५	४७७३	४८२१	४८६९	४९१८	४९६६	५०१४	५०६२	५११०	५१५८	४८
९०२	५२०७	५२५५	५३०३	५३५१	५३९९	५४४७	५४९५	५५४३	५५९२	५६४०	४८
९०३	५६८८	५७३६	५७८४	५८३२	५८८०	५९२८	५९७६	६०२४	६०७२	६१२०	४८
९०४	६१६८	६२१६	६२६४	६३१३	६३६१	६४०९	६४५७	६५०५	६५५३	६६०१	४८
९०५	६६४९	६६९७	६७४५	६७९३	६८४०	६८८८	६९३६	६९८४	७०३२	७०८०	४८
९०६	७१२८	७१७६	७२२४	७२७२	७३२०	७३६८	७४१६	७४६४	७५१२	७५५९	४८
९०७	७६०७	७६५५	७७०३	७७५१	७७९९	७८४७	७८९४	७९४२	७९९०	८०३८	४८
९०८	८०८६	८१३४	८१८१	८२२९	८२७७	८३२५	८३७३	८४२१	८४६८	८५१६	४८
९०९	८५६४	८६१२	८६५९	८७०७	८७५५	८८०३	८८५०	८८९८	८९४६	८९९४	४८
९१०	९५९०४१	९५९०८९	९५९१३७	९५९१८५	९५९२३२	९५९२८०	९५९३२८	९५९३७५	९५९४२३	९५९४७१	४८
९११	९५१८	९५६६	९६१४	९६६१	९७०९	९७५७	९८०४	९८५२	९९००	९९४७	४८
९१२	९९९५	९६००४२	९६००९०	९६०१३८	९६०१८५	९६०२३३	९६०२८०	९६०३२८	९६०३७६	९६०४२३	४८
९१३	९६०४७१	०५१८	०५६६	०६१३	०६६१	०७०९	०७५६	०८०४	०८५१	०८९९	४८
९१४	०९४६	०९९४	१०४१	१०८९	११३६	११८४	१२३१	१२७९	१३२६	१३७४	४७
९१५	१४२१	१४६९	१५१६	१५६३	१६११	१६५८	१७०६	१७५३	१८०१	१८४८	४७
९१६	१८९५	१९४३	१९९०	२०३८	२०८५	२१३२	२१८०	२२२७	२२७५	२३२२	४७
९१७	२३६९	२४१७	२४६४	२५११	२५५९	२६०६	२६५३	२७०१	२७४८	२७९५	४७
९१८	२८४३	२८९०	२९३७	२९८५	३०३२	३०७९	३१२६	३१७४	३२२१	३२६८	४७
९१९	३३१६	३३६३	३४१०	३४५७	३५०४	३५५२	३५९९	३६४६	३६९३	३७४१	४७
९२०	९६३७८८	९६३८३५	९६३८८२	९६३९२९	९६३९७७	९६४०२४	९६४०७१	९६४११८	९६४१६५	९६४२१२	४७
९२१	४२६०	४३०७	४३५४	४४०१	४४४८	४४९५	४५४२	४५९०	४६३७	४६८४	४७
९२२	४७३१	४७७८	४८२५	४८७२	४९१९	४९६६	५०१३	५०६०	५१०८	५१५५	४७
९२३	५२०२	५२४९	५२९६	५३४३	५३९०	५४३७	५४८४	५५३१	५५७८	५६२५	४७
९२४	५६७२	५७१९	५७६६	५८१३	५८६०	५९०७	५९५४	६००१	६०४८	६०९५	४७
९२५	६१४२	६१८९	६२३६	६२८३	६३२९	६३७६	६४२३	६४७०	६५१७	६५६४	४७
९२६	६६११	६६५८	६७०५	६७५२	६७९९	६८४५	६८९२	६९३९	६९८६	७०३३	४७
९२७	७०८०	७१२७	७१७३	७२२०	७२६७	७३१४	७३६१	७४०८	७४५४	७५०१	४७
९२८	७५४८	७५९५	७६४२	७६८८	७७३५	७७८२	७८२९	७८७५	७९२२	७९६९	४७
९२९	८०१६	८०६२	८१०९	८१५६	८२०३	८२४९	८२९६	८३४३	८३९०	८४३६	४७
९३०	९६८४८३	९६८५३०	९६८५७६	९६८६२३	९६८६७०	९६८७१६	९६८७६३	९६८८१०	९६८८५६	९६८९०३	४७
९३१	८९५०	८९९६	९०४३	९०९०	९१३६	९१८३	९२२९	९२७६	९३२३	९३६९	४७
९३२	९४१६	९४६३	९५०९	९५५६	९६०२	९६४९	९६९५	९७४२	९७८९	९८३५	४७
९३३	९८८२	९९२८	९९७५	९७००२१	९७००६८	९७०११४	९७०१६१	९७०२०७	९७०२५४	९७०३००	४७
९३४	९७०३४७	९७०३९३	९७०४४०	०४८६	०५३३	०५७९	०६२६	०६७२	०७१९	०७६५	४६
९३५	०८१२	०८५८	०९०४	०९५१	०९९७	१०४४	१०९०	११३७	११८३	१२२९	४६
९३६	१२७६	१३२२	१३६९	१४१५	१४६१	१५०८	१५५४	१६०१	१६४७	१६९३	४६
९३७	१७४०	१७८६	१८३२	१८७९	१९२५	१९७१	२०१८	२०६४	२११०	२१५७	४६
९३८	२२०३	२२४९	२२९५	२३४२	२३८८	२४३४	२४८१	२५२७	२५७३	२६१९	४६
९३९	२६६६	२७१२	२७५८	२८०४	२८५१	२८९७	२९४३	२९८९	३०३५	३०८२	४६
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

प्रथम कोष्टक

संख्यांची लाग्रतंमे

संख्या ९४०० —— १०००० लाग्रतंम ९७३१२८ —— १०००००

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी
९४०	९७३१२८	९७३१७४	९७३२२०	९७३२६६	९७३३१३	९७३३५९	९७३४०५	९७३४५१	९७३४९७	९७३५४३	४६
९४१	३५९०	३६३६	३६८२	३७२८	३७७४	३८२०	३८६६	३९१३	३९५९	४००५	४६
९४२	४०५१	४०९७	४१४३	४१८९	४२३५	४२८१	४३२७	४३७४	४४२०	४४६६	४६
९४३	४५१२	४५५८	४६०४	४६५०	४६९६	४७४२	४७८८	४८३४	४८८०	४९२६	४६
९४४	४९७२	५०१८	५०६४	५११०	५१५६	५२०२	५२४८	५२९४	५३४०	५३८६	४६
९४५	५४३२	५४७८	५५२४	५५७०	५६१६	५६६२	५७०७	५७५३	५७९९	५८४५	४६
९४६	५८९१	५९३७	५९८३	६०२९	६०७५	६१२१	६१६७	६२१२	६२५८	६३०४	४६
९४७	६३५०	६३९६	६४४२	६४८८	६५३३	६५७९	६६२५	६६७१	६७१७	६७६३	४६
९४८	६८०८	६८५४	६९००	६९४६	६९९२	७०३७	७०८३	७१२९	७१७५	७२२०	४६
९४९	७२६६	७३१२	७३५८	७४०३	७४४९	७४९५	७५४१	७५८६	७६३२	७६७८	४६
९५०	९७७७२४	९७७७६९	९७७८१५	९७७८६१	९७७९०६	९७७९५२	९७७९९८	९७८०४३	९७८०८९	९७८१३४	४६
९५१	८१८१	८२२६	८२७२	८३१७	८३६३	८४०९	८४५४	८५००	८५४६	८५९१	४६
९५२	८६३७	८६८३	८७२८	८७७४	८८१९	८८६५	८९११	८९५६	९००२	९०४७	४६
९५३	९०९३	९१३८	९१८४	९२३०	९२७५	९३२१	९३६६	९४१२	९४५७	९५०३	४६
९५४	९५४८	९५९४	९६३९	९६८५	९७३०	९७७६	९८२१	९८६७	९९१२	९९५८	४६
९५५	९८०००३	९८००४९	९८००९४	९८०१४०	९८०१८५	९८०२३१	९८०२७६	९८०३२२	९८०३६७	९८०४१२	४५
९५६	०४५८	०५०३	०५४९	०५९४	०६४०	०६८५	०७३०	०७७६	०८२१	०८६७	४५
९५७	०९१२	०९५७	१००३	१०४८	१०९३	११३९	११८४	१२३०	१२७५	१३२०	४५
९५८	१३६६	१४११	१४५६	१५०२	१५४७	१५९२	१६३७	१६८३	१७२८	१७७३	४५
९५९	१८१९	१८६४	१९०९	१९५४	२०००	२०४५	२०९०	२१३५	२१८१	२२२६	४५
९६०	९८२२७१	९८२३१६	९८२३६२	९८२४०७	९८२४५२	९८२४९७	९८२५४३	९८२५८८	९८२६३३	९८२६७८	४५
९६१	२७२३	२७६९	२८१४	२८५९	२९०४	२९४९	२९९४	३०४०	३०८५	३१३०	४५
९६२	३१७५	३२२०	३२६५	३३१०	३३५६	३४०१	३४४६	३४९१	३५३६	३५८१	४५
९६३	३६२६	३६७१	३७१६	३७६२	३८०७	३८५२	३८९७	३९४२	३९८७	४०३२	४५
९६४	४०७७	४१२२	४१६७	४२१२	४२५७	४३०२	४३४७	४३९२	४४३७	४४८२	४५
९६५	४५२७	४५७२	४६१७	४६६२	४७०७	४७५२	४७९७	४८४२	४८८७	४९३२	४५
९६६	४९७७	५०२२	५०६७	५११२	५१५७	५२०२	५२४७	५२९२	५३३७	५३८२	४५
९६७	५४२६	५४७१	५५१६	५५६१	५६०६	५६५१	५६९६	५७४१	५७८६	५८३०	४५
९६८	५८७५	५९२०	५९६५	६०१०	६०५५	६१००	६१४४	६१८९	६२३४	६२७९	४५
९६९	६३२४	६३६९	६४१३	६४५८	६५०३	६५४८	६५९३	६६३७	६६८२	६७२७	४५
९७०	९८६७७२	९८६८१७	९८६८६१	९८६९०६	९८६९५१	९८६९९६	९८७०४०	९८७०८५	९८७१३०	९८७१७५	४५
९७१	७२१९	७२६४	७३०९	७३५३	७३९८	७४४३	७४८८	७५३२	७५७७	७६२२	४५
९७२	७६६६	७७११	७७५६	७८००	७८४५	७८९०	७९३४	७९७९	८०२४	८०६८	४५
९७३	८११३	८१५७	८२०२	८२४७	८२९१	८३३६	८३८१	८४२५	८४७०	८५१४	४५
९७४	८५५९	८६०४	८६४८	८६९३	८७३७	८७८२	८८२६	८८७१	८९१६	८९६०	४५
९७५	९००५	९०४९	९०९४	९१३८	९१८३	९२२७	९२७२	९३१६	९३६१	९४०५	४५
९७६	९४५०	९४९४	९५३९	९५८३	९६२८	९६७२	९७१७	९७६१	९८०६	९८५०	४४
९७७	९८९५	९९३९	९९८३	९९००२८	९९००७२	९९०११७	९९०१६१	९९०२०६	९९०२५०	९९०२९४	४४
९७८	९९०३३९	९९०३८३	९९०४२८	०४७२	०५१६	०५६१	०६०५	०६५०	०६९४	०७३८	४४
९७९	०७८३	०८२७	०८७१	०९१६	०९६०	१००४	१०४९	१०९३	११३७	११८२	४४
९८०	९९१२२६	९९१२७०	९९१३१५	९९१३५९	९९१४०३	९९१४४८	९९१४९२	९९१५३६	९९१५८०	९९१६२४	४४
९८१	१६६९	१७१३	१७५८	१८०२	१८४६	१८९०	१९३५	१९७९	२०२३	२०६७	४४
९८२	२१११	२१५६	२२००	२२४४	२२८८	२३३३	२३७७	२४२१	२४६५	२५०९	४४
९८३	२५५४	२५९८	२६४२	२६८६	२७३०	२७७४	२८१९	२८६३	२९०७	२९५१	४४
९८४	२९९५	३०३९	३०८३	३१२७	३१७२	३२१६	३२६०	३३०४	३३४८	३३९२	४४
९८५	३४३६	३४८०	३५२४	३५६८	३६१३	३६५७	३७०१	३७४५	३७८९	३८३३	४४
९८६	३८७७	३९२१	३९६५	४००९	४०५३	४०९७	४१४१	४१८५	४२२९	४२७३	४४
९८७	४३१७	४३६१	४४०५	४४४९	४४९३	४५३७	४५८१	४६२५	४६६९	४७१३	४४
९८८	४७५७	४८०१	४८४५	४८८९	४९३३	४९७७	५०२१	५०६४	५१०८	५१५२	४४
९८९	५१९६	५२४०	५२८४	५३२८	५३७२	५४१६	५४६०	५५०४	५५४७	५५९१	४४
९९०	९९५६३५	९९५६७९	९९५७२२	९९५७६७	९९५८११	९९५८५४	९९५८९८	९९५९४२	९९५९८६	९९६०३०	४४
९९१	६०७४	६११७	६१६१	६२०५	६२४९	६२९३	६३३७	६३८०	६४२४	६४६८	४४
९९२	६५१२	६५५५	६५९९	६६४३	६६८७	६७३१	६७७४	६८१८	६८६२	६९०६	४४
९९३	६९४९	६९९३	७०३७	७०८०	७१२४	७१६८	७२१२	७२५५	७२९९	७३४३	४४
९९४	७३८६	७४३०	७४७४	७५१७	७५६१	७६०५	७६४८	७६९२	७७३६	७७७९	४४
९९५	७८२३	७८६७	७९१०	७९५४	७९९८	८०४१	८०८५	८१२९	८१७२	८२१६	४४
९९६	८२५९	८३०३	८३४७	८३९०	८४३४	८४७७	८५२१	८५६४	८६०८	८६५२	४४
९९७	८६९५	८७३९	८७८२	८८२६	८८६९	८९१३	८९५६	९०००	९०४३	९०८७	४४
९९८	९१३०	९१७४	९२१८	९२६१	९३०५	९३४८	९३९२	९४३५	९४७९	९५२२	४४
९९९	९५६५	९६०९	९६५२	९६९६	९७३९	९७८३	९८२६	९८७०	९९१३	९९५७	४३
संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	०अंश				१अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०		१०·०००००००			८·२४१८५५	९·९९९९९३४	८·२४१९१२१	११·७५८०७८१	६०
१	६·४६३७२६१	१०·०००००००	६·४६३७२६१	१३·५३६२७३९	८·२४९१०३३	९·९९९९९३१	८·२४९११०२	११·७५०८९१८	५९
२	६·७६४७५६१	१०·०००००००	६·७६४७५६१	१३·२३५२४३९	८·२५६१०९४	९·९९९९९२९	८·२५६११६५	११·७४३८६३५	५८
३	६·९४०८४७३	१०·०००००००	६·९४०८४७३	१३·०५९१५२७	८·२६३०४७२	९·९९९९९२७	८·२६३११५५	११·७३६८८४५	५७
४	७·०६५७८६१	१०·०००००००	७·०६५७८६१	१२·९३४२१३९	८·२६९८८८१	९·९९९९९२५	८·२६९९९५६	११·७३००४४४	५६
५	७·१६२६९६१	१०·०००००००	७·१६२६९६१	१२·८३७३०३९	८·२७६६६१४	९·९९९९९२२	८·२७६६६९१	११·७२३३३०९	५५
६	७·२४१८७७७	९·९९९९९९९	७·२४१८७७८	१२·७५८१२२२	८·२८३३२४३	९·९९९९९२०	८·२८३३३२३	११·७१६६६७७	५४
७	७·३०८८८२४	९·९९९९९९९	७·३०८८८२५	१२·६९११७७५	८·२८९९७७३	९·९९९९९१८	८·२८९९८५६	११·७१०१४४४	५३
८	७·३६६६८१९	९·९९९९९९९	७·३६६६८१७	१२·६३३३१८३	८·२९६६२०७	९·९९९९९१५	८·२९६५२१२	११·७०३५७०८	५२
९	७·४१७७२६८	९·९९९९९९९	७·४१७७९७०	१२·५८२०३०	८·३०२९५४६	९·९९९९९१३	८·३०२९६३४	११·६९७०३६६	५१
१०	७·४६३७२६६	९·९९९९९९८	७·४६३७२७	१२·५३६२७३	८·३०८७१९४	९·९९९९९१०	८·३०८८८८४	११·६९११११६	५०
११	७·५०५११९८	९·९९९९९९८	७·५०५१२०	१२·४९४८८०	८·३१४९५४	९·९९९९९०७	८·३१५०४६	११·६८४९५४	४९
१२	७·५४३२१०६	९·९९९९९९७	७·५४३२१०९	१२·४५६७९१	८·३२१०२७	९·९९९९९०५	८·३२११२२	११·६७८८७८	४८
१३	७·५७७७६६८	९·९९९९९९७	७·५७७७६७२	१२·४२२३२८	८·३२७०१६	९·९९९९९०२	८·३२७११४	११·६७२८८६	४७
१४	७·६०९९८५३	९·९९९९९९६	७·६०९९८५७	१२·३९०१४३	८·३३२९२४	९·९९९९८९९	८·३३३०२५	११·६६६९७५	४६
१५	७·६३९९६१६	९·९९९९९९६	७·६३९९६२०	१२·३६००३८	८·३३८७५३	९·९९९९८९७	८·३३८८५६	११·६६११४४	४५
१६	७·६६७९८४५	९·९९९९९९५	७·६६७९८५१	१२·३३२१४९	८·३४४५०४	९·९९९९८९४	८·३४४६१०	११·६५५३९०	४४
१७	७·६९४१७७३	९·९९९९९९५	७·६९४१७७९	१२·३०५८२२	८·३५०१८९	९·९९९९८९१	८·३५०२९८	११·६४९७०२	४३
१८	७·७१८९९९७	९·९९९९९९४	७·७१९००३	१२·२८०९९७	८·३५५७८९	९·९९९९८८८	८·३५५९०१	११·६४४०९५	४२
१९	७·७४२४७८	९·९९९९९९३	७·७४२४८४	१२·२५७५१६	८·३६१३१५	९·९९९९८८५	८·३६१४३०	११·६३८५७०	४१
२०	७·७६४७५४	९·९९९९९९३	७·७६४७६१	१२·२३५२३९	८·३६६७७७	९·९९९९८८२	८·३६६८९५	११·६३३१०५	४०
२१	७·७८५९९१३	९·९९९९९९२	७·७८५९९२१	१२·२१४०७९	८·३७२१७१	९·९९९९८७९	८·३७२२९२	११·६२७७०८	३९
२२	७·८०६१९४६	९·९९९९९९१	७·८०६१९५५	१२·१९३८०४	८·३७७४९१	९·९९९९८७६	८·३७७६२२	११·६२२३७८	३८
२३	७·८२५२४५१	९·९९९९९९०	७·८२५४४६०	१२·१७४५४०	८·३८२६६२	९·९९९९८७३	८·३८२८८९	११·६१७१११	३७
२४	७·८४३६१३४	९·९९९९९८९	७·८४३६१४४	१२·१५६०५६	८·३८८७१६२	९·९९९९८७०	८·३८८०१२	११·६११९०८	३६
२५	७·८६१३६६२	९·९९९९९८८	७·८६१३६७४	१२·१३८६३२६	८·३९३९१०१	९·९९९९८६७	८·३९३२३४	११·६०६७६६	३५
२६	७·८७८६९९५	९·९९९९९८८	७·८७९००७	१२·१२१२९२	८·३९८९७१	९·९९९९८६४	८·३९८३१५	११·६०१६८४	३४
२७	७·८९५०८५	९·९९९९९८७	७·८९५०९८	१२·१०४९०१	८·४०३९१९	९·९९९९८६१	८·४०३३३८	११·५९६६६८	३३
२८	७·९१०८७९	९·९९९९९८६	७·९१०८९४	१२·०८९१०६	८·४०८१६१	९·९९९९८५८	८·४०८३०४	११·५९१६९६	३२
२९	७·९२६१११	९·९९९९९८५	७·९२६१३४	१२·०७३८६६	८·४१३०६८	९·९९९९८५४	८·४१३२१३	११·५८६७८७	३१
३०	७·९४०८४२	९·९९९९९८३	७·९४०८५८	१२·०५९१४२	८·४१७९११	९·९९९९८५१	८·४१८०६६	११·५८१९३२	३०
३१	७·९५५०८२	९·९९९९९८२	७·९५५१००	१२·०४४९००	८·४२२७१७	९·९९९९८४८	८·४२२८६९	११·५७७१३१	२९
३२	७·९६८८७०	९·९९९९९८१	७·९६८८८९	१२·०३११११	८·४२७४६२	९·९९९९८४५	८·४२७६१८	११·५७२३८२	२८
३३	७·९८२२३३	९·९९९९९८०	७·९८२२५३	१२·०१७७४७	८·४३२१४६	९·९९९९८४१	८·४३२३१५	११·५६७६८५	२७
३४	७·९९५१९८	९·९९९९९७९	७·९९५२१९	१२·००४७८१	८·४३६८००	९·९९९९८३८	८·४३६९६२	११·५६३०३८	२६
३५	८·००७७८७	९·९९९९९७७	८·००७८०९	११·९९२१९१	८·४४१३९४	९·९९९९८३४	८·४४१५६०	११·५५८४४०	२५
३६	८·०२००२१	९·९९९९९७६	८·०२००४४	११·९७९९५६	८·४४५९४१	९·९९९९८३१	८·४४६११०	११·५५३८९०	२४
३७	८·०३१९१९	९·९९९९९७५	८·०३१९४४	११·९६८०५५	८·४५०४४०	९·९९९९८२७	८·४५०६१३	११·५४९३८७	२३
३८	८·०४३५०१	९·९९९९९७३	८·०४३५२७	११·९५६४७३	८·४५४८९३	९·९९९९८२४	८·४५५०७०	११·५४४९३०	२२
३९	८·०५४७८१	९·९९९९९७२	८·०५४८०९	११·९४५१९१	८·४५९३०१	९·९९९९८२०	८·४५९४८१	११·५४०५१९	२१
४०	८·०६५७७६	९·९९९९९७१	८·०६५८०६	११·९३४१९४	८·४६३६६५	९·९९९९८१६	८·४६३८४९	११·५३६१५१	२०
४१	८·०७६५००	९·९९९९९६९	८·०७६५३१	११·९२३४६९	८·४६७९८५	९·९९९९८१३	८·४६८१७२	११·५३१८२८	१९
४२	८·०८६९६५	९·९९९९९६८	८·०८६९९७	११·९१३००३	८·४७२२६३	९·९९९९८०९	८·४७२४५४	११·५२७५४६	१८
४३	८·०९७१८३	९·९९९९९६६	८·०९७२१७	११·९०२७८३	८·४७६४९८	९·९९९९८०५	८·४७६६९३	११·५२३३०७	१७
४४	८·१०७१६७	९·९९९९९६४	८·१०७२०३	११·८९२७९७	८·४८०६१३	९·९९९९८०१	८·४८०८९२	११·५१९१०८	१६
४५	८·११६९२६	९·९९९९९६३	८·११६९६३	११·८८३०३७	८·४८४८४८	९·९९९९७९७	८·४८५०५०	११·५१४९५०	१५
४६	८·१२६४७१	९·९९९९९६१	८·१२६५१०	११·८७३४९०	८·४८८९६३	९·९९९९७९४	८·४८९१७०	११·५१०८३०	१४
४७	८·१३५८१०	९·९९९९९५९	८·१३५८५१	११·८६४१४९	८·४९३०४०	९·९९९९७९०	८·४९३२५०	११·५०६७५०	१३
४८	८·१४४९५३	९·९९९९९५८	८·१४४९९६	११·८५५००४	८·४९७०७८	९·९९९९७८६	८·४९७२९३	११·५०२७०७	१२
४९	८·१५३९०७	९·९९९९९५६	८·१५३९५२	११·८४६०४८	८·५०१०८०	९·९९९९७८२	८·५०१२९८	११·४९८७०२	११
५०	८·१६२६८१	९·९९९९९५४	८·१६२७२७	११·८३७२७३	८·५०५०४५	९·९९९९७७८	८·५०५२६७	११·४९४७३३	१०
५१	८·१७१२८०	९·९९९९९५२	८·१७१३२८	११·८२८६७२	८·५०८९७४	९·९९९९७७४	८·५०९२००	११·४९०८००	९
५२	८·१७९७१३	९·९९९९९५०	८·१७९७६३	११·८२०२३७	८·५१२८६७	९·९९९९७६९	८·५१३०९८	११·४८६९०२	८
५३	८·१८७९८५	९·९९९९९४८	८·१८८०३६	११·८११९६४	८·५१६७२६	९·९९९९७६५	८·५१६९६१	११·४८३०३९	७
५४	८·१९६१०३	९·९९९९९४६	८·१९६१५६	११·८०३८४४	८·५२०५५१	९·९९९९७६१	८·५२०७९०	११·४७९२१०	६
५५	८·२०४०७०	९·९९९९९४४	८·२०४१२६	११·७९५८७४	८·५२४३४३	९·९९९९७५७	८·५२४५८६	११·४७५४१४	५
५६	८·२११८९५	९·९९९९९४२	८·२११९५३	११·७८८०४७	८·५२८१०२	९·९९९९७५३	८·५२८३४९	११·४७१६५१	४
५७	८·२१९५८१	९·९९९९९४०	८·२१९६४१	११·७८०३५९	८·५३१८२८	९·९९९९७४८	८·५३२०८०	११·४६७९२०	३
५८	८·२२७१३४	९·९९९९९३८	८·२२७१९५	११·७७२८०५	८·५३५५२३	९·९९९९७४४	८·५३५७७९	११·४६४२२१	२
५९	८·२३४५५७	९·९९९९९३६	८·२३४६२१	११·७६५३७९	८·५३९१८६	९·९९९९७४०	८·५३९४४७	११·४६०५५३	१
६०	८·२४१८५५	९·९९९९९३४	८·२४१९२१	११·७५८०७९	८·५४२८१९	९·९९९९७३५	८·५४३०८४	११·४५६९१६	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क
	८९ अंश				८८ अंश				

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

क.	भुजज्या (२ अंश)	कोभुजज्या (२ अंश)	स्पर्शरेघ (२ अंश)	कोस्पर्शरेघ (२ अंश)	भुजज्या (३ अंश)	कोभुजज्या (३ अंश)	स्पर्शरेघ (३ अंश)	कोस्पर्शरेघ (३ अंश)	क.
०	८.५४२८१९२	९.९९९७३५४	८.५४३०८३८	११.४५६९१६२	८.७१८८००२	९.९९९४०४४	८.७१९३९५८	११.२८०६०४२	६०
१	८.५४६४३०१	९.९९९७३१०	८.५४६६९९१	११.४५३३००९	८.७२१२०८४	९.९९९३९९८	८.७२१८०८६	११.२७८१९१४	५९
२	८.५५००५३३	९.९९९७२६५	८.५५०३२६८	११.४४९६७३२	८.७२३५४१५	९.९९९३९११	८.७२४२२०४	११.२७५७७९६	५८
३	८.५५३६१३७	९.९९९७२२०	८.५५३८९१७	११.४४६१०८३	८.७२५९१७२	९.९९९३९८४	८.७२६५४८८	११.२७३४५१२	५७
४	८.५५७०५११	९.९९९७१७५	८.५५७३३३६	११.४४२६६६४	८.७२८२३३७	९.९९९३७७८	८.७२८८९५९	११.२७११०४१	५६
५	८.५६०४५४०	९.९९९७१२९	८.५६०७४११	११.४३९२५८९	८.७३०६६८८	९.९९९३७४१	८.७३१३१३७	११.२६८६८६३	५५
६	८.५६३९५७४	९.९९९७०८३	८.५६४२४९१	११.४३५७५०९	८.७३३०२७७	९.९९९३६४४	८.७३३६६३३	११.२६६३३६७	५४
७	८.५६७४७३१	९.९९९७०३६	८.५६७७६९५	११.४३२२३०५	८.७३५४३४४	९.९९९३५४७	८.७३५७९९६	११.२६४२००४	५३
८	८.५७०८८३६	९.९९९६९८९	८.५७११८४७	११.४२८८१५३	८.७३७८२६६	९.९९९३४५०	८.७३८३१७७	११.२६१६८२३	५२
९	८.५७४२३६२	९.९९९६९४२	८.५७४५४२०	११.४२५४५८०	८.७४०११६९	९.९९९३४७३	८.७४०६८२६	११.२५९३१७४	५१
१०	८.५७७५४६६	९.९९९६८९५	८.५७७८५७१	११.४२२१४२९	८.७४२२४५१	९.९९९३३३६	८.७४२९११५	११.२५७०८८५	५०
११	८.५८०८०५५	९.९९९६८४७	८.५८११२०८	११.४१८८७९२	८.७४४७४३६	९.९९९३३२८	८.७४५३७०७	११.२५४६२९३	४९
१२	८.५८४१५२३	९.९९९६७९९	८.५८४४७२४	११.४१५५२७६	८.७४६९६०२	९.९९९३२२२	८.७४७४५७९	११.२५२५४२१	४८
१३	८.५८७३७६१	९.९९९६७५०	८.५८७७०११	११.४१२२९८९	८.७४९२०५५	९.९९९३१३५	८.७४९८९४०	११.२५०१०६०	४७
१४	८.५९०७२१०	९.९९९६७०१	८.५९१०५०९	११.४०८९४९१	८.७५१५२२७	९.९९९३०७८	८.७५२११६८	११.२४७८८३२	४६
१५	८.५९३९१४८	९.९९९६६५१	८.५९४२४९७	११.४०५७५०३	८.७५३५४२८	९.९९९३०७१	८.७५४४२२७	११.२४५५७७३	४५
१६	८.५९७१५४२	९.९९९६६०१	८.५९७४९४१	११.४०२५०५९	८.७५५४४७४	९.९९९२९१४	८.७५६६४४३	११.२४३३५४७	४४
१७	८.६००३३३२	९.९९९६५५१	८.६००६७८१	११.३९९३२१९	८.७५८०१४१	९.९९९२८९७	८.७५८८६६८	११.२४११३३२	४३
१८	८.६०३४८९१	९.९९९६५०१	८.६०३८३९०	११.३९६१६१०	८.७६०१५५१	९.९९९२८०१	८.७६१०८७२	११.२३८९१२८	४२
१९	८.६०६६६२३	९.९९९६४५०	८.६०७०१७३	११.३९२९८२७	८.७६२३३७०	९.९९९२८०२	८.७६३०५६४	११.२३६९४३६	४१
२०	८.६०९७७३४	९.९९९६३९९	८.६१०१३३५	११.३८९८६६५	८.७६४५४११	९.९९९२७५५	८.७६५२७५६	११.२३४७२४४	४०
२१	८.६१२८८२३	९.९९९६३४७	८.६१३२४७६	११.३८६७५२४	८.७६६६६७५	९.९९९२६४७	८.७६७४०२८	११.२३२५९७२	३९
२२	८.६१५९५११	९.९९९६२९५	८.६१६३२१६	११.३८३६७८४	८.७६८८८२८	९.९९९२६५०	८.७६९६१७८	११.२३०३८२२	३८
२३	८.६१९०१३७	९.९९९६२४३	८.६१९३८९४	११.३८०६१०६	८.७७१०२७०	९.९९९२४४२	८.७७१७८२७	११.२२८२१७३	३७
२४	८.६२१९६६२	९.९९९६१९०	८.६२२३४७२	११.३७७६५२८	८.७७३१७०३	९.९९९२३४४	८.७७३९३६६	११.२२६०६३४	३६
२५	८.६२४९६६५	९.९९९६१३७	८.६२५३५२८	११.३७४६४७२	८.७७५२२२३	९.९९९२२३७	८.७७५९८८६	११.२२४००९४	३५
२६	८.६२७९४४८	९.९९९६०८३	८.६२८३३६५	११.३७१६६३५	८.७७७३३७३	९.९९९२२२०	८.७७८११४४	११.२२१८८५६	३४
२७	८.६३०९०११	९.९९९६०२९	८.६३१२९८२	११.३६८७०१८	८.७७९१४३४	९.९९९२११२	८.७८०२२२२	११.२१९७७७८	३३
२८	८.६३३८४४२	९.९९९५९७५	८.६३४२४६७	११.३६५७५३३	८.७८१५२२४	९.९९९२०४५	८.७८२३३२०	११.२१७६६८०	३२
२९	८.६३६७५७६	९.९९९५९२१	८.६३७१६५५	११.३६२८३४५	८.७८३६०४१	९.९९९१९१७	८.७८४४४०८	११.२१५५५९२	३१
३०	८.६३९६७५०	९.९९९५८६६	८.६४००८८४	११.३५९९११६	८.७८५६५६४	९.९९९१८९१	८.७८६४६९१	११.२१३५३०९	३०
३१	८.६४२५५६३	९.९९९५८१०	८.६४२९७५३	११.३५७०२४७	८.७८७७७३६	९.९९९१८१३	८.७८८५२५४	११.२११४७४६	२९
३२	८.६४५४९२६	९.९९९५७५५	८.६४५९१७१	११.३५४०८२९	८.७८९८१७७	९.९९९१७०४	८.७९०६११३	११.२०९३८८७	२८
३३	८.६४८२८४४	९.९९९५७००	८.६४८७१४४	११.३५१२८५६	८.७९१८८२८	९.९९९१६६६	८.७९२६६६२	११.२०७३३३८	२७
३४	८.६५११००२	९.९९९५६४२	८.६५१५३६०	११.३४८४६४०	८.७९३९५११	९.९९९१५८८	८.७९४७५०१	११.२०५२४९९	२६
३५	८.६५३९१११	९.९९९५५८६	८.६५४३५२५	११.३४५६४७५	८.७९५८८८१	९.९९९१५४०	८.७९६७३३१	११.२०३२६६९	२५
३६	८.६५६६७०२	९.९९९५५२८	८.६५७११७४	११.३४२८८२६	८.७९७८८१४	९.९९९१४४२	८.७९८६७४२	११.२०१३२५८	२४
३७	८.६५९४७४४	९.९९९५४७०	८.६५९९२७४	११.३४००७२६	८.७९९८८१७	९.९९९१३३४	८.८००७७६३	११.१९९२२३७	२३
३८	८.६६२२३४०	९.९९९५४१२	८.६६२६९२८	११.३३७३०७२	८.८०१८१९२	९.९९९१३२६	८.८०२७५६४	११.१९७२४३६	२२
३९	८.६६४९१६८	९.९९९५३५४	८.६६५३८१४	११.३३४६१८६	८.८०३८०७६	९.९९९१२१८	८.८०४७५४८	११.१९५२४५२	२१
४०	८.६६७६९११	९.९९९५२९५	८.६६८१६१६	११.३३१८३८४	८.८०५८५४२	९.९९९११६०	८.८०६७४८२	११.१९३२५१८	२०
४१	८.६७०३९१३	९.९९९५२३५	८.६७०८६७८	११.३२९१३२२	८.८०७८७१९	९.९९९११०२	८.८०८७६१७	११.१९१२३८३	१९
४२	८.६७३०८०८	९.९९९५१७६	८.६७३५६३२	११.३२६४३६८	८.८०९७७७७	९.९९९१०४४	८.८१०६८३३	११.१८९३१६७	१८
४३	८.६७५७५५१	९.९९९५११६	८.६७६२४३५	११.३२३७५६५	८.८११७२६१	९.९९९०८५६	८.८१२६४०५	११.१८७३५९५	१७
४४	८.६७८४०४५	९.९९९५०५६	८.६७८८९८९	११.३२११०११	८.८१३६६६७	९.९९९०७७७	८.८१४५८९०	११.१८५४११०	१६
४५	८.६८१०४७३	९.९९९४९९६	८.६८१५४७७	११.३१८४५२३	८.८१५५९११	९.९९९०६९९	८.८१६५२१२	११.१८३४७८८	१५
४६	८.६८३६६५५	९.९९९४९३५	८.६८४१७२०	११.३१५८२८०	८.८१७५२२२	९.९९९०६२१	८.८१८४६०१	११.१८१५३९९	१४
४७	८.६८६२७४४	९.९९९४८७३	८.६८६७८७१	११.३१३२१२९	८.८१९४३६२	९.९९९०५४३	८.८२०३८१९	११.१७९६१८१	१३
४८	८.६८८८८६३	९.९९९४८१२	८.६८९४०५१	११.३१०५९४९	८.८२१३४०३	९.९९९०४६४	८.८२२२९३९	११.१७७७०६१	१२
४९	८.६९१४४३८	९.९९९४७५०	८.६९१९६८८	११.३०८०३१२	८.८२३२३४०	९.९९९०३८६	८.८२४१९५४	११.१७५८०४६	११
५०	८.६९३९९८८	९.९९९४६८८	८.६९४५३००	११.३०५४७००	८.८२५११३०	९.९९९०३०७	८.८२६०८२३	११.१७३९१७७	१०
५१	८.६९६५४७३	९.९९९४६२५	८.६९७०८४८	११.३०२९१५२	८.८२७०११९	९.९९९०२२९	८.८२७९९९२	११.१७२०००८	९
५२	८.६९९०९७३	९.९९९४५६२	८.६९९६४११	११.३००३५८९	८.८२८८७८४	९.९९९०१४९	८.८२९८६३४	११.१७०१३६६	८
५३	८.७०१६२५८	९.९९९४४९९	८.७०२१७५९	११.२९७८२४१	८.८३०७४४१	९.९९९००७२	८.८३१७३६९	११.१६८२६३१	७
५४	८.७०४०९१०	९.९९९४४३५	८.७०४६४७५	११.२९५३५२५	८.८३२६२०७	९.९९८९९१३	८.८३३६२९४	११.१६६३७०६	६
५५	८.७०६५७७१	९.९९९४३७१	८.७०७१४००	११.२९२८६००	८.८३४४४५६	९.९९८९८४४	८.८३५४६११	११.१६४५३८९	५
५६	८.७०९०१४१	९.९९९४३०५	८.७०९५८३६	११.२९०४१६४	८.८३६२२१७	९.९९८९७५६	८.८३७२४६१	११.१६२७५३९	४
५७	८.७११४५०७	९.९९९४२४१	८.७१२०२६६	११.२८७९७३४	८.८३८१७३०	९.९९८९६७७	८.८३९१९६३	११.१६०८०३७	३
५८	८.७१३८४४२	९.९९९४१७५	८.७१४४२६७	११.२८५५७३३	८.८३९९९४६	९.९९८९५९६	८.८४१००३६	११.१५८९९६४	२
५९	८.७१६२३३३	९.९९९४११०	८.७१६८२२३	११.२८३१७७७	८.८४१७९६४	९.९९८९५१०	८.८४२८२५४	११.१५७१७४६	१
६०	८.७१८८००२	९.९९९४०४४	८.७१९३९५८	११.२८०६०४२	८.८४३५८४५	९.९९८९४०८	८.८४४६४३७	११.१५५३५६३	०
क.	कोभुजज्या (८७ अंश)	भुजज्या (८७ अंश)	कोस्पर्शरेघ (८७ अंश)	स्पर्शरेघ (८७ अंश)	कोभुजज्या (८६ अंश)	भुजज्या (८६ अंश)	कोस्पर्शरेघ (८६ अंश)	स्पर्शरेघ (८६ अंश)	क.

कोष्टक २

लाग्रतंभिक भुजज्या स्पर्शरेष इत्यादि

	४ अंश				५ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	८·८४३५८४५	९·९९८९४०८	८·८४४६४३७	११·१५५३५६३	८·९४०२९६६	९·९९८३४४४	८·९४१९५४२	११·०५८०४५८	६०
१	८·८४५४३८७	९·९९८९३३२	८·८४६४७५५	११·१५३५२४५	८·९४१७०३८	९·९९८३३३३	८·९४३४७०४	११·०५६५२९६	५९
२	८·८४७२९८३	९·९९८९२५३	८·८४८३२६०	११·१५१६७४०	८·९४३१४७४	९·९९८३२२२	८·९४४८४५२	११·०५५१५४८	५८
३	८·८४९१७०१	९·९९८९१७४	८·८५०१५२७	११·१४९८४७३	८·९४४५९०६	९·९९८३१११	८·९४६२५९५	११·०५३७४०५	५७
४	८·८५१०७४१	९·९९८९०९५	८·८५१९८४६	११·१४८०१५४	८·९४६०३४	९·९९८३०००	८·९४७७०३४	११·०५२२९६६	५६
५	८·८५२८५२५	९·९९८९०१६	८·८५३६५२९	११·१४६३४७१	८·९४७४४५६	९·९९८२८८९	८·९४९११६८	११·०५०८८३२	५५
६	८·८५४६२११	९·९९८८९३७	८·८५५७२७३	११·१४४२७२७	८·९४८८८७४	९·९९८२७७७	८·९५०६०५७	११·०४९३९४३	५४
७	८·८५६३०४१	९·९९८८८५८	८·८५७५७५१	११·१४२४२४९	८·९५०२८०७	९·९९८२६६६	८·९५२०१२१	११·०४७९८७९	५३
८	८·८५८१८०३	९·९९८८७६६	८·८५९३१३२	११·१४०६८६८	८·९५१६११६	९·९९८२५५५	८·९५३४५६२	११·०४६५५४१	५२
९	८·८५९९४४६	९·९९८८६९०	८·८६१०६८६	११·१३८९३१४	८·९५३१०००	९·९९८२४४३	८·९५४८५५६	११·०४५१४४४	५१
१०	८·८६१६२८३	९·९९८८६५१	८·८६२८४३३	११·१३७१५६७	८·९५४४४११	९·९९८२३३२	८·९५६२०७९	११·०४३७३३३	५०
११	८·८६३३०१४	९·९९८८५७१	८·८६४६१७३	११·१३५३८२७	८·९५५८९२४	९·९९८२२२०	८·९५७६७०४	११·०४२३२९६	४९
१२	८·८६५४७३८	९·९९८८४९२	८·८६६४२०६	११·१३३५७९४	८·९५७२८५४	९·९९८२१०१	८·९५९०७५५	११·०४०९२४५	४८
१३	८·८६६९४४५	९·९९८८४१३	८·८६८१६३२	११·१३१८३६८	८·९५८६९७०	९·९९८१९९७	८·९६०४७९३	११·०३९५२१७	४७
१४	८·८६८७१६९	९·९९८८३३३	८·८६९९३४५	११·१३००६५५	८·९६००७४२	९·९९८१८८६	८·९६१८८६६	११·०३८१३४	४६
१५	८·८७०४६६८	९·९९८८२०४	८·८७१६०६१	११·१२८३९३६	८·९६१४१२१	९·९९८१७७४	८·९६३२३४५	११·०३६७६५५	४५
१६	८·८७२१५६५	९·९९८८१७४	८·८७३२७७०	११·१२६७२३०	८·९६२८१०१	९·९९८१६१६	८·९६४५६३१	११·०३५३६६९	४४
१७	८·८७३८२४४	९·९९८८०८५	८·८७४४६९१	११·१२५४४३१	८·९६४१७००	९·९९८१५४१	८·९६६०१०९	११·०३३९८९१	४३
१८	८·८७४९१३८	९·९९८८००६	८·८७६६१६२	११·१२३८३९८	८·९६५५४३४	९·९९८१४३१	८·९६७३१३४	११·०३२६०६	४२
१९	८·८७७१६१५	९·९९८७९६६	८·८७७८७४१	११·१२२२१५९	८·९६६८९६३	९·९९८१३२८	८·९६८७६६६	११·०३१२३३४	४१
२०	८·८७८२८५४	९·९९८७८५७	८·८७९५४२१	११·१२०४५७९	८·९६८२४४१	९·९९८१२१६	८·९७०११३३	११·०२९८७६७	४०
२१	८·८७९९१४१	९·९९८७७४७	८·८८११२०२	११·११८८७९८	८·९६९६९००	९·९९८११०४	८·९७१४९९६	११·०२८५००४	३९
२२	८·८८१६०७०	९·९९८७७३८	८·८८२८६६१	११·११७१३३९	८·९७०९१४७	९·९९८०९९२	८·९७२८५५४	११·०२७१४५६	३८
२३	८·८८३३२५८	९·९९८७६२८	८·८८४५६३०	११·११५४३७०	८·९७२२२८१	९·९९८०८८०	८·९७४२४०१	११·०२५७५९९	३७
२४	८·८८४९१०३	९·९९८७५१८	८·८८६१५८५	११·११३८४१५	८·९७३६३२८	९·९९८०७६८	८·९७५५४६०	११·०२४४४४०	३६
२५	८·८८६५४४२	९·९९८७४०८	८·८८७८०३३	११·११२२९६७	८·९७४९१६२	९·९९८०६५६	८·९७६८५०६	११·०२३१४९४	३५
२६	८·८८८१७४४	९·९९८७३११	८·८८९४७५६	११·११०५२४४	८·९७६२३६३	९·९९८०४४४	८·९७८२३४८	११·०२१७६५२	३४
२७	८·८८९८००१	९·९९८७२०२	८·८९११११२	११·१०८८८८८	८·९७७५६२१	९·९९८०३३२	८·९७९५२८९	११·०२०४७११	३३
२८	८·८९१४२११	९·९९८७०५४	८·८९२७४४२	११·१०७२५५८	८·९७८८८४१	९·९९८०२२०	८·९८०८६२१	११·०१९१३७९	३२
२९	८·८९३०३७५	९·९९८६९९२	८·८९४३३६६	११·१०५६६३४	८·९८०२०५१	९·९९८०१०८	८·९८२१९४३	११·०१७८०५७	३१
३०	८·८९४६४६३	९·९९८६८४५	८·८९५९६१८	११·१०४०३८२	८·९८१५७१३	९·९९७९९९६	८·९८३५१५१	११·०१६४८४९	३०
३१	८·८९६२४७६	९·९९८६७४८	८·८९७५७२६	११·१०२४२७४	८·९८२८२८३	९·९९७९८८४	८·९८४८३९९	११·०१५१६०१	२९
३२	८·८९७८४१२	९·९९८६६३८	८·८९९१७७३	११·१००८२२७	८·९८४१८९१	९·९९७९७७२	८·९८६१२१९	११·०१३८७८१	२८
३३	८·८९९४२७१	९·९९८६५२८	८·९००९४३	११·०९९२५७	८·९८५४४११	९·९९७९६५९	८·९८७४४५२	११·०१२५५४८	२७
३४	८·९०१००५४	९·९९८६४१८	८·९०२३६२८	११·०९७६३७२	८·९८६६७८१	९·९९७९५४७	८·९८८७२३४	११·०११२७६६	२६
३५	८·९०२५७६६	९·९९८६३०९	८·९०३९४५७	११·०९६०५४३	८·९८७९०८३	९·९९७९४३५	८·९९०००७१	११·००९९९२९	२५
३६	८·९०४१३६९	९·९९८६३९९	८·९०५५४७१	११·०९४४५२९	८·९८९१३०४	९·९९७९३२२	८·९९१२९८२	११·००८७०१८	२४
३७	८·९०५६९३६	९·९९८६५८९	८·९०७१३४७	११·०९२८६५३	८·९९१०६६०	९·९९७९२१०	८·९९२५७५०	११·००७४२५०	२३
३८	८·९०७२७१७	९·९९८६४७८	८·९०८६२३९	११·०९१३७६१	८·९९११२७३	९·९९७९०९७	८·९९२४०७५	११·००६१५५५	२२
३९	८·९०८८६४३	९·९९८६३६८	८·९१०२२७५	११·०८९७७२५	८·९९१३२२२	९·९९७८९८५	८·९९१५३३७	११·००४९६६३	२१
४०	८·९१०४०४७	९·९९८६२५८	८·९११७८४६	११·०८८२१५४	८·९९१४४१७	९·९९७८८७२	८·९९१६१२४	११·००३३७१६	२०
४१	८·९११९९४८	९·९९८६१४८	८·९१३३८०१	११·०८६६१९९	८·९९१५७६८	९·९९७८६०	८·९९१७२०८	११·००२९०१२	१९
४२	८·९१३५३८५	९·९९८६०३७	८·९१४९३४८	११·०८५०६५२	८·९९१७०३६	९·९९७८६४७	८·९९१११८८	११·०००८११२	१८
४३	८·९१५०९२२	९·९९८५९२७	८·९१६४९९५	११·०८३५००५	८·९९८२११	९·९९७८६३५	९·०००४६५	१०·९९९५४३५	१७
४४	८·९१६६४५०	९·९९८५८१६	८·९१८०६३४	११·०८१९३६६	८·९९९४६६९	९·९९७८२२	९·००१६३८	१०·९९८२६२	१६
४५	८·९१८१९७३	९·९९८५७०६	८·९१९६२६७	११·०८०३७३३	९·०००८९१६	९·९९७८०१	९·००३०००७	१०·९९६९९३	१५
४६	८·९१९७४९१	९·९९८५५९४	८·९२११८९६	११·०७८८१०४	९·००२०६१	९·९९७७४९७	९·००४२७२	१०·९९५७२८	१४
४७	८·९२१२००३	९·९९८५४८४	८·९२२६५१९	११·०७७३४८१	९·००३३१८	९·९९७७७८४	९·००५४३४	१०·९९४४६६	१३
४८	८·९२२६२५०	९·९९८५३७४	८·९२४११३६	११·०७५८६४	९·००४५६३	९·९९७७७७१	९·००६७९२	१०·९९३२०८	१२
४९	८·९२४१११२	९·९९८४९६४	८·९२५६९४१	११·०७४३४११	९·००५८०५	९·९९७७५४८	९·००८०४७	१०·९९१९५३	११
५०	८·९२५६६०१	९·९९८४८४३	८·९२७११५६	११·०७२८५४४	९·००७०४४	९·९९७७४५	९·००९२९८	१०·९९०७०२	१०
५१	८·९२७११००	९·९९८४७४२	८·९२८६४५८	११·०७१३५४२	९·००८२७८	९·९९७७३२	९·०१०५४६	१०·९८९४५४	९
५२	८·९२८५८५७	९·९९८४६३१	८·९३०१४४५	११·०६९८५५५	९·००९५१०	९·९९७७२१	९·०११७९०	१०·९८८२१०	८
५३	८·९३००९६८	९·९९८४५२१	८·९३१६४७०	११·०६८३५३०	९·०१०७३७	९·९९७७०६	९·०१३०३१	१०·९८६९६९	७
५४	८·९३१४५४४	९·९९८४४१०	८·९३३१३३४	११·०६६८६६६	९·०११९६२	९·९९७६९३	९·०१४२६८	१०·९८५७३२	६
५५	८·९३३०९११	९·९९८४२९९	८·९३४६१६	११·०६५४३८४	९·०१३१८२	९·९९७६८०	९·०१५५०२	१०·९८४४९८	५
५६	८·९३४४४८१	९·९९८४१८८	८·९३६१०९३	११·०६३९१०७	९·०१४४००	९·९९७६६७	९·०१६७३२	१०·९८३२६८	४
५७	८·९३५९४९२	९·९९८४०७७	८·९३७४७४५	११·०६२४२५	९·०१५६१३	९·९९७६५४	९·०१७९५९	१०·९८२०४१	३
५८	८·९३७३३१९	९·९९८३९६६	८·९३९०७३२	११·०६१०१४९	९·०१६८२४	९·९९७६४१	९·०१९१८३	१०·९८०८१७	२
५९	८·९३८८५५०	९·९९८३८५५	८·९४०४९१४	११·०५९५४०६	९·०१८०३१	९·९९७६२८	९·०२०४०३	१०·९७९५९७	१
६०	८·९४०२९९६	९·९९८३४४२	८·९४१९५४२	११·०५८०४८८	९·०१९२३४	९·९९७६१४	९·०२१६२०	१०·९७८३८०	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क
	८५ अंश				८४ अंश				

लागरतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

क	६ अंश भुजज्या	६ अंश कोभुजज्या	६ अंश स्पर्शरेघ	६ अंश कोस्पर्शरेघ	७ अंश भुजज्या	७ अंश कोभुजज्या	७ अंश स्पर्शरेघ	७ अंश कोस्पर्शरेघ	क
०	९.०१९२३४६	९.९९७६१४३	९.०२१६२०३	१०.९७८३७९७	९.०८५८९४५	९.९९६७५०७	९.०८९१४३८	१०.९१०८५६२	६०
१	९.०२०४३४५	९.९९७६००९	९.०२२८३३६	१०.९७७१६६४	९.०८६९२३२	९.९९६७३५४	९.०९०१८७८	१०.९०९८१२२	५९
२	९.०२१६३१२	९.९९७५८७५	९.०२४०४३७	१०.९७५९५६३	९.०८७९४८७	९.९९६७२०९	९.०९१२२७८	१०.९०८७७२२	५८
३	९.०२२८२४५	९.९९७५७४१	९.०२५२५०४	१०.९७४७४९६	९.०८८९७१०	९.९९६७०६४	९.०९२२६४६	१०.९०७७३५४	५७
४	९.०२४०१४६	९.९९७५६०६	९.०२६४५४०	१०.९७३५४६०	९.०८९९९१०	९.९९६६९१८	९.०९३२९९२	१०.९०६७००८	५६
५	९.०२५२०१३	९.९९७५४७०	९.०२७६५४३	१०.९७२३४५७	९.०९१००६८	९.९९६६७७३	९.०९४३२९६	१०.९०५६७०४	५५
६	९.०२६३८४८	९.९९७५३३४	९.०२८८५१४	१०.९७११४८६	९.०९२०२०४	९.९९६६६२७	९.०९५३५७७	१०.९०४६४२३	५४
७	९.०२७५६५०	९.९९७५१९८	९.०३००४५२	१०.९६९९५४८	९.०९३०३०७	९.९९६६४८१	९.०९६३८२६	१०.९०३६१७४	५३
८	९.०२८७४२०	९.९९७५०६१	९.०३१२३५९	१०.९६८७६४१	९.०९४०३७८	९.९९६६३३४	९.०९७४०४४	१०.९०२५९५६	५२
९	९.०२९९१५८	९.९९७४९२४	९.०३२४२३४	१०.९६७५७६६	९.०९५०४१६	९.९९६६१८७	९.०९८४२२९	१०.९०१५७७१	५१
१०	९.०३१०८६५	९.९९७४७८७	९.०३३६०७८	१०.९६६३९२२	९.०९६०४२३	९.९९६६०४१	९.०९९४३८२	१०.९००५६१८	५०
११	९.०३२२५४०	९.९९७४६४९	९.०३४७८९१	१०.९६५२१०९	९.०९७०३९८	९.९९६५८९३	९.१००४५०५	१०.८९९५४९५	४९
१२	९.०३३४१८४	९.९९७४५११	९.०३५९६७३	१०.९६४०३२७	९.०९८०३४१	९.९९६५७४६	९.१०१४५९५	१०.८९८५४०५	४८
१३	९.०३४५७९८	९.९९७४३७३	९.०३७१४२५	१०.९६२८५७५	९.०९९०२५३	९.९९६५५९८	९.१०२४६५५	१०.८९७५३४५	४७
१४	९.०३५७३८१	९.९९७४२३४	९.०३८३१४७	१०.९६१६८५३	९.१०००१३४	९.९९६५४५०	९.१०३४६८४	१०.८९६५३१६	४६
१५	९.०३६८९३४	९.९९७४०९५	९.०३९४८३९	१०.९६०५१६१	९.१००९९८४	९.९९६५३०२	९.१०४४६८२	१०.८९५५३१८	४५
१६	९.०३८०४५७	९.९९७३९५६	९.०४०६५०१	१०.९५९३४९९	९.१०१९८०३	९.९९६५१५३	९.१०५४६५०	१०.८९४५३५०	४४
१७	९.०३९१९५०	९.९९७३८१७	९.०४१८१३३	१०.९५८१८६७	९.१०२९५९२	९.९९६५००४	९.१०६४५८८	१०.८९३५४१२	४३
१८	९.०४०३४१४	९.९९७३६७७	९.०४२९७३७	१०.९५७०२६३	९.१०३९३५१	९.९९६४८५५	९.१०७४४९६	१०.८९२५५०४	४२
१९	९.०४१४८४८	९.९९७३५३७	९.०४४१३११	१०.९५५८६८९	९.१०४९०७९	९.९९६४७०६	९.१०८४३७३	१०.८९१५६२७	४१
२०	९.०४२६२५३	९.९९७३३९६	९.०४५२८५७	१०.९५४७१४३	९.१०५८७७८	९.९९६४५५६	९.१०९४२२२	१०.८९०५७७८	४०
२१	९.०४३७६२९	९.९९७३२५५	९.०४६४३७४	१०.९५३५६२६	९.१०६८४४७	९.९९६४४०६	९.११०४०४१	१०.८८९५९५९	३९
२२	९.०४४८९७६	९.९९७३११४	९.०४७५८६२	१०.९५२४१३८	९.१०७८०८६	९.९९६४२५६	९.१११३८३०	१०.८८८६१७०	३८
२३	९.०४६०२९५	९.९९७२९७२	९.०४८७३२३	१०.९५१२६७७	९.१०८७६९६	९.९९६४१०६	९.११२३५९०	१०.८८७६४१०	३७
२४	९.०४७१५८५	९.९९७२८३०	९.०४९८७५५	१०.९५०१२४५	९.१०९७२७६	९.९९६३९५५	९.११३३३२१	१०.८८६६६७९	३६
२५	९.०४८२८४७	९.९९७२६८८	९.०५१०१५९	१०.९४८९८४१	९.११०६८२७	९.९९६३८०४	९.११४३०२३	१०.८८५६९७७	३५
२६	९.०४९४०८०	९.९९७२५४५	९.०५२१५३५	१०.९४७८४६५	९.१११६३४९	९.९९६३६५३	९.११५२६९६	१०.८८४७३०४	३४
२७	९.०५०५२८६	९.९९७२४०२	९.०५३२८८४	१०.९४६७११६	९.११२५८४३	९.९९६३५०१	९.११६२३४२	१०.८८३७६५८	३३
२८	९.०५१६४६४	९.९९७२२५९	९.०५४४२०५	१०.९४५५७९५	९.११३५३०८	९.९९६३३४९	९.११७१९५९	१०.८८२८०४१	३२
२९	९.०५२७६१४	९.९९७२११५	९.०५५५४९९	१०.९४४४५०१	९.११४४७४४	९.९९६३१९७	९.११८१५४७	१०.८८१८४५३	३१
३०	९.०५३८७३७	९.९९७१९७१	९.०५६६७६६	१०.९४३३२३४	९.११५४१५२	९.९९६३०४४	९.११९११०८	१०.८८०८८९२	३०
३१	९.०५४९८३२	९.९९७१८२७	९.०५७८००५	१०.९४२१९९५	९.११६३५३२	९.९९६२८९१	९.१२००६४१	१०.८७९९३५९	२९
३२	९.०५६०९००	९.९९७१६८२	९.०५८९२१८	१०.९४१०७८२	९.११७२८८४	९.९९६२७३८	९.१२१०१४६	१०.८७८९८५४	२८
३३	९.०५७१९४१	९.९९७१५३७	९.०६००४०४	१०.९३९९५९६	९.११८२२०८	९.९९६२५८४	९.१२१९६२४	१०.८७८०३७६	२७
३४	९.०५८२९५५	९.९९७१३९१	९.०६११५६४	१०.९३८८४३६	९.११९१५०५	९.९९६२४३०	९.१२२९०७५	१०.८७७०९२५	२६
३५	९.०५९३९४३	९.९९७१२४६	९.०६२२६९७	१०.९३७७३०३	९.१२००७७४	९.९९६२२७६	९.१२३८४९८	१०.८७६१५०२	२५
३६	९.०६०४९०४	९.९९७१०९९	९.०६३३८०५	१०.९३६६१९५	९.१२१००१६	९.९९६२१२१	९.१२४७८९५	१०.८७५२१०५	२४
३७	९.०६१५८३९	९.९९७०९५३	९.०६४४८८६	१०.९३५५११४	९.१२१९२३१	९.९९६१९६६	९.१२५७२६५	१०.८७४२७३५	२३
३८	९.०६२६७४८	९.९९७०८०६	९.०६५५९४२	१०.९३४४०५८	९.१२२८४१८	९.९९६१८११	९.१२६६६०७	१०.८७३३३९३	२२
३९	९.०६३७६३०	९.९९७०६५९	९.०६६६९७१	१०.९३३३०२९	९.१२३७५७९	९.९९६१६५५	९.१२७५९२४	१०.८७२४०७६	२१
४०	९.०६४८४८६	९.९९७०५११	९.०६७७९७५	१०.९३२२०२५	९.१२४६७१३	९.९९६१४९९	९.१२८५२१४	१०.८७१४७८६	२०
४१	९.०६५९३१७	९.९९७०३६३	९.०६८८९५४	१०.९३११०४६	९.१२५५८२०	९.९९६१३४३	९.१२९४४७७	१०.८७०५५२३	१९
४२	९.०६७०१२२	९.९९७०२१५	९.०६९९९०७	१०.९३०००९३	९.१२६४९००	९.९९६११८७	९.१३०३७१३	१०.८६९६२८७	१८
४३	९.०६८०९०१	९.९९७००६६	९.०७१०८३५	१०.९२८९१६५	९.१२७३९५४	९.९९६१०३०	९.१३१२९२४	१०.८६८७०७६	१७
४४	९.०६९१६५५	९.९९६९९१७	९.०७२१७३८	१०.९२७८२६२	९.१२८२९८२	९.९९६०८७२	९.१३२२१०९	१०.८६७७८९१	१६
४५	९.०७०२३८३	९.९९६९७६८	९.०७३२६१५	१०.९२६७३८५	९.१२९१९८३	९.९९६०७१५	९.१३३१२६८	१०.८६६८७३२	१५
४६	९.०७१३०८६	९.९९६९६१८	९.०७४३४६८	१०.९२५६५३२	९.१३००९५८	९.९९६०५५७	९.१३४०४०१	१०.८६५९५९९	१४
४७	९.०७२३७६४	९.९९६९४६८	९.०७५४२९६	१०.९२४५७०४	९.१३०९९०६	९.९९६०३९८	९.१३४९५०८	१०.८६५०४९२	१३
४८	९.०७३४४१७	९.९९६९३१७	९.०७६५१००/९.०७६४३३२	१०.९२३५६९१	९.१३१८८२९	९.९९६०२३९	९.१३५८५९०	१०.८६४१४१०	१२
४९	९.०७४५०४५	९.९९६९१६६	९.०७७५८७९	१०.९२२४१२१	९.१३२७७२६	९.९९६००८०	९.१३६७६४६	१०.८६३२३५४	११
५०	९.०७५५६४९	९.९९६९०१५	९.०७८६६३४	१०.९२१३३६६	९.१३३६५९७	९.९९५९९२१	९.१३७६६७६	१०.८६२३३२४	१०
५१	९.०७६६२२७	९.९९६८८६३	९.०७९७३६४	१०.९२०२६३६	९.१३४५४४२	९.९९५९७६१	९.१३८५६८१	१०.८६१४३१९	९
५२	९.०७७६७८१	९.९९६८७११	९.०८०८०७०	१०.९१९१९३०	९.१३५४२६१	९.९९५९६००	९.१३९४६६१	१०.८६०५३३९	८
५३	९.०७८७३११	९.९९६८५५९	९.०८१८७५२	१०.९१८१२४८	९.१३६३०५५	९.९९५९४४०	९.१४०३६१५	१०.८५९६३८५	७
५४	९.०७९७८१६	९.९९६८४०६	९.०८२९४१०	१०.९१७०५९०	९.१३७१८२३	९.९९५९२७९	९.१४१२५४४	१०.८५८७४५६	६
५५	९.०८०८२९७	९.९९६८२५३	९.०८४००४४	१०.९१५९९५६	९.१३८०५६६	९.९९५९११७	९.१४२१४४९	१०.८५७८५५१	५
५६	९.०८१८७५४	९.९९६८१००	९.०८५०६५४	१०.९१४९३४६	९.१३८९२८४	९.९९५८९५५	९.१४३०३२९	१०.८५६९६७१	४
५७	९.०८२९१८७	९.९९६७९४६	९.०८६१२४१	१०.९१३८७५९	९.१३९७९७७	९.९९५८७९३	९.१४३९१८४	१०.८५६०८१६	३
५८	९.०८३९५९५	९.९९६७७९२	९.०८७१८०३	१०.९१२८१९७	९.१४०६६४५	९.९९५८६३०	९.१४४८०१५	१०.८५५१९८५	२
५९	९.०८४९९८०	९.९९६७६३८	९.०८८२३४२	१०.९११७६५८	९.१४१५२८८	९.९९५८४६७	९.१४५६८२१	१०.८५४३१७९	१
६०	९.०८६०३४१	९.९९६७४८३	९.०८९२८५८	१०.९१०७१४२	९.१४२३९०६	९.९९५८३०३	९.१४६५६०३	१०.८५३४३९७	०
क	८३ अंश कोभुजज्या	८३ अंश भुजज्या	८३ अंश कोस्पर्शरेघ	८३ अंश स्पर्शरेघ	८२ अंश कोभुजज्या	८२ अंश भुजज्या	८२ अंश कोस्पर्शरेघ	८२ अंश स्पर्शरेघ	क

कोष्टक २

आठदशमिक भुजज्या स्पर्शरेषा इत्यादि

	८ अंश				९ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	

८० अंश

कोष्टक २

लाग्रतमिक भुजज्या स्पर्शरेष इत्यादि

क	१० अंश				११ अंश				क
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क

कोष्टक ३

लागरतम्मिक भुजज्या स्पर्शरेषा इत्यादि

	११ अंश				१२ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	क

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेष इत्यादि

	१४ अंश				१५ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	को भुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	को भुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क

कोष्टक २

आयतनिक भुजज्या स्पर्शरेषा इत्यादि

	१६ अंश				१७ अंश				
क.	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	क.
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०

कोष्टक २

लाग्रतंभिक भुजज्या स्पर्शरेष इत्यादि

	१४ अंश				१५ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क

कोष्टक २

लाग्रथमिक भुजज्या स्पर्शरेषा इत्यादि

	२० अंश				२१ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेषा	कोस्पर्शरेषा	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेषा	स्पर्शरेषा	क
	६९ अंश				६८ अंश				

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघइत्यादि

क	२२ अंश भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेध	कोस्पर्शरेध	२३ अंश भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेध	कोस्पर्शरेध	क
०	९·५७३५७५४	९·९६७१६६६	९·६०६४०९०	१०·३९३५९१०	९·५९१९८७८	९·९६४०२६	९·६२७८५४२	१०·३७२१४८८	६०
१	९·५७३८८८८	९·९६७११४८	९·६०६७७७३	१०·३९३२२२७	९·५९२२१७६	९·९६३९७२	९·६२८२०३	१०·३७१७९७	५९
२	९·५७४२२००	९·९६७०६४४	९·६०७१३७३	१०·३९२८६२३	९·५९२२४७३	९·९६३९१९	९·६२८५५१४	१०·३७१४४६	५८
३	९·५७४५४१२	९·९६७०१७३	९·६०७४५००	१०·३९२५४००	९·५९१२७७०	९·९६३८६५	९·६२८९१०५	१०·३७१०९५	५७
४	९·५७४८६२४	९·९६६६९६१	९·६०७८८६३	१०·३९२२१३७	९·५९१३०६७	९·९६३८११	९·६२९२४५५	१०·३७०७४५	५६
५	९·५७५४७३६	९·९६६६११०	९·६०८२२२५	१०·३९१७७५५	९·५९१३३६३	९·९६३७५७	९·६२९६०६	१०·३७०३९४	५५
६	९·५७५४४४७	९·९६६६८११	९·६०८५८८८	१०·३९१४११२	९·५९१३६५९	९·९६३७०४	९·६२९९५६	१०·३७००४४	५४
७	९·५७५५७५८	९·९६६६८०८	९·६०८९१५०	१०·३९११०५०	९·५९१३१५५	९·९६३६५०	९·६३०३०६	१०·३६९६९४	५३
८	९·५७६०६९१	९·९६६६७५६	९·६०९१३१२	१०·३९०८६८८	९·५९१४२५१	९·९६३५९६	९·६३०६५५	१०·३६९३४५	५२
९	९·५७६४३७९	९·९६६६७०५	९·६०९६७४	१०·३९०३२६	९·५९१४५४७	९·९६३५४२	९·६३१००५	१०·३६८९९५	५१
१०	९·५७६६६८१	९·९६६६६५३	९·६१०००३६	१०·३८९९६४	९·५९१४८४२	९·९६३४८८	९·६३१३५४	१०·३६८६४६	५०
११	९·५७७०९९९	९·९६६६६०२	९·६१०३३९७	१०·३८९६६०३	९·५९१५१३७	९·९६३४३४	९·६३१७०४	१०·३६८२९६	४९
१२	९·५७७३७०१	९·९६६६५५०	९·६१०७५५१	१०·३८९२४४९	९·५९१५४३२	९·९६३३८१	९·६३२०५३	१०·३६७९४७	४८
१३	९·५७७७६१८	९·९६६६४९९	९·६१११२२०	१०·३८८८७८०	९·५९१५७२७	९·९६३३२५	९·६३२४०२	१०·३६७५९८	४७
१४	९·५७७७९२७	९·९६६६४४७	९·६११४४८०	१०·३८८५५२०	९·५९१६०२१	९·९६३२७१	९·६३२७५०	१०·३६७२५०	४६
१५	९·५७८२३६	९·९६६६३९५	९·६११७८४१	१०·३८८२१५९	९·५९१६३१५	९·९६३२१७	९·६३३०९९	१०·३६६९०१	४५
१६	९·५७८५४५	९·९६६६३४४	९·६१२२२०१	१०·३८७७७९९	९·५९१६६०९	९·९६३१६३	९·६३३४४७	१०·३६६५५३	४४
१७	९·५७८८८५३	९·९६६६२९२	९·६१२५५६१	१०·३८७४४३९	९·५९१६९०३	९·९६३१०८	९·६३३७९५	१०·३६६२०५	४३
१८	९·५७९१२६२	९·९६६६२४०	९·६१२९२१२	१०·३८७०७८८	९·५९१७१९६	९·९६३०५४	९·६३४१४३	१०·३६५८५७	४२
१९	९·५७९४४७०	९·९६६६१८८	९·६१३२२८१	१०·३८६७७१९	९·५९१७४९०	९·९६२९९९	९·६३४४९०	१०·३६५५१०	४१
२०	९·५७९७७७७	९·९६६६१३६	९·६१३६६४१	१०·३८६३३५९	९·५९१७७८३	९·९६२९४५	९·६३४८३८	१०·३६५१६२	४०
२१	९·५८००८५	९·९६६६०८५	९·६१४००००	१०·३८६०००	९·५९१८०७५	९·९६२८९०	९·६३५१८५	१०·३६४८१५	३९
२२	९·५८०३९२	९·९६६६०३३	९·६१४३५१	१०·३८५६४९	९·५९१८३६८	९·९६२८३६	९·६३५५३२	१०·३६४४६८	३८
२३	९·५८०६९९९	९·९६६५९८१	९·६१४७०१८	१०·३८५२९८२	९·५९१८६६०	९·९६२७८१	९·६३५८७९	१०·३६४१२१	३७
२४	९·५८१००५	९·९६६५९२९	९·६१५०७७	१०·३८४९२३	९·५९१८९५२	९·९६२७२७	९·६३६२२६	१०·३६३७७४	३६
२५	९·५८१३१२	९·९६६५८७६	९·६१५४३५	१०·३८४५६५	९·५९१९२४४	९·९६२६७२	९·६३६५७२	१०·३६३४२८	३५
२६	९·५८१६१८	९·९६६५८२४	९·६१५७९३	१०·३८४२०७	९·५९१९५३६	९·९६२६१७	९·६३६९१९	१०·३६३०८१	३४
२७	९·५८१९२४	९·९६६५७७२	९·६१६१५१	१०·३८३८४९	९·५९१९८२७	९·९६२५६२	९·६३७२६५	१०·३६२७३५	३३
२८	९·५८२२२९	९·९६६५७२०	९·६१६५०९	१०·३८३४९१	९·६००११८	९·९६२५०८	९·६३७६११	१०·३६२३८९	३२
२९	९·५८२५३५	९·९६६५६६८	९·६१६८६७	१०·३८३१३३	९·६००४०९	९·९६२४५३	९·६३७९५६	१०·३६२०४४	३१
३०	९·५८२८४०	९·९६६५६१५	९·६१७२२४	१०·३८२७७६	९·६००७००	९·९६२३९८	९·६३८३०२	१०·३६१६९८	३०
३१	९·५८३१४५	९·९६६५५६३	९·६१७५८२	१०·३८२४१८	९·६००९९०	९·९६२३४३	९·६३८६४७	१०·३६१३५३	२९
३२	९·५८३४४९	९·९६६५५११	९·६१७९३९	१०·३८२०६१	९·६०१२८०	९·९६२२८८	९·६३८९९२	१०·३६१००८	२८
३३	९·५८३७५४	९·९६६५४५८	९·६१८२९५	१०·३८१७०५	९·६०१५७०	९·९६२२३३	९·६३९३३७	१०·३६०६६३	२७
३४	९·५८४०५८	९·९६६५४०६	९·६१८६५२	१०·३८१३४८	९·६०१८६०	९·९६२१७८	९·६३९६८२	१०·३६०३१८	२६
३५	९·५८४३६१	९·९६६५३५३	९·६१९००८	१०·३८०९९२	९·६०२१५०	९·९६२१२३	९·६४००२७	१०·३५९९७३	२५
३६	९·५८४६६५	९·९६६५३०१	९·६१९३६४	१०·३८०६३६	९·६०२४३९	९·९६२०६८	९·६४०३७१	१०·३५९६२९	२४
३७	९·५८४९६८	९·९६६५२४८	९·६१९७२०	१०·३८०२८०	९·६०२७२८	९·९६२०१२	९·६४०७१६	१०·३५९२८४	२३
३८	९·५८५२७२	९·९६६५१९५	९·६२००७६	१०·३७९९२४	९·६०३०१७	९·९६१९५७	९·६४१०६०	१०·३५८९४०	२२
३९	९·५८५५७४	९·९६६५१४३	९·६२०४३२	१०·३७९५६८	९·६०३३०५	९·९६१९०२	९·६४१४०४	१०·३५८५९६	२१
४०	९·५८५८७७	९·९६६५०९०	९·६२०७८७	१०·३७९२१३	९·६०३५९४	९·९६१८४६	९·६४१७४७	१०·३५८२५३	२०
४१	९·५८६१७९	९·९६६५०३७	९·६२११४२	१०·३७८८५८	९·६०३८८२	९·९६१७९१	९·६४२०९१	१०·३५७९०९	१९
४२	९·५८६४८२	९·९६६४९८४	९·६२१४९७	१०·३७८५०३	९·६०४१७०	९·९६१७३५	९·६४२४३४	१०·३५७५६६	१८
४३	९·५८६७८३	९·९६६४९३१	९·६२१८५२	१०·३७८१४८	९·६०४४५७	९·९६१६८०	९·६४२७७७	१०·३५७२२३	१७
४४	९·५८७०८५	९·९६६४८७८	९·६२२२०७	१०·३७७७९३	९·६०४७४५	९·९६१६२४	९·६४३१२०	१०·३५६८८०	१६
४५	९·५८७३८६	९·९६६४८२५	९·६२२५६१	१०·३७७४३९	९·६०५०३२	९·९६१५६९	९·६४३४६३	१०·३५६५३७	१५
४६	९·५८७६८८	९·९६६४७७३	९·६२२९१५	१०·३७७०८५	९·६०५३१९	९·९६१५१३	९·६४३८०६	१०·३५६१९४	१४
४७	९·५८७९८९	९·९६६४७२०	९·६२३२६९	१०·३७६७३१	९·६०५६०६	९·९६१४५८	९·६४४१४८	१०·३५५८५२	१३
४८	९·५८८२८९	९·९६६४६६६	९·६२३६२३	१०·३७६३७७	९·६०५८९२	९·९६१४०२	९·६४४४९०	१०·३५५५१०	१२
४९	९·५८८५९०	९·९६६४६१३	९·६२३९७६	१०·३७६०२४	९·६०६१७९	९·९६१३४६	९·६४४८३२	१०·३५५१६८	११
५०	९·५८८८९०	९·९६६४५६०	९·६२४३३०	१०·३७५६७०	९·६०६४६५	९·९६१२९०	९·६४५१७४	१०·३५४८२६	१०
५१	९·५८९१९०	९·९६६४५०७	९·६२४६८३	१०·३७५३१७	९·६०६७५१	९·९६१२३५	९·६४५५१६	१०·३५४४८४	९
५२	९·५८९४८९	९·९६६४४५४	९·६२५०३६	१०·३७४९६४	९·६०७०३६	९·९६११७९	९·६४५८५७	१०·३५४१४३	८
५३	९·५८९७८९	९·९६६४४००	९·६२५३८९	१०·३७४६११	९·६०७३२२	९·९६११२३	९·६४६१९९	१०·३५३८०१	७
५४	९·५९००८८	९·९६६४३४७	९·६२५७४१	१०·३७४२५९	९·६०७६०७	९·९६१०६७	९·६४६५४०	१०·३५३४६०	६
५५	९·५९०३८७	९·९६६४२९४	९·६२६०९३	१०·३७३९०७	९·६०७८९२	९·९६१०११	९·६४६८८१	१०·३५३११९	५
५६	९·५९०६८६	९·९६६४२४०	९·६२६४४५	१०·३७३५५५	९·६०८१७७	९·९६०९५५	९·६४७२२२	[illegible]	४
५७	९·५९०९८४	९·९६६४१८७	९·६२६७९७	१०·३७३२०३	९·६०८४६१	९·९६०८९९	९·६४७५६२	[illegible]	३
५८	९·५९१२८२	९·९६६४१३३	९·६२७१४९	१०·३७२८५१	९·६०८७४५	९·९६०८४३	९·६४७९०३	१०·३५२०९७	२
५९	९·५९१५८०	९·९६६४०८०	९·६२७५००	१०·३७२५००	९·६०९०२९	९·९६०७८६	९·६४८२४३	१०·३५१७५७	१
६०	९·५९१८७८	९·९६६४०२६	९·६२७८५२	१०·३७२१४८	९·६०९३१३	९·९६०७३०	९·६४८५८३	१०·३५१४१७	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेध	स्पर्शरेध	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेध	स्पर्शरेध	

कोष्टक २

लाग्रर्नामक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

क	२४ अंश भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	२५ अंश भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
	को भुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	को भुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क.
	६५ अंश				६४ अंश				

कोष्टक २

लाग्रतंभिक भुजज्या स्पर्शरेष इत्यादि

	२६ अंश				२७ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	९·६४१८४२	९·९५३६६०	९·६८८१८२	१०·३११८१८	९·६५७०४७	९·९४९८८१	९·७०७१६६	१०·२९२८३४	६०
१	९·६४२१०१	९·९५३५९९	९·६८८५०२	१०·३११४९८	९·६५७२९५	९·९४९८१६	९·७०७४७८	१०·२९२५२२	५९
२	९·६४२३६०	९·९५३५३७	९·६८८८२३	१०·३१११७७	९·६५७५४२	९·९४९७५२	९·७०७७९०	१०·२९२२१०	५८
३	९·६४२६१८	९·९५३४७५	९·६८९१४३	१०·३१०८५७	९·६५७७९०	९·९४९६८८	९·७०८१०२	१०·२९१८९८	५७
४	९·६४२८७७	९·९५३४१३	९·६८९४६३	१०·३१०५३७	९·६५८०३७	९·९४९६२३	९·७०८४१४	१०·२९१५८६	५६
५	९·६४३१३५	९·९५३३५२	९·६८९७८३	१०·३१०२१७	९·६५८२८४	९·९४९५५८	९·७०८७२६	१०·२९१२७४	५५
६	९·६४३३९३	९·९५३२९०	९·६९०१०३	१०·३०९८९७	९·६५८५३१	९·९४९४९४	९·७०९०३७	१०·२९०९६३	५४
७	९·६४३६५०	९·९५३२२८	९·६९०४२३	१०·३०९५७७	९·६५८७७८	९·९४९४२९	९·७०९३४९	१०·२९०६५१	५३
८	९·६४३९०८	९·९५३१६६	९·६९०७४२	१०·३०९२५८	९·६५९०२५	९·९४९३६४	९·७०९६६[illegible]	[illegible]	[illegible]
९	९·६४४१६५	९·९५३१०४	९·६९१०६२	१०·३०८९३८	९·६५९२७१	९·९४९३००	९·७०९९७[illegible]	१०·२[illegible]००२९	५१
१०	९·६४४४२३	९·९५३०४२	९·६९१३८१	१०·३०८६१९	९·६५९५१७	९·९४९२३५	९·७१०२८२	१०·२८९७१८	५०
११	९·६४४६८०	९·९५२९८०	९·६९१७००	१०·३०८३००	९·६५९७६३	९·९४९१७०	९·७१०५९३	१०·२८९४०७	४९
१२	९·६४४९३६	९·९५२९१८	९·६९२०१९	१०·३०७९८१	९·६६०००९	९·९४९१०५	९·[illegible]१०९०४	१०·२८९०९६	४८
१३	९·६४५१९३	९·९५२८५५	९·६९२३३८	१०·३०७६६२	९·६६०२५५	९·९४९०४०	९·[illegible]११२१५	१०·२८८७८५	४७
१४	९·६४५४५०	९·९५२७९३	९·६९२६५६	१०·३०७३४४	९·६६०५०१	९·९४८९७५	९·[illegible]११५२५	१०·२८८४७५	४६
१५	९·६४५७०६	९·९५२७३१	९·६९२९७५	१०·३०७०२५	९·६६०७४६	९·९४८९१०	९·[illegible]११८३६	१०·२८८१६४	४५
१६	९·६४५९६२	९·९५२६६९	९·६९३२९३	१०·३०६७०७	९·६६०९९१	९·९४८८४५	९·७[illegible]२१४६	१०·२८७८५४	४४
१७	९·६४६२१८	९·९५२६०६	९·६९३६१२	१०·३०६३८८	९·६६१२३६	९·९४८७८०	९·७१२४५६	१०·२८७५४४	४३
१८	९·६४६४७४	९·९५२५४४	९·६९३९३०	१०·३०६०७०	९·६६१४८१	९·९४८७१५	९·७१२७६६	१०·२८७२३४	४२
१९	९·६४६७२९	९·९५२४८१	९·६९४२४८	१०·३०५७५२	९·६६१७२६	९·९४८६५०	९·७१३०७६	१०·२८६९२४	४१
२०	९·६४६९८४	९·९५२४१९	९·६९४५६६	१०·३०५४३४	९·६६१९७०	९·९४८५८४	९·७१३३८६	१०·२८६६१४	४०
२१	९·६४७२४०	९·९५२३५६	९·६९४८८३	१०·३०५११७	९·६६२२१४	९·९४८५१९	९·७१३६९६	१०·२८६३०४	३९
२२	९·६४७४९४	९·९५२२९४	९·६९५२०१	१०·३०४७९९	९·६६२४५९	९·९४८४५४	९·७१४००५	१०·२८५९९५	३८
२३	९·६४७७४९	९·९५२२३१	९·६९५५१८	१०·३०४४८२	९·६६२७०३	९·९४८३८८	९·७१४३१४	१०·२८५६८६	३७
२४	९·६४८००४	९·९५२१६८	९·६९५८३६	१०·३०४१६४	९·६६२९४६	९·९४८३२३	९·७१४६२४	१०·२८५३७६	३६
२५	९·६४८२५८	९·९५२१०६	९·६९६१५३	१०·३०३८४७	९·६६३१९०	९·९४८२५७	९·७१४९३३	१०·२८५०६७	३५
२६	९·६४८५१२	९·९५२०४३	९·६९६४७०	१०·३०३५३०	९·६६३४३३	९·९४८१९२	९·७१५२४२	१०·२८४७५८	३४
२७	९·६४८७६६	९·९५१९८०	९·६९६७८७	१०·३०३२१३	९·६६३६७७	९·९४८१२६	९·७१५५५१	१०·२८४४४९	३३
२८	९·६४९०२०	९·९५१९१७	९·६९७१०३	१०·३०२८९७	९·६६३९२०	९·९४८०६०	९·७१५८६०	१०·२८४१४०	३२
२९	९·६४९२७४	९·९५१८५४	९·६९७४२०	१०·३०२५८०	९·६६४१६३	९·९४७९९५	९·७१६१६८	१०·२८३८३२	३१
३०	९·६४९५२७	९·९५१७९१	९·६९७७३६	१०·३०२२६४	९·६६४४०६	९·९४७९२९	९·७१६४७७	१०·२८३५२३	३०
३१	९·६४९७८१	९·९५१७२८	९·६९८०५३	१०·३०१९४७	९·६६४६४८	९·९४७८६३	९·७१६७८५	१०·२८३२१५	२९
३२	९·६५००३४	९·९५१६६५	९·६९८३६९	१०·३०१६३१	९·६६४८९१	९·९४७७९७	९·७१७०९३	१०·[illegible]	२८
३३	९·६५०२८७	९·९५१६०२	९·६९८६८५	१०·३०१३१५	९·६६५१३३	९·९४७७३१	९·७१७४०१	१०·२८२५[illegible]	२७
३४	९·६५०५३९	९·९५१५३८	९·६९९००१	१०·३००९९९	९·६६५३७५	९·९४७६६५	९·७१७७०९	१०·२८२२[illegible]	२६
३५	९·६५०७९२	९·९५१४७५	९·६९९३१६	१०·३००६८४	९·६६५६१७	९·९४७६००	९·७१८०१७	१०·२८१९८[illegible]	२५
३६	९·६५१०४४	९·९५१४१२	९·६९९६३२	१०·३००३६८	९·६६५८५८	९·९४७५३३	९·७१८३२५	१०·२८१६७[illegible]	२४
३७	९·६५१२९६	९·९५१३४८	९·६९९९४७	१०·३०००५३	९·६६६१००	९·९४७४६७	९·७१८६३३	१०·२८१३६[illegible]	२३
३८	९·६५१५४८	९·९५१२८५	९·७००२६३	१०·२९९७३७	९·६६६३४२	९·९४७४०१	९·७१८९४०	१०·२८१०६०	२२
३९	९·६५१८००	९·९५१२२२	९·७००५७८	१०·२९९४२२	९·६६६५८३	९·९४७३३५	९·७१९२४८	१०·२८०७५२	२१
४०	९·६५२०५२	९·९५११५८	९·७००८९३	१०·२९९१०७	९·६६६८२४	९·९४७२६९	९·७१९५५५	१०·२८०४४५	२०
४१	९·६५२३०३	९·९५१०९५	९·७०१२०८	१०·२९८७९२	९·६६७०६५	९·९४७२०३	९·७१९८६२	१०·२८०१३८	१९
४२	९·६५२५५५	९·९५१०३२	९·७०१५२३	१०·२९८४७७	९·६६७३०५	९·९४७१३६	९·७२०१६९	१०·२७९८३१	१८
४३	९·६५२८०६	९·९५०९६८	९·७०१८३७	१०·२९८१६३	९·६६७५४६	९·९४७०७०	९·७२०४७६	१०·२७९५२४	१७
४४	९·६५३०५७	९·९५०९०५	९·७०२१५२	१०·२९७८४८	९·६६७७८६	९·९४७००४	९·७२०७८३	१०·२७९२१७	१६
४५	९·६५३३०८	९·९५०८४१	९·७०२४६६	१०·२९७५३४	९·६६८०२७	९·९४६९३७	९·७२१०८९	१०·२७८९११	१५
४६	९·६५३५५८	९·९५०७७८	९·७०२७८१	१०·२९७२१९	९·६६८२६७	९·९४६८७१	९·७२१३९६	१०·२७८६०४	१४
४७	९·६५३८०८	९·९५०७१४	९·७०३०९५	१०·२९६९०५	९·६६८५०६	९·९४६८०४	९·७२१७०२	१०·२७८२९८	१३
४८	९·६५४०५८	९·९५०६५०	९·७०३४०९	१०·२९६५९१	९·६६८७४६	९·९४६७३८	९·७२२००८	१०·२७७९९२	१२
४९	९·६५४३०९	९·९५०५८६	९·७०३७२२	१०·२९६२७८	९·६६८९८६	९·९४६६७१	९·७२२३१५	१०·२७७६८५	११
५०	९·६५४५५८	९·९५०५२२	९·७०४०३६	१०·२९५९६४	९·६६९२२५	९·९४६६०४	९·७२[illegible]६२[illegible]	१०·२७७३७९	१०
५१	९·६५४८०८	९·९५०४५८	९·७०४३५०	१०·२९५६५०	९·६६९४६४	९·९४६५३८	९·७२२[illegible]	१०·२७७०७३	९
५२	९·६५५०५८	९·९५०३९४	९·७०४६६३	१०·२९५३३७	९·६६९७०३	९·९४६४७१	९·७२३२३[illegible]	१०·२७६७६८	८
५३	९·६५५३०७	९·९५०३३०	९·७०४९७६	१०·२९५०२४	९·६६९९४२	९·९४६४०४	९·७२३५३८	१०·२७६४६२	७
५४	९·६५५५५६	९·९५०२६६	९·७०५२९०	१०·२९४७१०	९·६७०१८१	९·९४६३३७	९·७२३८४४	१०·२७६१५६	६
५५	९·६५५८०५	९·९५०२०२	९·७०५६०३	१०·२९४३९७	९·६७०४१९	९·९४६२७०	९·७२४१४९	१०·[illegible]७५८५१	५
५६	९·६५६०५४	९·९५०१३८	९·७०५९१६	१०·२९४०८४	९·६७०६५८	९·९४६२०३	९·७२४४५५	१०·[illegible]५५४५	[illegible]
५७	९·६५६३०२	९·९५००७४	९·७०६२२८	१०·२९३७७२	९·६७०८९६	९·९४६१३६	९·७२४७६०	[illegible]	[illegible]
५८	९·६५६५५१	९·९५००१०	९·७०६५४१	१०·२९३४५९	९·६७११३४	९·९४६०६९	९·७२५०६५	१०·२[illegible]	[illegible]
५९	९·६५६७९९	९·९४९९४५	९·७०६८५४	१०·२९३१४६	९·६७१३७२	९·९४६००२	९·७२५३७०	१०·२७[illegible]	[illegible]
६०	९·६५७०४७	९·९४९८८१	९·७०७१६६	१०·२९२८३४	९·६७१६०९	९·९४५९३५	९·७२५६७४	१०·२७४३२[illegible]	[illegible]
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क
	६३ अंश				६२ अंश				

कोष्टक २

आयतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	२८ अंश				२९ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	९·६७१६०९३	९·९४५९३४९	९·७२५६७४४	१०·२७४३२५६	९·६८५५७१२	९·९४१८१९३	९·७४३७५२०	१०·२५६२४८०	६०
१	९·६७१८४६८	९·९४५८६७७	९·७२५९७९१	१०·२७४०२०९	९·६८५७९९१	९·९४१७४९२	९·७४४०४९८	१०·२५५९५०२	५९
२	९·६७२०८४१	९·९४५८००५	९·७२६२८३७	१०·२७३७१६३	९·६८६०२६७	९·९४१६७९१	९·७४४३४७६	१०·२५५६५२४	५८
३	९·६७२३२१३	९·९४५७३३२	९·७२६५८८१	१०·२७३४११९	९·६८६२५४२	९·९४१६०९०	९·७४४६४५३	१०·२५५३५४७	५७
४	९·६७२५५८३	९·९४५६६५९	९·७२६८९२५	१०·२७३१०७५	९·६८६४८१६	९·९४१५३८८	९·७४४९४२८	१०·२५५०५७२	५६
५	९·६७२७९५२	९·९४५५९८५	९·७२७१९६७	१०·२७२८०३३	९·६८६७०८८	९·९४१४६८५	९·७४५२४०३	१०·२५४७५९७	५५
६	९·६७३०३१९	९·९४५५३१०	९·७२७५००८	१०·२७२४९९२	९·६८६९३५९	९·९४१३९८२	९·७४५५३७६	१०·२५४४६२४	५४
७	९·६७३२६८४	९·९४५४६३६	९·७२७८०४८	१०·२७२१९५२	९·६८७१६२८	९·९४१३२७९	९·७४५८३४९	१०·२५४१६५१	५३
८	९·६७३५०४७	९·९४५३९६०	९·७२८१०८७	१०·२७१८९१३	९·६८७३८९५	९·९४१२५७५	९·७४६१३२०	१०·२५३८६८०	५२
९	९·६७३७४०९	९·९४५३२८५	९·७२८४१२४	१०·२७१५८७६	९·६८७६१६१	९·९४११८७१	९·७४६४२९०	१०·२५३५७१०	५१
१०	९·६७३९७६९	९·९४५२६०९	९·७२८७१६१	१०·२७१२८३९	९·६८७८४२५	९·९४१११६६	९·७४६७२५९	१०·२५३२७४१	५०
११	९·६७४२१२८	९·९४५१९३२	९·७२९०१९६	१०·२७०९८०४	९·६८८०६८८	९·९४१०४६१	९·७४७०२२७	१०·२५२९७७३	४९
१२	९·६७४४४८५	९·९४५१२५५	९·७२९३२३०	१०·२७०६७७०	९·६८८२९४९	९·९४०९७५५	९·७४७३१९४	१०·२५२६८०६	४८
१३	९·६७४६८४०	९·९४५०५७७	९·७२९६२६३	१०·२७०३७३७	९·६८८५२०९	९·९४०९०४८	९·७४७६१६०	१०·२५२३८४०	४७
१४	९·६७४९१९४	९·९४४९८९९	९·७२९९२९५	१०·२७००७०५	९·६८८७४६७	९·९४०८३४२	९·७४७९१२५	१०·२५२०८७५	४६
१५	९·६७५१५४६	९·९४४९२२०	९·७३०२३२५	१०·२६९७६७५	९·६८८९७२३	९·९४०७६३४	९·७४८२०८९	१०·२५१७९११	४५
१६	९·६७५३८९६	९·९४४८५४१	९·७३०५३५४	१०·२६९४६४६	९·६८९१९७८	९·९४०६९२७	९·७४८५०५२	१०·२५१४९४८	४४
१७	९·६७५६२४५	९·९४४७८६२	९·७३०८३८३	१०·२६९१६१७	९·६८९४२३२	९·९४०६२१९	९·७४८८०१३	१०·२५११९८७	४३
१८	९·६७५८५९२	९·९४४७१८२	९·७३११४१०	१०·२६८८५९०	९·६८९६४८४	९·९४०५५१०	९·७४९०९७४	१०·२५०९०२६	४२
१९	९·६७६०९३७	९·९४४६५०१	९·७३१४४३६	१०·२६८५५६४	९·६८९८७३४	९·९४०४८०१	९·७४९३९३४	१०·२५०६०६६	४१
२०	९·६७६३२८१	९·९४४५८२१	९·७३१७४६०	१०·२६८२५४०	९·६९००९८३	९·९४०४०९१	९·७४९६८९२	१०·२५०३१०८	४०
२१	९·६७६५६२३	९·९४४५१३९	९·७३२०४८४	१०·२६७९५१६	९·६९०३२३१	९·९४०३३८१	९·७४९९८५०	१०·२५००१५०	३९
२२	९·६७६७९६३	९·९४४४४५७	९·७३२३५०६	१०·२६७६४९४	९·६९०५४७६	९·९४०२६७०	९·७५०२८०६	१०·२४९७१९४	३८
२३	९·६७७०३०२	९·९४४३७७५	९·७३२६५२७	१०·२६७३४७३	९·६९०७७२१	९·९४०१९५९	९·७५०५७६२	१०·२४९४२३८	३७
२४	९·६७७२६४०	९·९४४३०९२	९·७३२९५४७	१०·२६७०४५३	९·६९०९९६३	९·९४०१२४८	९·७५०८७१६	१०·२४९१२८४	३६
२५	९·६७७४९७५	९·९४४२४०९	९·७३३२५६६	१०·२६६७४३४	९·६९१२२०५	९·९४००५३५	९·७५११६६९	१०·२४८८३३१	३५
२६	९·६७७७३०९	९·९४४१७२५	९·७३३५५८४	१०·२६६४४१६	९·६९१४४४४	९·९३९९८२३	९·७५१४६२२	१०·२४८५३७८	३४
२७	९·६७७९६४२	९·९४४१०४१	९·७३३८६०१	१०·२६६१३९९	९·६९१६६८३	९·९३९९११०	९·७५१७५७३	१०·२४८२४२७	३३
२८	९·६७८१९७२	९·९४४०३५६	९·७३४१६१६	१०·२६५८३८४	९·६९१८९१९	९·९३९८३९६	९·७५२०५२३	१०·२४७९४७७	३२
२९	९·६७८४३०१	९·९४३९६७१	९·७३४४६३१	१०·२६५५३६९	९·६९२११५५	९·९३९७६८२	९·७५२३४७२	१०·२४७६५२८	३१
३०	९·६७८६६२९	९·९४३८९८५	९·७३४७६४४	१०·२६५२३५६	९·६९२३३८८	९·९३९६९६८	९·७५२६४२०	१०·२४७३५८०	३०
३१	९·६७८८९५५	९·९४३८२९९	९·७३५०६५६	१०·२६४९३४४	९·६९२५६२०	९·९३९६२५३	९·७५२९३६८	१०·२४७०६३२	२९
३२	९·६७९१२७९	९·९४३७६१२	९·७३५३६६७	१०·२६४६३३३	९·६९२७८५१	९·९३९५५३७	९·७५३२३१४	१०·२४६७६८६	२८
३३	९·६७९३६०२	९·९४३६९२५	९·७३५६६७७	१०·२६४३३२३	९·६९३००८०	९·९३९४८२१	९·७५३५२५९	१०·२४६४७४१	२७
३४	९·६७९५९२३	९·९४३६२३८	९·७३५९६८५	१०·२६४०३१५	९·६९३२३०८	९·९३९४१०५	९·७५३८२०३	१०·२४६१७९७	२६
३५	९·६७९८२४३	९·९४३५५४९	९·७३६२६९३	१०·२६३७३०७	९·६९३४५३४	९·९३९३३८८	९·७५४११४६	१०·२४५८८५४	२५
३६	९·६८००५६०	९·९४३४८६१	९·७३६५६९९	१०·२६३४३०१	९·६९३६७५८	९·९३९२६७१	९·७५४४०८८	१०·२४५५९१२	२४
३७	९·६८०२८७७	९·९४३४१७२	९·७३६८७०५	१०·२६३१२९५	९·६९३८९८१	९·९३९१९५३	९·७५४७०२९	१०·२४५२९७१	२३
३८	९·६८०५१९१	९·९४३३४८२	९·७३७१७०९	१०·२६२८२९१	९·६९४१२०३	९·९३९१२३४	९·७५४९९६९	१०·२४५००३१	२२
३९	९·६८०७५०४	९·९४३२७९२	९·७३७४७१२	१०·२६२५२८८	९·६९४३४२३	९·९३९०५१५	९·७५५२९०८	१०·२४४७०९२	२१
४०	९·६८०९८१६	९·९४३२१०२	९·७३७७७१४	१०·२६२२२८६	९·६९४५६४२	९·९३८९७९६	९·७५५५८४६	१०·२४४४१५४	२०
४१	९·६८१२१२६	९·९४३१४११	९·७३८०७१५	१०·२६१९२८५	९·६९४७८५९	९·९३८९०७६	९·७५५८७८३	१०·२४४१२१७	१९
४२	९·६८१४४३४	९·९४३०७२०	९·७३८३७१४	१०·२६१६२८६	९·६९५००७४	९·९३८८३५६	९·७५६१७१८	१०·२४३८२८२	१८
४३	९·६८१६७४१	९·९४३००२८	९·७३८६७१३	१०·२६१३२८७	९·६९५२२८८	९·९३८७६३५	९·७५६४६५३	१०·२४३५३४७	१७
४४	९·६८१९०४६	९·९४२९३३५	९·७३८९७१०	१०·२६१०२९०	९·६९५४५०१	९·९३८६९१४	९·७५६७५८७	१०·२४३२४१३	१६
४५	९·६८२१३४९	९·९४२८६४३	९·७३९२७०७	१०·२६०७२९३	९·६९५६७१२	९·९३८६१९२	९·७५७०५२०	१०·२४२९४८०	१५
४६	९·६८२३६५१	९·९४२७९४९	९·७३९५७०२	१०·२६०४२९८	९·६९५८९२२	९·९३८५४७०	९·७५७३४५२	१०·२४२६५४८	१४
४७	९·६८२५९५२	९·९४२७२५५	९·७३९८६९६	१०·२६०१३०४	९·६९६११३०	९·९३८४७४७	९·७५७६३८३	१०·२४२३६१७	१३
४८	९·६८२८२५०	९·९४२६५६१	९·७४०१६८९	१०·२५९८३११	९·६९६३३३६	९·९३८४०२४	९·७५७९३१३	१०·२४२०६८७	१२
४९	९·६८३०५४८	९·९४२५८६६	९·७४०४६८१	१०·२५९५३१९	९·६९६५५४१	९·९३८३३००	९·७५८२२४२	१०·२४१७७५८	११
५०	९·६८३२८४३	९·९४२५१७१	९·७४०७६७२	१०·२५९२३२८	९·६९६७७४५	९·९३८२५७६	९·७५८५१६९	१०·२४१४८३१	१०
५१	९·६८३५१३७	९·९४२४४७६	९·७४१०६६२	१०·२५८९३३८	९·६९६९९४७	९·९३८१८५१	९·७५८८०९६	१०·२४११९०४	९
५२	९·६८३७४३०	९·९४२३७७९	९·७४१३६५०	१०·२५८६३५०	९·६९७२१४८	९·९३८११२६	९·७५९१०२२	१०·२४०८९७८	८
५३	९·६८३९७२०	९·९४२३०८३	९·७४१६६३८	१०·२५८३३६२	९·६९७४३४७	९·९३८०४००	९·७५९३९४७	१०·२४०६०५३	७
५४	९·६८४२०१०	९·९४२२३८६	९·७४१९६२४	१०·२५८०३७६	९·६९७६५४५	९·९३७९६७४	९·७५९६८७१	१०·२४०३१२९	६
५५	९·६८४४२९७	९·९४२१६८८	९·७४२२६०९	१०·२५७७३९१	९·६९७८७४१	९·९३७८९४७	९·७५९९७९४	१०·२४००२०६	५
५६	९·६८४६५८३	९·९४२०९९०	९·७४२५५९४	१०·२५७४४०६	९·६९८०९३६	९·९३७८२२०	९·७६०२७१६	१०·२३९७२८४	४
५७	९·६८४८८६८	९·९४२०२९१	९·७४२८५७७	१०·२५७१४२३	९·६९८३१२९	९·९३७७४९२	९·७६०५६३७	१०·२३९४३६३	३
५८	९·६८५११५१	९·९४१९५९२	९·७४३१५५९	१०·२५६८४४१	९·६९८५३२१	९·९३७६७६४	९·७६०८५५७	१०·२३९१४४३	२
५९	९·६८५३४३२	९·९४१८८९३	९·७४३४५४०	१०·२५६५४६०	९·६९८७५११	९·९३७६०३५	९·७६११४७६	१०·२३८८५२४	१
६०	९·६८५५७१२	९·९४१८१९३	९·७४३७५२०	१०·२५६२४८०	९·६९८९७००	९·९३७५३०६	९·७६१४३९४	१०·२३८५६०६	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क
	६१ अंश				६० अंश				

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेषइत्यादि

क	३० अंश				३१ अंश				क
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क
	५९ अंश				५८ अंश				

कोष्टक २

लाअनंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	३२ अंश				३३ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	९·७२४२०९७	९·९२८४२०५	९·७९५७८९२	१०·२०४२१०८	९·७३६१०८८	९·९२३५९१४	९·८१२५१७४	१०·१८७४८२६	६०
१	९·७२४४११८	९·९२८३४१५	९·७९६०७०३	१०·२०३९२९७	९·७३६३०३२	९·९२३५०९३	९·८१२७९३९	१०·१८७२०६१	५९
२	९·७२४६१३८	९·९२८२६२५	९·७९६३५१३	१०·२०३६४८७	९·७३६४९७६	९·९२३४२७२	९·८१३०७०४	१०·१८६९२९६	५८
३	९·७२४८१५६	९·९२८१८३४	९·७९६६३२२	१०·२०३३६७८	९·७३६६९१८	९·९२३३४५०	९·८१३३४६८	१०·१८६६५३२	५७
४	९·७२५०१७४	९·९२८१०४३	९·७९६९१३०	१०·२०३०८७०	९·७३६८८५९	९·९२३२६२८	९·८१३६२३१	१०·१८६३७६९	५६
५	९·७२५२१८९	९·९२८०२५१	९·७९७१९३८	१०·२०२८०६२	९·७३७०७९९	९·९२३१८०५	९·८१३८९९३	१०·१८६१००७	५५
६	९·७२५४२०४	९·९२७९४५९	९·७९७४७४५	१०·२०२५२५५	९·७३७२७३७	९·९२३०९८२	९·८१४१७५५	१०·१८५८२४५	५४
७	९·७२५६२१७	९·९२७८६६६	९·७९७७५५१	१०·२०२२४४९	९·७३७४६७५	९·९२३०१५८	९·८१४४५१६	१०·१८५५४८४	५३
८	९·७२५८२२९	९·९२७७८७३	९·७९८०३५६	१०·२०१९६४४	९·७३७६६११	९·९२२९३३४	९·८१४७२७७	१०·१८५२७२३	५२
९	९·७२६०२४०	९·९२७७०७९	९·७९८३१६०	१०·२०१६८४०	९·७३७८५४६	९·९२२८५०९	९·८१५००३६	१०·१८४९९६४	५१
१०	९·७२६२२४९	९·९२७६२८५	९·७९८५९६४	१०·२०१४०३६	९·७३८०४७९	९·९२२७६८४	९·८१५२७९५	१०·१८४७२०५	५०
११	९·७२६४२५७	९·९२७५४९०	९·७९८८७६७	१०·२०११२३३	९·७३८२४१२	९·९२२६८५८	९·८१५५५५४	१०·१८४४४४६	४९
१२	९·७२६६२६४	९·९२७४६९५	९·७९९१५६९	१०·२००८४३१	९·७३८४३४३	९·९२२६०३२	९·८१५८३११	१०·१८४१६८९	४८
१३	९·७२६८२६९	९·९२७३८९९	९·७९९४३७०	१०·२००५६३०	९·७३८६२७३	९·९२२५२०५	९·८१६१०६८	१०·१८३८९३२	४७
१४	९·७२७०२७३	९·९२७३१०३	९·७९९७१७०	१०·२००२८३०	९·७३८८२०१	९·९२२४३७७	९·८१६३८२४	१०·१८३६१७६	४६
१५	९·७२७२२७६	९·९२७२३०६	९·७९९९९७०	१०·२००००३०	९·७३९०१२९	९·९२२३५४९	९·८१६६५८०	१०·१८३३४२०	४५
१६	९·७२७४२७८	९·९२७१५०९	९·८००२७६९	१०·१९९७२३१	९·७३९२०५५	९·९२२२७२१	९·८१६९३३५	१०·१८३०६६५	४४
१७	९·७२७६२७८	९·९२७०७११	९·८००५५६७	१०·१९९४४३३	९·७३९३९८०	९·९२२१८९१	९·८१७२०८९	१०·१८२७९११	४३
१८	९·७२७८२७७	९·९२६९९१३	९·८००८३६५	१०·१९९१६३५	९·७३९५९०४	९·९२२१०६२	९·८१७४८४२	१०·१८२५१५८	४२
१९	९·७२८०२७५	९·९२६९११४	९·८०११६१	१०·१९८८८३९	९·७३९७८२७	९·९२२०२३२	९·८१७७५९५	१०·१८२२४०५	४१
२०	९·७२८२२७१	९·९२६८३१४	९·८०१३९५७	१०·१९८६०४३	९·७३९९७४८	९·९२१९४०१	९·८१८०३४७	१०·१८१९६५३	४०
२१	९·७२८४२६७	९·९२६७५१४	९·८०१६७५२	१०·१९८३२४८	९·७४०१६६८	९·९२१८५७०	९·८१८३०९८	१०·१८१६९०२	३९
२२	९·७२८६२६०	९·९२६६७१४	९·८०१९५४६	१०·१९८०४५४	९·७४०३५८७	९·९२१७७३८	९·८१८५८४९	१०·१८१४१५१	३८
२३	९·७२८८२५३	९·९२६५९१३	९·८०२२३४०	१०·१९७७६६०	९·७४०५५०५	९·९२१६९०६	९·८१८८५९९	१०·१८११४०१	३७
२४	९·७२९०२४४	९·९२६५११२	९·८०२५१३३	१०·१९७४८६७	९·७४०७४२१	९·९२१६०७३	९·८१९१३४८	१०·१८०८६५२	३६
२५	९·७२९२२३४	९·९२६४३१०	९·८०२७९२५	१०·१९७२०७५	९·७४०९३३७	९·९२१५२४०	९·८१९४०९६	१०·१८०५९०४	३५
२६	९·७२९४२२३	९·९२६३५०७	९·८०३०७१६	१०·१९६९२८४	९·७४११२५१	९·९२१४४०६	९·८१९६८४४	१०·१८०३१५६	३४
२७	९·७२९६२११	९·९२६२७०४	९·८०३३५०६	१०·१९६६४९४	९·७४१३१६४	९·९२१३५७२	९·८१९९५९२	१०·१८००४०८	३३
२८	९·७२९८१९७	९·९२६१९०१	९·८०३६२९६	१०·१९६३७०४	९·७४१५०७५	९·९२१२७३७	९·८२०२३३८	१०·१७९७६६२	३२
२९	९·७३००१८२	९·९२६१०९६	९·८०३९०८५	१०·१९६०९१५	९·७४१६९८६	९·९२११९०२	९·८२०५०८४	१०·१७९४९१६	३१
३०	९·७३०२१६५	९·९२६०२९२	९·८०४१८७३	१०·१९५८१२७	९·७४१८८९५	९·९२११०६६	९·८२०७८२९	१०·१७९२१७१	३०
३१	९·७३०४१४८	९·९२५९४८७	९·८०४४६६१	१०·१९५५३३९	९·७४२०८०३	९·९२१०२२९	९·८२१०५७४	१०·१७८९४२६	२९
३२	९·७३०६१२९	९·९२५८६८१	९·८०४७४४७	१०·१९५२५५३	९·७४२२७१०	९·९२०९३९३	९·८२१३३१७	१०·१७८६६८३	२८
३३	९·७३०८१०९	९·९२५७८७५	९·८०५०२३३	१०·१९४९७६७	९·७४२४६१६	९·९२०८५५५	९·८२१६०६०	१०·१७८३९४०	२७
३४	९·७३१००८७	९·९२५७०६९	९·८०५३०१९	१०·१९४६९८१	९·७४२६५२०	९·९२०७७१७	९·८२१८८०३	१०·१७८११९७	२६
३५	९·७३१२०६४	९·९२५६२६१	९·८०५५८०३	१०·१९४४१९७	९·७४२८४२३	९·९२०६८७८	९·८२२१५४५	१०·१७७८४५५	२५
३६	९·७३१४०४०	९·९२५५४५४	९·८०५८५८७	१०·१९४१४१३	९·७४३०३२५	९·९२०६०३९	९·८२२४२८६	१०·१७७५७१४	२४
३७	९·७३१६०१५	९·९२५४६४६	९·८०६१३७०	१०·१९३८६३०	९·७४३२२२६	९·९२०५२००	९·८२२७०२६	१०·१७७२९७४	२३
३८	९·७३१७९८९	९·९२५३८३७	९·८०६४१५२	१०·१९३५८४८	९·७४३४१२६	९·९२०४३६०	९·८२२९७६६	१०·१७७०२३४	२२
३९	९·७३१९९६१	९·९२५३०२८	९·८०६६९३३	१०·१९३३०६७	९·७४३६०२४	९·९२०३५१९	९·८२३२५०५	१०·१७६७४९५	२१
४०	९·७३२१९३२	९·९२५२२१८	९·८०६९७१४	१०·१९३०२८६	९·७४३७९२१	९·९२०२६७८	९·८२३५२४४	१०·१७६४७५६	२०
४१	९·७३२३९०२	९·९२५१४०८	९·८०७२४९४	१०·१९२७५०६	९·७४३९८१७	९·९२०१८३६	९·८२३७९८१	१०·१७६२०१९	१९
४२	९·७३२५८७०	९·९२५०५९७	९·८०७५२७३	१०·१९२४७२७	९·७४४१७१२	९·९२००९९४	९·८२४०७१९	१०·१७५९२८१	१८
४३	९·७३२७८३७	९·९२४९७८६	९·८०७८०५२	१०·१९२१९४८	९·७४४३६०६	९·९२००१५१	९·८२४३४५५	१०·१७५६५४५	१७
४४	९·७३२९८०३	९·९२४८९७४	९·८०८०८२९	१०·१९१९१७१	९·७४४५४९८	९·९१९९३०८	९·८२४६१९१	१०·१७५३८०९	१६
४५	९·७३३१७६८	९·९२४८१६१	९·८०८३६०६	१०·१९१६३९४	९·७४४७३९०	९·९१९८४६४	९·८२४८९२६	१०·१७५१०७४	१५
४६	९·७३३३७३१	९·९२४७३४९	९·८०८६३८३	१०·१९१३६१७	९·७४४९२८०	९·९१९७६१९	९·८२५१६६०	१०·१७४८३४०	१४
४७	९·७३३५६९३	९·९२४६५३५	९·८०८९१५८	१०·१९१०८४२	९·७४५११६९	९·९१९६७७५	९·८२५४३९४	१०·१७४५६०६	१३
४८	९·७३३७६५४	९·९२४५७२१	९·८०९१९३३	१०·१९०८०६७	९·७४५३०५६	९·९१९५९२९	९·८२५७१२७	१०·१७४२८७३	१२
४९	९·७३३९६१४	९·९२४४९०७	९·८०९४७०७	१०·१९०५२९३	९·७४५४९४३	९·९१९५०८३	९·८२५९८६०	१०·१७४०१४०	११
५०	९·७३४१५७२	९·९२४४०९२	९·८०९७४८०	१०·१९०२५२०	९·७४५६८२८	९·९१९४२३७	९·८२६२५९२	१०·१७३७४०८	१०
५१	९·७३४३५२९	९·९२४३२७७	९·८१००२५३	१०·१८९९७४७	९·७४५८७१२	९·९१९३३९०	९·८२६५३२३	१०·१७३४६७७	९
५२	९·७३४५४८५	९·९२४२४६१	९·८१०३०२५	१०·१८९६९७५	९·७४६०५९५	९·९१९२५४२	९·८२६८०५३	१०·१७३१९४७	८
५३	९·७३४७४४०	९·९२४१६४४	९·८१०५७९६	१०·१८९४२०४	९·७४६२४७७	९·९१९१६९४	९·८२७०७८३	१०·१७२९२१७	७
५४	९·७३४९३९३	९·९२४०८२७	९·८१०८५६६	१०·१८९१४३४	९·७४६४३५८	९·९१९०८४५	९·८२७३५१२	१०·१७२६४८८	६
५५	९·७३५१३४६	९·९२४००१०	९·८१११३३६	१०·१८८८६६४	९·७४६६२३७	९·९१८९९९६	९·८२७६२४१	१०·१७२३७५९	५
५६	९·७३५३२९६	९·९२३९१९१	९·८११४१०५	१०·१८८५८९५	९·७४६८११५	९·९१८९१४६	९·८२७८९६९	१०·१७२१०३१	४
५७	९·७३५५२४६	९·९२३८३७३	९·८११६८७३	१०·१८८३१२७	९·७४६९९९२	९·९१८८२९६	९·८२८१६९६	१०·१७१८३०४	३
५८	९·७३५७१९५	९·९२३७५५४	९·८११९६४१	१०·१८८०३५९	९·७४७१८६८	९·९१८७४४५	९·८२८४४२३	१०·१७१५५७७	२
५९	९·७३५९१४२	९·९२३६७३४	९·८१२२४०८	१०·१८७७५९२	९·७४७३७४३	९·९१८६५९४	९·८२८७१४९	१०·१७१२८५१	१
६०	९·७३६१०८८	९·९२३५९१४	९·८१२५१७४	१०·१८७४८२६	९·७४७५६१७	९·९१८५७४२	९·८२८९८७४	१०·१७१०१२६	०
क	को भजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	३४ अंश				३५ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क

कोष्टक २

लाग्रनेमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	३६ अंश				३७ अंश				
क.	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क.
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क
	५३ अंश				५२ अंश				

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	३८ अंश				३९ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	९.७८९३४२	९.८९६५३२	९.८९२८१०	१०.१०७१९०	९.७९८८७२	९.८९०५०३	९.९०८३६९	१०.०९१६३१	६०
१	९.७८९५०४	९.८९६४३३	९.८९३०७०	१०.१०६९३०	९.७९९०२८	९.८९०४००	९.९०८६२८	१०.०९१३७२	५९
२	९.७८९६६५	९.८९६३३५	९.८९३३३१	१०.१०६६६९	९.७९९१८४	९.८९०२९८	९.९०८८८६	१०.०९१११४	५८
३	९.७८९८२७	९.८९६२३६	९.८९३५९१	१०.१०६४०९	९.७९९३३९	९.८९०१९५	९.९०९१४४	१०.०९०८५६	५७
४	९.७८९९८८	९.८९६१३७	९.८९३८५१	१०.१०६१४९	९.७९९४९५	९.८९००९३	९.९०९४०२	१०.०९०५९८	५६
५	९.७९०१४९	९.८९६०३८	९.८९४१११	१०.१०५८८९	९.७९९६५१	९.८८९९९०	९.९०९६६०	१०.०९०३४०	५५
६	९.७९०३१०	९.८९५९३९	९.८९४३७२	१०.१०५६२८	९.७९९८०६	९.८८९८८८	९.९०९९१८	१०.०९००८२	५४
७	९.७९०४७१	९.८९५८४०	९.८९४६३२	१०.१०५३६८	९.७९९९६२	९.८८९७८५	९.९१०१७७	१०.०८९८२३	५३
८	९.७९०६३२	९.८९५७४१	९.८९४८९२	१०.१०५१०८	९.८००११७	९.८८९६८२	९.९१०४३५	१०.०८९५६५	५२
९	९.७९०७९३	९.८९५६४१	९.८९५१५२	१०.१०४८४८	९.८००२७२	९.८८९५७९	९.९१०६९३	१०.०८९३०७	५१
१०	९.७९०९५४	९.८९५५४२	९.८९५४१२	१०.१०४५८८	९.८००४२७	९.८८९४७७	९.९१०९५१	१०.०८९०४९	५०
११	९.७९१११५	९.८९५४४३	९.८९५६७२	१०.१०४३२८	९.८००५८२	९.८८९३७४	९.९११२०९	१०.०८८७९१	४९
१२	९.७९१२७५	९.८९५३४३	९.८९५९३२	१०.१०४०६८	९.८००७३७	९.८८९२७१	९.९११४६७	१०.०८८५३३	४८
१३	९.७९१४३६	९.८९५२४४	९.८९६१९२	१०.१०३८०८	९.८००८९२	९.८८९१६८	९.९११७२५	१०.०८८२७५	४७
१४	९.७९१५९६	९.८९५१४५	९.८९६४५२	१०.१०३५४८	९.८०१०४७	९.८८९०६४	९.९११९८२	१०.०८८०१८	४६
१५	९.७९१७५७	९.८९५०४५	९.८९६७१२	१०.१०३२८८	९.८०१२०१	९.८८८९६१	९.९१२२४०	१०.०८७७६०	४५
१६	९.७९१९१७	९.८९४९४५	९.८९६९७१	१०.१०३०२९	९.८०१३५६	९.८८८८५८	९.९१२४९८	१०.०८७५०२	४४
१७	९.७९२०७७	९.८९४८४६	९.८९७२३१	१०.१०२७६९	९.८०१५११	९.८८८७५५	९.९१२७५६	१०.०८७२४४	४३
१८	९.७९२२३७	९.८९४७४६	९.८९७४९१	१०.१०२५०९	९.८०१६६५	९.८८८६५१	९.९१३०१४	१०.०८६९८६	४२
१९	९.७९२३९७	९.८९४६४६	९.८९७७५१	१०.१०२२४९	९.८०१८१९	९.८८८५४८	९.९१३२७१	१०.०८६७२९	४१
२०	९.७९२५५७	९.८९४५४६	९.८९८०१०	१०.१०१९९०	९.८०१९७३	९.८८८४४४	९.९१३५२९	१०.०८६४७१	४०
२१	९.७९२७१६	९.८९४४४६	९.८९८२७०	१०.१०१७३०	९.८०२१२८	९.८८८३४१	९.९१३७८७	१०.०८६२१३	३९
२२	९.७९२८७६	९.८९४३४६	९.८९८५३०	१०.१०१४७०	९.८०२२८२	९.८८८२३७	९.९१४०४४	१०.०८५९५६	३८
२३	९.७९३०३६	९.८९४२४६	९.८९८७८९	१०.१०१२११	९.८०२४३६	९.८८८१३४	९.९१४३०२	१०.०८५६९८	३७
२४	९.७९३१९५	९.८९४१४६	९.८९९०४९	१०.१००९५१	९.८०२५८९	९.८८८०३०	९.९१४५६०	१०.०८५४४०	३६
२५	९.७९३३५४	९.८९४०४६	९.८९९३०८	१०.१००६९२	९.८०२७४३	९.८८७९२६	९.९१४८१७	१०.०८५१८३	३५
२६	९.७९३५१४	९.८९३९४६	९.८९९५६८	१०.१००४३२	९.८०२८९७	९.८८७८२२	९.९१५०७५	१०.०८४९२५	३४
२७	९.७९३६७३	९.८९३८४६	९.८९९८२७	१०.१००१७३	९.८०३०५०	९.८८७७१८	९.९१५३३२	१०.०८४६६८	३३
२८	९.७९३८३२	९.८९३७४५	९.९०००८७	१०.०९९९१३	९.८०३२०४	९.८८७६१४	९.९१५५९०	१०.०८४४१०	३२
२९	९.७९३९९१	९.८९३६४५	९.९००३४६	१०.०९९६५४	९.८०३३५७	९.८८७५१०	९.९१५८४७	१०.०८४१५३	३१
३०	९.७९४१५०	९.८९३५४४	९.९००६०५	१०.०९९३९५	९.८०३५११	९.८८७४०६	९.९१६१०४	१०.०८३८९६	३०
३१	९.७९४३०८	९.८९३४४४	९.९००८६४	१०.०९९१३६	९.८०३६६४	९.८८७३०२	९.९१६३६२	१०.०८३६३८	२९
३२	९.७९४४६७	९.८९३३४३	९.९०११२४	१०.०९८८७६	९.८०३८१७	९.८८७१९८	९.९१६६१९	१०.०८३३८१	२८
३३	९.७९४६२६	९.८९३२४३	९.९०१३८३	१०.०९८६१७	९.८०३९७०	९.८८७०९३	९.९१६८७७	१०.०८३१२३	२७
३४	९.७९४७८४	९.८९३१४२	९.९०१६४२	१०.०९८३५८	९.८०४१२३	९.८८६९८९	९.९१७१३४	१०.०८२८६६	२६
३५	९.७९४९४२	९.८९३०४१	९.९०१९०१	१०.०९८०९९	९.८०४२७६	९.८८६८८५	९.९१७३९१	१०.०८२६०९	२५
३६	९.७९५१०१	९.८९२९४०	९.९०२१६०	१०.०९७८४०	९.८०४४२८	९.८८६७८०	९.९१७६४८	१०.०८२३५२	२४
३७	९.७९५२५९	९.८९२८३९	९.९०२४२०	१०.०९७५८०	९.८०४५८१	९.८८६६७६	९.९१७९०६	१०.०८२०९४	२३
३८	९.७९५४१७	९.८९२७३९	९.९०२६७९	१०.०९७३२१	९.८०४७३४	९.८८६५७१	९.९१८१६३	१०.०८१८३७	२२
३९	९.७९५५७५	९.८९२६३८	९.९०२९३८	१०.०९७०६२	९.८०४८८६	९.८८६४६६	९.९१८४२०	१०.०८१५८०	२१
४०	९.७९५७३३	९.८९२५३६	९.९०३१९७	१०.०९६८०३	९.८०५०३९	९.८८६३६२	९.९१८६७७	१०.०८१३२३	२०
४१	९.७९५८९१	९.८९२४३५	९.९०३४५५	१०.०९६५४५	९.८०५१९१	९.८८६२५७	९.९१८९३४	१०.०८१०६६	१९
४२	९.७९६०४९	९.८९२३३४	९.९०३७१४	१०.०९६२८६	९.८०५३४३	९.८८६१५२	९.९१९१९१	१०.०८०८०९	१८
४३	९.७९६२०६	९.८९२२३३	९.९०३९७३	१०.०९६०२७	९.८०५४९५	९.८८६०४७	९.९१९४४८	१०.०८०५५२	१७
४४	९.७९६३६४	९.८९२१३२	९.९०४२३२	१०.०९५७६८	९.८०५६४७	९.८८५९४२	९.९१९७०५	१०.०८०२९५	१६
४५	९.७९६५२१	९.८९२०३०	९.९०४४९१	१०.०९५५०९	९.८०५७९९	९.८८५८३७	९.९१९९६२	१०.०८००३८	१५
४६	९.७९६६७९	९.८९१९२९	९.९०४७५०	१०.०९५२५०	९.८०५९५१	९.८८५७३२	९.९२०२१९	१०.०७९७८१	१४
४७	९.७९६८३६	९.८९१८२७	९.९०५००९	१०.०९४९९१	९.८०६१०३	९.८८५६२७	९.९२०४७६	१०.०७९५२४	१३
४८	९.७९६९९३	९.८९१७२६	९.९०५२६७	१०.०९४७३३	९.८०६२५४	९.८८५५२२	९.९२०७३३	१०.०७९२६७	१२
४९	९.७९७१५०	९.८९१६२४	९.९०५५२६	१०.०९४४७४	९.८०६४०६	९.८८५४१६	९.९२०९९०	१०.०७९०१०	११
५०	९.७९७३०७	९.८९१५२३	९.९०५७८५	१०.०९४२१५	९.८०६५५७	९.८८५३११	९.९२१२४७	१०.०७८७५३	१०
५१	९.७९७४६४	९.८९१४२१	९.९०६०४३	१०.०९३९५७	९.८०६७०९	९.८८५२०५	९.९२१५०३	१०.०७८४९७	९
५२	९.७९७६२१	९.८९१३१९	९.९०६३०२	१०.०९३६९८	९.८०६८६०	९.८८५१००	९.९२१७६०	१०.०७८२४०	८
५३	९.७९७७७७	९.८९१२१७	९.९०६५६०	१०.०९३४४०	९.८०७०११	९.८८४९९४	९.९२२०१७	१०.०७७९८३	७
५४	९.७९७९३४	९.८९१११५	९.९०६८१९	१०.०९३१८१	९.८०७१६३	९.८८४८८९	९.९२२२७४	१०.०७७७२६	६
५५	९.७९८०९१	९.८९१०१३	९.९०७०७७	१०.०९२९२३	९.८०७३१४	९.८८४७८३	९.९२२५३०	१०.०७७४७०	५
५६	९.७९८२४७	९.८९०९११	९.९०७३३६	१०.०९२६६४	९.८०७४६५	९.८८४६७७	९.९२२७८७	१०.०७७२१३	४
५७	९.७९८४०३	९.८९०८०९	९.९०७५९४	१०.०९२४०६	९.८०७६१५	९.८८४५७२	९.९२३०४४	१०.०७६९५६	३
५८	९.७९८५६०	९.८९०७०७	९.९०७८५३	१०.०९२१४७	९.८०७७६६	९.८८४४६६	९.९२३३००	१०.०७६७००	२
५९	९.७९८७१६	९.८९०६०५	९.९०८१११	१०.०९१८८९	९.८०७९१७	९.८८४३६०	९.९२३५५७	१०.०७६४४३	१
६०	९.७९८८७२	९.८९०५०३	९.९०८३६९	१०.०९१६३१	९.८०८०६७	९.८८४२५४	९.९२३८१४	१०.०७६१८६	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क

कोष्टक २

लाग्रतंमिक भुजज्या स्पर्शरेषइत्यादि

४० अंश					४१ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेष	कोस्पर्शरेष	क
०	९·८०८०६७५	९·८८४२५४०	९·९२३८१३५	१०·०७६१८६५	९·८१६९४२९	९·८७७७७९९	९·९३९१६३१	१०·०६०८३६९	६०
१	९·८०८२१८०	९·८८४१४७९	९·९२४०७०१	१०·०७५९२९९	९·८१७०८८२	९·८७७६७००	९·९३९४१८२	१०·०६०५८१८	५९
२	९·८०८३६८४	९·८८४०४१८	९·९२४३२६६	१०·०७५६७३४	९·८१७२३३४	९·८७७५६०१	९·९३९६७३३	१०·०६०३२६७	५८
३	९·८०८५१८८	९·८८३९३५७	९·९२४५८३१	१०·०७५४१६९	९·८१७३७८५	९·८७७४५०१	९·९३९९२८४	१०·०६००७१६	५७
४	९·८०८६६९०	९·८८३८२९४	९·९२४८३९६	१०·०७५१६०४	९·८१७५२३५	९·८७७३४०१	९·९४०१८३५	१०·०५९८१६५	५६
५	९·८०८८१९२	९·८८३७२३२	९·९२५०९६०	१०·०७४९०४०	९·८१७६६८५	९·८७७२३००	९·९४०४३८५	१०·०५९५६१५	५५
६	९·८०८९६९२	९·८८३६१६८	९·९२५३५२४	१०·०७४६४७६	९·८१७८१३३	९·८७७११९८	९·९४०६९३६	१०·०५९३०६४	५४
७	९·८०९११९२	९·८८३५१०४	९·९२५६०८८	१०·०७४३९१२	९·८१७९५८१	९·८७७००९६	९·९४०९४८६	१०·०५९०५१४	५३
८	९·८०९२६९१	९·८८३४०३९	९·९२५८६५२	१०·०७४१३४८	९·८१८१०२८	९·८७६८९९३	९·९४१२०३६	१०·०५८७९६४	५२
९	९·८०९४१८९	९·८८३२९७४	९·९२६१२१५	१०·०७३८७८५	९·८१८२४७४	९·८७६७८८९	९·९४१४५८५	१०·०५८५४१५	५१
१०	९·८०९५६८६	९·८८३१९०८	९·९२६३७७८	१०·०७३६२२२	९·८१८३९१९	९·८७६६७८५	९·९४१७१३५	१०·०५८२८६५	५०
११	९·८०९७१८२	९·८८३०८४१	९·९२६६३४१	१०·०७३३६५९	९·८१८५३६४	९·८७६५६८०	९·९४१९६८४	१०·०५८०३१६	४९
१२	९·८०९८६७८	९·८८२९७७४	९·९२६८९०४	१०·०७३१०९६	९·८१८६८०७	९·८७६४५७४	९·९४२२२३३	१०·०५७७७६७	४८
१३	९·८१००१७२	९·८८२८७०६	९·९२७१४६६	१०·०७२८५३४	९·८१८८२५०	९·८७६३४६८	९·९४२४७८२	१०·०५७५२१८	४७
१४	९·८१०१६६६	९·८८२७६३८	९·९२७४०२८	१०·०७२५९७२	९·८१८९६९२	९·८७६२३६१	९·९४२७३३१	१०·०५७२६६९	४६
१५	९·८१०३१५९	९·८८२६५६८	९·९२७६५९०	१०·०७२३४१०	९·८१९११३३	९·८७६१२५३	९·९४२९८७९	१०·०५७०१२१	४५
१६	९·८१०४६५०	९·८८२५४९९	९·९२७९१५२	१०·०७२०८४८	९·८१९२५७३	९·८७६०१४५	९·९४३२४२८	१०·०५६७५७२	४४
१७	९·८१०६१४१	९·८८२४४२८	९·९२८१७१३	१०·०७१८२८७	९·८१९४०१२	९·८७५९०३६	९·९४३४९७६	१०·०५६५०२४	४३
१८	९·८१०७६३१	९·८८२३३५७	९·९२८४२७४	१०·०७१५७२६	९·८१९५४५०	९·८७५७९२७	९·९४३७५२४	१०·०५६२४७६	४२
१९	९·८१०९१२१	९·८८२२२८५	९·९२८६८३५	१०·०७१३१६५	९·८१९६८८८	९·८७५६८१६	९·९४४००७२	१०·०५५९९२८	४१
२०	९·८११०६०९	९·८८२१२१३	९·९२८९३९६	१०·०७१०६०४	९·८१९८३२५	९·८७५५७०६	९·९४४२६१९	१०·०५५७३८१	४०
२१	९·८११२०९६	९·८८२०१४०	९·९२९१९५६	१०·०७०८०४४	९·८१९९७६१	९·८७५४५९४	९·९४४५१६६	१०·०५५४८३४	३९
२२	९·८११३५८३	९·८८१९०६७	९·९२९४५१६	१०·०७०५४८४	९·८२०११९६	९·८७५३४८२	९·९४४७७१४	१०·०५५२२८६	३८
२३	९·८११५०६९	९·८८१७९९२	९·९२९७०७६	१०·०७०२९२४	९·८२०२६३०	९·८७५२३६९	९·९४५०२६१	१०·०५४९७३९	३७
२४	९·८११६५५४	९·८८१६९१८	९·९२९९६३६	१०·०७००३६४	९·८२०४०६३	९·८७५१२५६	९·९४५२८०७	१०·०५४७१९३	३६
२५	९·८११८०३८	९·८८१५८४२	९·९३०२१९५	१०·०६९७८०५	९·८२०५४९६	९·८७५०१४२	९·९४५५३५४	१०·०५४४६४६	३५
२६	९·८११९५२१	९·८८१४७६६	९·९३०४७५५	१०·०६९५२४५	९·८२०६९२७	९·८७४९०२७	९·९४५७९००	१०·०५४२१००	३४
२७	९·८१२१००३	९·८८१३६८९	९·९३०७३१४	१०·०६९२६८६	९·८२०८३५८	९·८७४७९१२	९·९४६०४४७	१०·०५३९५५३	३३
२८	९·८१२२४८४	९·८८१२६१२	९·९३०९८७२	१०·०६९०१२८	९·८२०९७८८	९·८७४६७९५	९·९४६२९९३	१०·०५३७००७	३२
२९	९·८१२३९६५	९·८८११५३४	९·९३१२४३१	१०·०६८७५६९	९·८२११२१७	९·८७४५६७९	९·९४६५५३९	१०·०५३४४६१	३१
३०	९·८१२५४४४	९·८८१०४५५	९·९३१४९८९	१०·०६८५०११	९·८२१२६४६	९·८७४४५६१	९·९४६८०८४	१०·०५३१९१६	३०
३१	९·८१२६९२३	९·८८०९३७६	९·९३१७५४७	१०·०६८२४५३	९·८२१४०७३	९·८७४३४४३	९·९४७०६३०	१०·०५२९३७०	२९
३२	९·८१२८४०१	९·८८०८२९६	९·९३२०१०५	१०·०६७९८९५	९·८२१५५००	९·८७४२३२५	९·९४७३१७५	१०·०५२६८२५	२८
३३	९·८१२९८७८	९·८८०७२१५	९·९३२२६६२	१०·०६७७३३८	९·८२१६९२६	९·८७४१२०५	९·९४७५७२०	१०·०५२४२८०	२७
३४	९·८१३१३५४	९·८८०६१३४	९·९३२५२२०	१०·०६७४७८०	९·८२१८३५१	९·८७४००८५	९·९४७८२६५	१०·०५२१७३५	२६
३५	९·८१३२८२९	९·८८०५०५२	९·९३२७७७७	१०·०६७२२२३	९·८२१९७७५	९·८७३८९६५	९·९४८०८१०	१०·०५१९१९०	२५
३६	९·८१३४३०३	९·८८०३९७०	९·९३३०३३४	१०·०६६९६६६	९·८२२११९८	९·८७३७८४४	९·९४८३३५५	१०·०५१६६४५	२४
३७	९·८१३५७७७	९·८८०२८८७	९·९३३२८९०	१०·०६६७११०	९·८२२२६२१	९·८७३६७२२	९·९४८५८९९	१०·०५१४१०१	२३
३८	९·८१३७२५०	९·८८०१८०३	९·९३३५४४६	१०·०६६४५५४	९·८२२४०४२	९·८७३५५९९	९·९४८८४४३	१०·०५११५५७	२२
३९	९·८१३८७२१	९·८८००७१९	९·९३३८००३	१०·०६६१९९७	९·८२२५४६३	९·८७३४४७६	९·९४९०९८७	१०·०५०९०१३	२१
४०	९·८१४०१९२	९·८७९९६३४	९·९३४०५५९	१०·०६५९४४१	९·८२२६८८३	९·८७३३३५२	९·९४९३५३१	१०·०५०६४६९	२०
४१	९·८१४१६६२	९·८७९८५४८	९·९३४३११४	१०·०६५६८८६	९·८२२८३०२	९·८७३२२२७	९·९४९६०७५	१०·०५०३९२५	१९
४२	९·८१४३१३१	९·८७९७४६२	९·९३४५६७०	१०·०६५४३३०	९·८२२९७२१	९·८७३११०२	९·९४९८६१९	१०·०५०१३८१	१८
४३	९·८१४४६००	९·८७९६३७५	९·९३४८२२५	१०·०६५१७७५	९·८२३११३८	९·८७२९९७६	९·९५०११६२	१०·०४९८८३८	१७
४४	९·८१४६०६७	९·८७९५२८७	९·९३५०७८०	१०·०६४९२२०	९·८२३२५५५	९·८७२८८४९	९·९५०३७०५	१०·०४९६२९५	१६
४५	९·८१४७५३४	९·८७९४१९९	९·९३५३३३५	१०·०६४६६६५	९·८२३३९७१	९·८७२७७२२	९·९५०६२४८	१०·०४९३७५२	१५
४६	९·८१४८९९९	९·८७९३११०	९·९३५५८८९	१०·०६४४१११	९·८२३५३८६	९·८७२६५९४	९·९५०८७९१	१०·०४९१२०९	१४
४७	९·८१५०४६४	९·८७९२०२१	९·९३५८४४४	१०·०६४१५५६	९·८२३६८००	९·८७२५४६६	९·९५११३३४	१०·०४८८६६६	१३
४८	९·८१५१९२८	९·८७९०९३०	९·९३६०९९८	१०·०६३९००२	९·८२३८२१३	९·८७२४३३७	९·९५१३८७६	१०·०४८६१२४	१२
४९	९·८१५३३९१	९·८७८९८४०	९·९३६३५५२	१०·०६३६४४८	९·८२३९६२६	९·८७२३२०७	९·९५१६४१९	१०·०४८३५८१	११
५०	९·८१५४८५४	९·८७८८७४८	९·९३६६१०५	१०·०६३३८९५	९·८२४१०३७	९·८७२२०७६	९·९५१८९६१	१०·०४८१०३९	१०
५१	९·८१५६३१५	९·८७८७६५६	९·९३६८६५९	१०·०६३१३४१	९·८२४२४४८	९·८७२०९४५	९·९५२१५०३	१०·०४७८४९७	९
५२	९·८१५७७७६	९·८७८६५६३	९·९३७१२१२	१०·०६२८७८८	९·८२४३८५८	९·८७१९८१३	९·९५२४०४५	१०·०४७५९५५	८
५३	९·८१५९२३५	९·८७८५४७०	९·९३७३७६५	१०·०६२६२३५	९·८२४५२६७	९·८७१८६८१	९·९५२६५८७	१०·०४७३४१३	७
५४	९·८१६०६९४	९·८७८४३७६	९·९३७६३१८	१०·०६२३६८२	९·८२४६६७६	९·८७१७५४८	९·९५२९१२८	१०·०४७०८७२	६
५५	९·८१६२१५२	९·८७८३२८१	९·९३७८८७१	१०·०६२११२९	९·८२४८०८३	९·८७१६४१४	९·९५३१६७०	१०·०४६८३३०	५
५६	९·८१६३६०९	९·८७८२१८६	९·९३८१४२३	१०·०६१८५७७	९·८२४९४९०	९·८७१५२७९	९·९५३४२११	१०·०४६५७८९	४
५७	९·८१६५०६५	९·८७८१०९०	९·९३८३९७५	१०·०६१६०२५	९·८२५०८९६	९·८७१४१४४	९·९५३६७५२	१०·०४६३२४८	३
५८	९·८१६६५२१	९·८७७९९९४	९·९३८६५२७	१०·०६१३४७३	९·८२५२३०१	९·८७१३००८	९·९५३९२९३	१०·०४६०७०७	२
५९	९·८१६७९७५	९·८७७८८९६	९·९३८९०७९	१०·०६१०९२१	९·८२५३७०५	९·८७११८७२	९·९५४१८३४	१०·०४५८१६६	१
६०	९·८१६९४२९	९·८७७७७९९	९·९३९१६३१	१०·०६०८३६९	९·८२५५१०९	९·८७१०७३५	९·९५४४३७४	१०·०४५५६२६	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेष	स्पर्शरेष	क
४९ अंश					४८ अंश				

कोष्टक २

लाग्रतंभिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

	४२ अंश				४३ अंश				
क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६०
१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५९
२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५८
३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५७
४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५६
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५५
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५४
७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५३
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५२
९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५१
१०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५०
११	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४९
१२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४८
१३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४७
१४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४६
१५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४५
१६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४४
१७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४३
१८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४२
१९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४१
२०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४०
२१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३९
२२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३८
२३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३७
२४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३६
२५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३५
२६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३४
२७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३३
२८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३२
२९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३१
३०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३०
३१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२९
३२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२८
३३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२७
३४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२६
३५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२५
३६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२४
३७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२३
३८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२२
३९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२१
४०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२०
४१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१९
४२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१८
४३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१७
४४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१६
४५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१५
४६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१४
४७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१३
४८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१२
४९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	११
५०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१०
५१	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	९
५२	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	८
५३	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	७
५४	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	६
५५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	५
५६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	४
५७	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	३
५८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	२
५९	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	१
६०	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	[redacted]	
	४७ अंश								

कोष्टक २

लागरिथमिक भुजज्या स्पर्शरेघ इत्यादि

४४ अंश

क	भुजज्या	कोभुजज्या	स्पर्शरेघ	कोस्पर्शरेघ	क
०	९·८४१७७१३	९·८५६९३४१	९·९८४८३७२	१०·०१५१६२८	६०
१	९·८४१९०२१	९·८५६८१२१	९·९८५०९००	१०·०१४९१००	५९
२	९·८४२०३२८	९·८५६६९००	९·९८५३४२८	१०·०१४६५७२	५८
३	९·८४२१६३४	९·८५६५६७८	९·९८५५९५६	१०·०१४४०४४	५७
४	९·८४२२९३९	९·८५६४४५५	९·९८५८४८४	१०·०१४१५१६	५६
५	९·८४२४२४४	९·८५६३२३२	९·९८६१०१२	१०·०१३८९८८	५५
६	९·८४२५५४८	९·८५६२००८	९·९८६३५४०	१०·०१३६४६०	५४
७	९·८४२६८५२	९·८५६०७८४	९·९८६६०६८	१०·०१३३९३२	५३
८	९·८४२८१५४	९·८५५९५५८	९·९८६८५९६	१०·०१३१४०४	५२
९	९·८४२९४५६	९·८५५८३३२	९·९८७११२३	१०·०१२८८७७	५१
१०	९·८४३०७५७	९·८५५७१०६	९·९८७३६५१	१०·०१२६३४९	५०
११	९·८४३२०५७	९·८५५५८७८	९·९८७६१७९	१०·०१२३८२१	४९
१२	९·८४३३३५६	९·८५५४६५०	९·९८७८७०६	१०·०१२१२९४	४८
१३	९·८४३४६५५	९·८५५३४२१	९·९८८१२३४	१०·०११८७६६	४७
१४	९·८४३५९५३	९·८५५२१९२	९·९८८३७६२	१०·०११६२३८	४६
१५	९·८४३७२५०	९·८५५०९६१	९·९८८६२८९	१०·०११३७११	४५
१६	९·८४३८५४७	९·८५४९७३०	९·९८८८८१६	१०·०१११८४	४४
१७	९·८४३९८४२	९·८५४८४९९	९·९८९१३४४	१०·०१०८६५६	४३
१८	९·८४४११३७	९·८५४७२६६	९·९८९३८७१	१०·०१०६१२९	४२
१९	९·८४४२४३२	९·८५४६०३३	९·९८९६३९९	१०·०१०३६०१	४१
२०	९·८४४३७२५	९·८५४४७९९	९·९८९८९२६	१०·०१०१०७४	४०
२१	९·८४४५०१८	९·८५४३५६४	९·९९०१४५३	१०·००९८५४७	३९
२२	९·८४४६३१०	९·८५४२३२९	९·९९०३९८१	१०·००९६०१९	३८
२३	९·८४४७६०१	९·८५४१०९३	९·९९०६५०८	१०·००९३४९२	३७
२४	९·८४४८८९१	९·८५३९८५६	९·९९०९०३५	१०·००९०९६५	३६
२५	९·८४५०१८१	९·८५३८६१९	९·९९११५६२	१०·००८८४३८	३५
२६	९·८४५१४७०	९·८५३७३८१	९·९९१४०८९	१०·००८५९११	३४
२७	९·८४५२७५८	९·८५३६१४२	९·९९१६६१६	१०·००८३३८४	३३
२८	९·८४५४०४५	९·८५३४९०२	९·९९१९१४३	१०·००८०८५७	३२
२९	९·८४५५३३२	९·८५३३६६२	९·९९२१६७०	१०·००७८३३०	३१
३०	९·८४५६६१८	९·८५३२४२१	९·९९२४१९८	१०·००७५८०२	३०
३१	९·८४५७९०३	९·८५३११७९	९·९९२६७२५	१०·००७३२७५	२९
३२	९·८४५९१८८	९·८५२९९३६	९·९९२९२५१	१०·००७०७४९	२८
३३	९·८४६०४७१	९·८५२८६९३	९·९९३१७७८	१०·००६८२२२	२७
३४	९·८४६१७५४	९·८५२७४४९	९·९९३४३०५	१०·००६५६९५	२६
३५	९·८४६३०३६	९·८५२६२०४	९·९९३६८३२	१०·००६३१६८	२५
३६	९·८४६४३१८	९·८५२४९५९	९·९९३९३५९	१०·००६०६४१	२४
३७	९·८४६५५९९	९·८५२३७१३	९·९९४१८८६	१०·००५८११४	२३
३८	९·८४६६८७९	९·८५२२४६६	९·९९४४४१३	१०·००५५५८७	२२
३९	९·८४६८१५८	९·८५२१२१८	९·९९४६९४०	१०·००५३०६०	२१
४०	९·८४६९४३६	९·८५१९९७०	९·९९४९४६६	१०·००५०५३४	२०
४१	९·८४७०७१४	९·८५१८७२१	९·९९५१९९३	१०·००४८००७	१९
४२	९·८४७१९९१	९·८५१७४७१	९·९९५४५२०	१०·००४५४८०	१८
४३	९·८४७३२६७	९·८५१६२२०	९·९९५७०४७	१०·००४२९५३	१७
४४	९·८४७४५४३	९·८५१४९६९	९·९९५९५७४	१०·००४०४२६	१६
४५	९·८४७५८१७	९·८५१३७१७	९·९९६२१००	१०·००३७९००	१५
४६	९·८४७७०९१	९·८५१२४६५	९·९९६४६२७	१०·००३५३७३	१४
४७	९·८४७८३६५	९·८५११२११	९·९९६७१५४	१०·००३२८४६	१३
४८	९·८४७९६३७	९·८५०९९५७	९·९९६९६८०	१०·००३०३२०	१२
४९	९·८४८०९०९	९·८५०८७०२	९·९९७२२०७	१०·००२७७९३	११
५०	९·८४८२१८०	९·८५०७४४६	९·९९७४७३४	१०·००२५२६६	१०
५१	९·८४८३४५०	९·८५०६१९०	९·९९७७२६०	१०·००२२७४०	९
५२	९·८४८४७२०	९·८५०४९३३	९·९९७९७८७	१०·००२०२१३	८
५३	९·८४८५९८९	९·८५०३६७५	९·९९८२३१४	१०·००१७६८६	७
५४	९·८४८७२५७	९·८५०२४१७	९·९९८४८४०	१०·००१५१६०	६
५५	९·८४८८५२४	९·८५०११५७	९·९९८७३६७	१०·००१२६३३	५
५६	९·८४८९७९१	९·८४९९८९७	९·९९८९८९४	१०·००१०१०६	४
५७	९·८४९१०५७	९·८४९८६३७	९·९९९२४२०	१०·०००७५८०	३
५८	९·८४९२३२२	९·८४९७३७५	९·९९९४९४७	१०·०००५०५३	२
५९	९·८४९३५८६	९·८४९६११३	९·९९९७४७३	१०·०००२५२७	१
६०	९·८४९४८५०	९·८४९४८५०	१०·०००००००	१०·०००००००	०
क	कोभुजज्या	भुजज्या	कोस्पर्शरेघ	स्पर्शरेघ	क

निसर्ग कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	० अंश		१ अंश		२ अंश		३ अंश		४ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	०	१०००००	१७४५	९९९८५	३४९०	९९९३९	५२३४	९९८६३	६९७६	९९७५६	६०
१	२९	१०००००	१७७४	९९९८४	३५१९	९९९३८	५२६३	९९८६१	७००५	९९७५४	५९
२	५८	१०००००	१८०३	९९९८४	३५४८	९९९३७	५२९२	९९८६०	७०३४	९९७५२	५८
३	८७	१०००००	१८३२	९९९८३	३५७७	९९९३६	५३२१	९९८५८	७०६३	९९७५०	५७
४	११६	१०००००	१८६२	९९९८३	३६०६	९९९३५	५३५०	९९८५७	७०९२	९९७४८	५६
५	१४५	१०००००	१८९१	९९९८२	३६३५	९९९३४	५३७९	९९८५५	७१२१	९९७४६	५५
६	१७५	१०००००	१९२०	९९९८२	३६६४	९९९३३	५४०८	९९८५४	७१५०	९९७४४	५४
७	२०४	१०००००	१९४९	९९९८१	३६९३	९९९३२	५४३७	९९८५२	७१७९	९९७४२	५३
८	२३३	१०००००	१९७८	९९९८०	३७२३	९९९३१	५४६६	९९८५१	७२०८	९९७४०	५२
९	२६२	१०००००	२००७	९९९८०	३७५२	९९९३०	५४९५	९९८४९	७२३७	९९७३८	५१
१०	२९१	१०००००	२०३६	९९९७९	३७८१	९९९२९	५५२४	९९८४७	७२६६	९९७३६	५०
११	३२०	९९९९९	२०६५	९९९७९	३८१०	९९९२७	५५५३	९९८४६	७२९५	९९७३४	४९
१२	३४९	९९९९९	२०९४	९९९७८	३८३९	९९९२६	५५८२	९९८४४	७३२४	९९७३१	४८
१३	३७८	९९९९९	२१२३	९९९७७	३८६८	९९९२५	५६११	९९८४२	७३५३	९९७२९	४७
१४	४०७	९९९९९	२१५२	९९९७७	३८९७	९९९२४	५६४०	९९८४१	७३८२	९९७२७	४६
१५	४३६	९९९९९	२१८१	९९९७६	३९२६	९९९२३	५६६९	९९८३९	७४११	९९७२५	४५
१६	४६५	९९९९९	२२११	९९९७६	३९५५	९९९२२	५६९८	९९८३८	७४४०	९९७२३	४४
१७	४९५	९९९९९	२२४०	९९९७५	३९८४	९९९२१	५७२७	९९८३६	७४६९	९९७२१	४३
१८	५२४	९९९९९	२२६९	९९९७४	४०१३	९९९१९	५७५६	९९८३४	७४९८	९९७१९	४२
१९	५५३	९९९९८	२२९८	९९९७४	४०४२	९९९१८	५७८५	९९८३३	७५२७	९९७१६	४१
२०	५८२	९९९९८	२३२७	९९९७३	४०७१	९९९१७	५८१४	९९८३१	७५५६	९९७१४	४०
२१	६११	९९९९८	२३५६	९९९७२	४१००	९९९१६	५८४४	९९८२९	७५८५	९९७१२	३९
२२	६४०	९९९९८	२३८५	९९९७२	४१२९	९९९१५	५८७३	९९८२७	७६१४	९९७१०	३८
२३	६६९	९९९९८	२४१४	९९९७१	४१५९	९९९१३	५९०२	९९८२६	७६४३	९९७०८	३७
२४	६९८	९९९९८	२४४३	९९९७०	४१८८	९९९१२	५९३१	९९८२४	७६७२	९९७०५	३६
२५	७२७	९९९९७	२४७२	९९९६९	४२१७	९९९११	५९६०	९९८२२	७७०१	९९७०३	३५
२६	७५६	९९९९७	२५०१	९९९६९	४२४६	९९९१०	५९८९	९९८२१	७७३०	९९७०१	३४
२७	७८५	९९९९७	२५३०	९९९६८	४२७५	९९९०९	६०१८	९९८१९	७७५९	९९६९९	३३
२८	८१४	९९९९७	२५६०	९९९६७	४३०४	९९९०७	६०४७	९९८१७	७७८८	९९६९६	३२
२९	८४४	९९९९६	२५८९	९९९६६	४३३३	९९९०६	६०७६	९९८१५	७८१७	९९६९४	३१
३०	८७३	९९९९६	२६१८	९९९६६	४३६२	९९९०५	६१०५	९९८१३	७८४६	९९६९२	३०
३१	९०२	९९९९६	२६४७	९९९६५	४३९१	९९९०४	६१३४	९९८१२	७८७५	९९६८९	२९
३२	९३१	९९९९६	२६७६	९९९६४	४४२०	९९९०२	६१६३	९९८१०	७९०४	९९६८७	२८
३३	९६०	९९९९५	२७०५	९९९६३	४४४९	९९९०१	६१९२	९९८०८	७९३३	९९६८५	२७
३४	९८९	९९९९५	२७३४	९९९६३	४४७८	९९९००	६२२१	९९८०६	७९६२	९९६८३	२६
३५	१०१८	९९९९५	२७६३	९९९६२	४५०७	९९८९८	६२५०	९९८०४	७९९१	९९६८०	२५
३६	१०४७	९९९९५	२७९२	९९९६१	४५३६	९९८९७	६२७९	९९८०३	८०२०	९९६७८	२४
३७	१०७६	९९९९४	२८२१	९९९६०	४५६५	९९८९६	६३०८	९९८०१	८०४९	९९६७६	२३
३८	११०५	९९९९४	२८५०	९९९५९	४५९४	९९८९४	६३३७	९९७९९	८०७८	९९६७३	२२
३९	११३४	९९९९४	२८७९	९९९५९	४६२३	९९८९३	६३६६	९९७९७	८१०७	९९६७१	२१
४०	११६४	९९९९३	२९०८	९९९५८	४६५३	९९८९२	६३९५	९९७९५	८१३६	९९६६८	२०
४१	११९३	९९९९३	२९३८	९९९५७	४६८२	९९८९०	६४२४	९९७९३	८१६५	९९६६६	१९
४२	१२२२	९९९९३	२९६७	९९९५६	४७११	९९८८९	६४५३	९९७९२	८१९४	९९६६४	१८
४३	१२५१	९९९९२	२९९६	९९९५५	४७४०	९९८८८	६४८२	९९७९०	८२२३	९९६६१	१७
४४	१२८०	९९९९२	३०२५	९९९५४	४७६९	९९८८६	६५११	९९७८८	८२५२	९९६५९	१६
४५	१३०९	९९९९१	३०५४	९९९५३	४७९८	९९८८५	६५४०	९९७८६	८२८१	९९६५७	१५
४६	१३३८	९९९९१	३०८३	९९९५२	४८२७	९९८८३	६५६९	९९७८४	८३१०	९९६५४	१४
४७	१३६७	९९९९१	३११२	९९९५२	४८५६	९९८८२	६५९८	९९७८२	८३३९	९९६५२	१३
४८	१३९६	९९९९०	३१४१	९९९५१	४८८५	९९८८१	६६२७	९९७८०	८३६८	९९६४९	१२
४९	१४२५	९९९९०	३१७०	९९९५०	४९१४	९९८७९	६६५६	९९७७८	८३९७	९९६४७	११
५०	१४५४	९९९८९	३१९९	९९९४९	४९४३	९९८७८	६६८५	९९७७६	८४२६	९९६४४	१०
५१	१४८३	९९९८९	३२२८	९९९४८	४९७२	९९८७६	६७१४	९९७७४	८४५५	९९६४२	९
५२	१५१३	९९९८९	३२५७	९९९४७	५००१	९९८७५	६७४३	९९७७२	८४८४	९९६३९	८
५३	१५४२	९९९८८	३२८६	९९९४६	५०३०	९९८७३	६७७३	९९७७०	८५१३	९९६३७	७
५४	१५७१	९९९८८	३३१६	९९९४५	५०५९	९९८७२	६८०२	९९७६८	८५४२	९९६३५	६
५५	१६००	९९९८७	३३४५	९९९४४	५०८८	९९८७०	६८३१	९९७६६	८५७१	९९६३२	५
५६	१६२९	९९९८७	३३७४	९९९४३	५११७	९९८६९	६८६०	९९७६४	८६००	९९६३०	४
५७	१६५८	९९९८६	३४०३	९९९४२	५१४६	९९८६७	६८८९	९९७६२	८६२९	९९६२७	३
५८	१६८७	९९९८६	३४३२	९९९४१	५१७५	९९८६६	६९१८	९९७६०	८६५८	९९६२५	२
५९	१७१६	९९९८५	३४६१	९९९४०	५२०५	९९८६४	६९४७	९९७५८	८६८७	९९६२२	१
६०	१७४५	९९९८५	३४९०	९९९३९	५२३४	९९८६३	६९७६	९९७५६	८७१६	९९६१९	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	८९ अंश		८८ अंश		८७ अंश		८६ अंश		८५ अंश		

तिसरें कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	५ अंश		६ अंश		७ अंश		८ अंश		९ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	८७१६	९९६१९	१०४५३	९९४५२	१२१८७	९९२५५	१३९१७	९९०२७	१५६४३	९८७६९	६०
१	८७४५	९९६१७	१०४८२	९९४४९	१२२१६	९९२५१	१३९४६	९९०२३	१५६७२	९८७६४	५९
२	८७७४	९९६१४	१०५११	९९४४६	१२२४५	९९२४८	१३९७५	९९०१९	१५७०१	९८७६०	५८
३	८८०३	९९६१२	१०५४०	९९४४३	१२२७४	९९२४४	१४००४	९९०१५	१५७३०	९८७५५	५७
४	८८३१	९९६०९	१०५६९	९९४४०	१२३०२	९९२४०	१४०३३	९९०११	१५७५८	९८७५१	५६
५	८८६०	९९६०७	१०५९७	९९४३७	१२३३१	९९२३७	१४०६१	९९००६	१५७८७	९८७४६	५५
६	८८८९	९९६०४	१०६२६	९९४३४	१२३६०	९९२३३	१४०९०	९९००२	१५८१६	९८७४१	५४
७	८९१८	९९६०२	१०६५५	९९४३१	१२३८९	९९२३०	१४११९	९८९९८	१५८४५	९८७३७	५३
८	८९४७	९९५९९	१०६८४	९९४२८	१२४१८	९९२२६	१४१४८	९८९९४	१५८७३	९८७३२	५२
९	८९७६	९९५९६	१०७१३	९९४२४	१२४४७	९९२२२	१४१७७	९८९९०	१५९०२	९८७२८	५१
१०	९००५	९९५९४	१०७४२	९९४२१	१२४७६	९९२१९	१४२०५	९८९८६	१५९३१	९८७२३	५०
११	९०३४	९९५९१	१०७७१	९९४१८	१२५०४	९९२१५	१४२३४	९८९८२	१५९५९	९८७१८	४९
१२	९०६३	९९५८८	१०८००	९९४१५	१२५३३	९९२१२	१४२६३	९८९७८	१५९८८	९८७१४	४८
१३	९०९२	९९५८६	१०८२९	९९४१२	१२५६२	९९२०८	१४२९२	९८९७३	१६०१७	९८७०९	४७
१४	९१२१	९९५८३	१०८५८	९९४०९	१२५९१	९९२०४	१४३२०	९८९६९	१६०४६	९८७०४	४६
१५	९१५०	९९५८०	१०८८७	९९४०६	१२६२०	९९२००	१४३४९	९८९६५	१६०७४	९८७००	४५
१६	९१७९	९९५७८	१०९१६	९९४०२	१२६४९	९९१९७	१४३७८	९८९६१	१६१०३	९८६९५	४४
१७	९२०८	९९५७५	१०९४५	९९३९९	१२६७८	९९१९३	१४४०७	९८९५७	१६१३२	९८६९०	४३
१८	९२३७	९९५७२	१०९७३	९९३९६	१२७०६	९९१८९	१४४३६	९८९५३	१६१६०	९८६८६	४२
१९	९२६६	९९५७०	११००२	९९३९३	१२७३५	९९१८६	१४४६४	९८९४८	१६१८९	९८६८१	४१
२०	९२९५	९९५६७	११०३१	९९३९०	१२७६४	९९१८२	१४४९३	९८९४४	१६२१८	९८६७६	४०
२१	९३२४	९९५६४	११०६०	९९३८६	१२७९३	९९१७८	१४५२२	९८९४०	१६२४६	९८६७१	३९
२२	९३५३	९९५६२	११०८९	९९३८३	१२८२२	९९१७५	१४५५१	९८९३६	१६२७५	९८६६७	३८
२३	९३८२	९९५५९	१११९८	९९३८०	१२८५१	९९१७१	१४५८०	९८९३१	१६३०४	९८६६२	३७
२४	९४११	९९५५६	१११४७	९९३७७	१२८८०	९९१६७	१४६०८	९८९२७	१६३३३	९८६५७	३६
२५	९४४०	९९५५३	१११७६	९९३७४	१२९०८	९९१६३	१४६३७	९८९२३	१६३६१	९८६५२	३५
२६	९४६९	९९५५१	११२०५	९९३७०	१२९३७	९९१६०	१४६६६	९८९१९	१६३९०	९८६४८	३४
२७	९४९८	९९५४८	११२३४	९९३६७	१२९६६	९९१५६	१४६९५	९८९१४	१६४१९	९८६४३	३३
२८	९५२७	९९५४५	११२६३	९९३६४	१२९९५	९९१५२	१४७२३	९८९१०	१६४४७	९८६३८	३२
२९	९५५६	९९५४२	११२९१	९९३६०	१३०२४	९९१४८	१४७५२	९८९०६	१६४७६	९८६३३	३१
३०	९५८५	९९५४०	११३२०	९९३५७	१३०५३	९९१४४	१४७८१	९८९०२	१६५०५	९८६२९	३०
३१	९६१४	९९५३७	११३४९	९९३५४	१३०८१	९९१४१	१४८१०	९८८९७	१६५३३	९८६२४	२९
३२	९६४२	९९५३४	११३७८	९९३५१	१३११०	९९१३७	१४८३८	९८८९३	१६५६२	९८६१९	२८
३३	९६७१	९९५३१	११४०७	९९३४७	१३१३९	९९१३३	१४८६७	९८८८९	१६५९१	९८६१४	२७
३४	९७००	९९५२८	११४३६	९९३४४	१३१६८	९९१२९	१४८९६	९८८८४	१६६२०	९८६०९	२६
३५	९७२९	९९५२६	११४६५	९९३४१	१३१९७	९९१२५	१४९२५	९८८८०	१६६४८	९८६०४	२५
३६	९७५८	९९५२३	११४९४	९९३३७	१३२२६	९९१२२	१४९५४	९८८७६	१६६७७	९८६००	२४
३७	९७८७	९९५२०	११५२३	९९३३४	१३२५४	९९११८	१४९८२	९८८७१	१६७०६	९८५९५	२३
३८	९८१६	९९५१७	११५५२	९९३३१	१३२८३	९९११४	१५०११	९८८६७	१६७३४	९८५९०	२२
३९	९८४५	९९५१४	११५८०	९९३२७	१३३१२	९९११०	१५०४०	९८८६३	१६७६३	९८५८५	२१
४०	९८७४	९९५११	११६०९	९९३२४	१३३४१	९९१०६	१५०६९	९८८५८	१६७९२	९८५८०	२०
४१	९९०३	९९५०८	११६३८	९९३२०	१३३७०	९९१०२	१५०९७	९८८५४	१६८२०	९८५७५	१९
४२	९९३२	९९५०६	११६६७	९९३१७	१३३९९	९९०९८	१५१२६	९८८४९	१६८४९	९८५७०	१८
४३	९९६१	९९५०३	११६९६	९९३१४	१३४२७	९९०९४	१५१५५	९८८४५	१६८७८	९८५६५	१७
४४	९९९०	९९५००	११७२५	९९३१०	१३४५६	९९०९०	१५१८४	९८८४०	१६९०६	९८५६१	१६
४५	१००१९	९९४९७	११७५४	९९३०७	१३४८५	९९०८७	१५२१२	९८८३६	१६९३५	९८५५६	१५
४६	१००४८	९९४९४	११७८३	९९३०३	१३५१४	९९०८३	१५२४१	९८८३२	१६९६४	९८५५१	१४
४७	१००७७	९९४९१	११८१२	९९३००	१३५४३	९९०७९	१५२७०	९८८२७	१६९९२	९८५४६	१३
४८	१०१०६	९९४८८	११८४०	९९२९७	१३५७२	९९०७५	१५२९९	९८८२३	१७०२१	९८५४१	१२
४९	१०१३५	९९४८५	११८६९	९९२९३	१३६००	९९०७१	१५३२७	९८८१८	१७०५०	९८५३६	११
५०	१०१६४	९९४८२	११८९८	९९२९०	१३६२९	९९०६७	१५३५६	९८८१४	१७०७८	९८५३१	१०
५१	१०१९२	९९४७९	११९२७	९९२८६	१३६५८	९९०६३	१५३८५	९८८०९	१७१०७	९८५२६	९
५२	१०२२१	९९४७६	११९५६	९९२८३	१३६८७	९९०५९	१५४१४	९८८०५	१७१३६	९८५२१	८
५३	१०२५०	९९४७३	११९८५	९९२७९	१३७१६	९९०५५	१५४४२	९८८००	१७१६४	९८५१६	७
५४	१०२७९	९९४७०	१२०१४	९९२७६	१३७४४	९९०५१	१५४७१	९८७९६	१७१९३	९८५११	६
५५	१०३०८	९९४६७	१२०४३	९९२७२	१३७७३	९९०४७	१५५००	९८७९१	१७२२२	९८५०६	५
५६	१०३३७	९९४६४	१२०७१	९९२६९	१३८०२	९९०४३	१५५२९	९८७८७	१७२५०	९८५०१	४
५७	१०३६६	९९४६१	१२१००	९९२६५	१३८३१	९९०३९	१५५५७	९८७८२	१७२७९	९८४९६	३
५८	१०३९५	९९४५८	१२१२९	९९२६२	१३८६०	९९०३५	१५५८६	९८७७८	१७३०८	९८४९१	२
५९	१०४२४	९९४५५	१२१५८	९९२५८	१३८८९	९९०३१	१५६१५	९८७७३	१७३३६	९८४८६	१
६०	१०४५३	९९४५२	१२१८७	९९२५५	१३९१७	९९०२७	१५६४३	९८७६९	१७३६५	९८४८१	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	८४ अंश		८३ अंश		८२ अंश		८१ अंश		८० अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	१० अंश		११ अंश		१२ अंश		१३ अंश		१४ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	१७३६५	९८४८१	१९०८१	९८१६३	२०७९१	९७८१५	२२४९५	९७४३७	२४१९२	९७०३०	६०
१	१७३९३	९८४७६	१९१०९	९८१५७	२०८२०	९७८०९	२२५२३	९७४३०	२४२२०	९७०२३	५९
२	१७४२२	९८४७१	१९१३८	९८१५२	२०८४८	९७८०३	२२५५२	९७४२४	२४२४९	९७०१५	५८
३	१७४५१	९८४६६	१९१६७	९८१४६	२०८७७	९७७९७	२२५८०	९७४१७	२४२७७	९७००८	५७
४	१७४७९	९८४६१	१९१९५	९८१४०	२०९०५	९७७९१	२२६०८	९७४११	२४३०५	९७००१	५६
५	१७५०८	९८४५५	१९२२४	९८१३५	२०९३३	९७७८४	२२६३७	९७४०४	२४३३३	९६९९४	५५
६	१७५३७	९८४५०	१९२५२	९८१२९	२०९६२	९७७७८	२२६६५	९७३९८	२४३६२	९६९८७	५४
७	१७५६५	९८४४५	१९२८१	९८१२४	२०९९०	९७७७२	२२६९३	९७३९१	२४३९०	९६९८०	५३
८	१७५९४	९८४४०	१९३०९	९८११८	२१०१९	९७७६६	२२७२२	९७३८४	२४४१८	९६९७३	५२
९	१७६२३	९८४३५	१९३३८	९८११२	२१०४७	९७७६०	२२७५०	९७३७८	२४४४६	९६९६६	५१
१०	१७६५१	९८४३०	१९३६६	९८१०७	२१०७६	९७७५४	२२७७८	९७३७१	२४४७४	९६९५९	५०
११	१७६८०	९८४२५	१९३९५	९८१०१	२११०४	९७७४८	२२८०७	९७३६५	२४५०३	९६९५२	४९
१२	१७७०८	९८४२०	१९४२३	९८०९६	२११३२	९७७४२	२२८३५	९७३५८	२४५३१	९६९४५	४८
१३	१७७३७	९८४१४	१९४५२	९८०९०	२११६१	९७७३५	२२८६३	९७३५१	२४५५९	९६९३७	४७
१४	१७७६६	९८४०९	१९४८१	९८०८४	२११८९	९७७२९	२२८९२	९७३४५	२४५८७	९६९३०	४६
१५	१७७९४	९८४०४	१९५०९	९८०७९	२१२१८	९७७२३	२२९२०	९७३३८	२४६१५	९६९२३	४५
१६	१७८२३	९८३९९	१९५३८	९८०७३	२१२४६	९७७१७	२२९४८	९७३३१	२४६४४	९६९१६	४४
१७	१७८५२	९८३९४	१९५६६	९८०६७	२१२७५	९७७११	२२९७७	९७३२५	२४६७२	९६९०९	४३
१८	१७८८०	९८३८८	१९५९५	९८०६१	२१३०३	९७७०५	२३००५	९७३१८	२४७००	९६९०२	४२
१९	१७९०९	९८३८३	१९६२३	९८०५६	२१३३१	९७६९८	२३०३३	९७३११	२४७२८	९६८९४	४१
२०	१७९३७	९८३७८	१९६५२	९८०५०	२१३६०	९७६९२	२३०६२	९७३०४	२४७५६	९६८८७	४०
२१	१७९६६	९८३७३	१९६८०	९८०४४	२१३८८	९७६८६	२३०९०	९७२९८	२४७८४	९६८८०	३९
२२	१७९९५	९८३६८	१९७०९	९८०३९	२१४१७	९७६८०	२३११८	९७२९१	२४८१३	९६८७३	३८
२३	१८०२३	९८३६२	१९७३७	९८०३३	२१४४५	९७६७३	२३१४६	९७२८४	२४८४१	९६८६६	३७
२४	१८०५२	९८३५७	१९७६६	९८०२७	२१४७४	९७६६७	२३१७५	९७२७८	२४८६९	९६८५८	३६
२५	१८०८१	९८३५२	१९७९४	९८०२१	२१५०२	९७६६१	२३२०३	९७२७१	२४८९७	९६८५१	३५
२६	१८१०९	९८३४७	१९८२३	९८०१६	२१५३०	९७६५५	२३२३१	९७२६४	२४९२५	९६८४४	३४
२७	१८१३८	९८३४१	१९८५१	९८०१०	२१५५९	९७६४८	२३२६०	९७२५७	२४९५४	९६८३७	३३
२८	१८१६६	९८३३६	१९८८०	९८००४	२१५८७	९७६४२	२३२८८	९७२५१	२४९८२	९६८३०	३२
२९	१८१९५	९८३३१	१९९०८	९७९९८	२१६१६	९७६३६	२३३१६	९७२४४	२५०१०	९६८२२	३१
३०	१८२२४	९८३२५	१९९३७	९७९९२	२१६४४	९७६३०	२३३४५	९७२३७	२५०३८	९६८१५	३०
३१	१८२५२	९८३२०	१९९६५	९७९८७	२१६७२	९७६२३	२३३७३	९७२३०	२५०६६	९६८०७	२९
३२	१८२८१	९८३१५	१९९९४	९७९८१	२१७०१	९७६१७	२३४०१	९७२२३	२५०९४	९६८००	२८
३३	१८३०९	९८३१०	२००२२	९७९७५	२१७२९	९७६११	२३४२९	९७२१७	२५१२२	९६७९३	२७
३४	१८३३८	९८३०४	२००५१	९७९६९	२१७५८	९७६०४	२३४५८	९७२१०	२५१५१	९६७८६	२६
३५	१८३६७	९८२९९	२००७९	९७९६३	२१७८६	९७५९८	२३४८६	९७२०३	२५१७९	९६७७८	२५
३६	१८३९५	९८२९४	२०१०८	९७९५८	२१८१४	९७५९२	२३५१४	९७१९६	२५२०७	९६७७१	२४
३७	१८४२४	९८२८८	२०१३६	९७९५२	२१८४३	९७५८५	२३५४२	९७१८९	२५२३५	९६७६४	२३
३८	१८४५२	९८२८३	२०१६५	९७९४६	२१८७१	९७५७९	२३५७१	९७१८२	२५२६३	९६७५६	२२
३९	१८४८१	९८२७७	२०१९३	९७९४०	२१८९९	९७५७३	२३५९९	९७१७६	२५२९१	९६७४९	२१
४०	१८५०९	९८२७२	२०२२२	९७९३४	२१९२८	९७५६६	२३६२७	९७१६९	२५३२०	९६७४२	२०
४१	१८५३८	९८२६७	२०२५०	९७९२८	२१९५६	९७५६०	२३६५६	९७१६२	२५३४८	९६७३४	१९
४२	१८५६७	९८२६१	२०२७९	९७९२२	२१९८५	९७५५३	२३६८४	९७१५५	२५३७६	९६७२७	१८
४३	१८५९५	९८२५६	२०३०७	९७९१६	२२०१३	९७५४७	२३७१२	९७१४८	२५४०४	९६७१९	१७
४४	१८६२४	९८२५०	२०३३६	९७९१०	२२०४१	९७५४१	२३७४०	९७१४१	२५४३२	९६७१२	१६
४५	१८६५२	९८२४५	२०३६४	९७९०५	२२०७०	९७५३४	२३७६९	९७१३४	२५४६०	९६७०५	१५
४६	१८६८१	९८२४०	२०३९३	९७८९९	२२०९८	९७५२८	२३७९७	९७१२७	२५४८८	९६६९७	१४
४७	१८७१०	९८२३४	२०४२१	९७८९३	२२१२६	९७५२१	२३८२५	९७१२०	२५५१६	९६६९०	१३
४८	१८७३८	९८२२९	२०४५०	९७८८७	२२१५५	९७५१५	२३८५३	९७११३	२५५४४	९६६८२	१२
४९	१८७६७	९८२२३	२०४७८	९७८८१	२२१८३	९७५०८	२३८८२	९७१०६	२५५७३	९६६७५	११
५०	१८७९५	९८२१८	२०५०७	९७८७५	२२२११	९७५०२	२३९१०	९७१००	२५६०१	९६६६७	१०
५१	१८८२४	९८२१२	२०५३५	९७८६९	२२२४०	९७४९६	२३९३८	९७०९३	२५६२९	९६६६०	९
५२	१८८५२	९८२०७	२०५६३	९७८६३	२२२६८	९७४८९	२३९६६	९७०८६	२५६५७	९६६५३	८
५३	१८८८१	९८२०१	२०५९२	९७८५७	२२२९६	९७४८३	२३९९५	९७०७९	२५६८५	९६६४५	७
५४	१८९१०	९८१९६	२०६२०	९७८५१	२२३२५	९७४७६	२४०२३	९७०७२	२५७१३	९६६३८	६
५५	१८९३८	९८१९०	२०६४९	९७८४५	२२३५३	९७४७०	२४०५१	९७०६५	२५७४१	९६६३०	५
५६	१८९६७	९८१८५	२०६७७	९७८३९	२२३८१	९७४६३	२४०७९	९७०५८	२५७६९	९६६२३	४
५७	१८९९५	९८१७९	२०७०६	९७८३३	२२४१०	९७४५७	२४१०८	९७०५१	२५७९७	९६६१५	३
५८	१९०२४	९८१७४	२०७३४	९७८२७	२२४३८	९७४५०	२४१३६	९७०४४	२५८२६	९६६०८	२
५९	१९०५२	९८१६८	२०७६३	९७८२१	२२४६६	९७४४४	२४१६४	९७०३७	२५८५४	९६६००	१
६०	१९०८१	९८१६३	२०७९१	९७८१५	२२४९५	९७४३७	२४१९२	९७०३०	२५८८२	९६५९३	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	७९ अंश		७८ अंश		७७ अंश		७६ अंश		७५ अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	१५ अंश		१६ अंश		१७ अंश		१८ अंश		१९ अंश		
क	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	२५८८२	९६५९३	२७५६४	९६१२६	२९२३७	९५६३०	३०९०२	९५१०६	३२५५७	९४५५२	६०
१	२५९१०	९६५८५	२७५९२	९६११८	२९२६५	९५६२२	३०९२९	९५०९७	३२५८४	९४५४२	५९
२	२५९३८	९६५७८	२७६२०	९६११०	२९२९३	९५६१३	३०९५७	९५०८८	३२६१२	९४५३३	५८
३	२५९६६	९६५७०	२७६४८	९६१०२	२९३२१	९५६०५	३०९८५	९५०७९	३२६३९	९४५२३	५७
४	२५९९४	९६५६२	२७६७६	९६०९४	२९३४८	९५५९६	३१०१२	९५०७०	३२६६७	९४५१४	५६
५	२६०२२	९६५५५	२७७०४	९६०८६	२९३७६	९५५८८	३१०४०	९५०६१	३२६९४	९४५०४	५५
६	२६०५०	९६५४७	२७७३१	९६०७८	२९४०४	९५५७९	३१०६८	९५०५२	३२७२२	९४४९५	५४
७	२६०७९	९६५४०	२७७५९	९६०७०	२९४३२	९५५७१	३१०९५	९५०४३	३२७४९	९४४८५	५३
८	२६१०७	९६५३२	२७७८७	९६०६२	२९४६०	९५५६२	३११२३	९५०३३	३२७७७	९४४७६	५२
९	२६१३५	९६५२४	२७८१५	९६०५४	२९४८७	९५५५४	३११५१	९५०२४	३२८०४	९४४६६	५१
१०	२६१६३	९६५१७	२७८४३	९६०४६	२९५१५	९५५४५	३११७८	९५०१५	३२८३२	९४४५७	५०
११	२६१९१	९६५०९	२७८७१	९६०३७	२९५४३	९५५३६	३१२०६	९५००६	३२८५९	९४४४७	४९
१२	२६२१९	९६५०२	२७८९९	९६०२९	२९५७१	९५५२८	३१२३३	९४९९७	३२८८७	९४४३८	४८
१३	२६२४७	९६४९४	२७९२७	९६०२१	२९५९९	९५५१९	३१२६१	९४९८८	३२९१४	९४४२८	४७
१४	२६२७५	९६४८६	२७९५५	९६०१३	२९६२६	९५५११	३१२८९	९४९७९	३२९४२	९४४१८	४६
१५	२६३०३	९६४७९	२७९८३	९६००५	२९६५४	९५५०२	३१३१६	९४९७०	३२९६९	९४४०९	४५
१६	२६३३१	९६४७१	२८०११	९५९९७	२९६८२	९५४९३	३१३४४	९४९६१	३२९९७	९४३९९	४४
१७	२६३५९	९६४६३	२८०३९	९५९८९	२९७१०	९५४८५	३१३७२	९४९५२	३३०२४	९४३९०	४३
१८	२६३८७	९६४५६	२८०६७	९५९८१	२९७३७	९५४७६	३१३९९	९४९४३	३३०५१	९४३८०	४२
१९	२६४१५	९६४४८	२८०९५	९५९७२	२९७६५	९५४६७	३१४२७	९४९३३	३३०७९	९४३७०	४१
२०	२६४४३	९६४४०	२८१२३	९५९६४	२९७९३	९५४५९	३१४५४	९४९२४	३३१०६	९४३६१	४०
२१	२६४७१	९६४३३	२८१५०	९५९५६	२९८२१	९५४५०	३१४८२	९४९१५	३३१३४	९४३५१	३९
२२	२६५००	९६४२५	२८१७८	९५९४८	२९८४९	९५४४१	३१५१०	९४९०६	३३१६१	९४३४२	३८
२३	२६५२८	९६४१७	२८२०६	९५९४०	२९८७६	९५४३३	३१५३७	९४८९७	३३१८९	९४३३२	३७
२४	२६५५६	९६४१०	२८२३४	९५९३१	२९९०४	९५४२४	३१५६५	९४८८८	३३२१६	९४३२२	३६
२५	२६५८४	९६४०२	२८२६२	९५९२३	२९९३२	९५४१५	३१५९३	९४८७८	३३२४४	९४३१३	३५
२६	२६६१२	९६३९४	२८२९०	९५९१५	२९९६०	९५४०७	३१६२०	९४८६९	३३२७१	९४३०३	३४
२७	२६६४०	९६३८६	२८३१८	९५९०७	२९९८७	९५३९८	३१६४८	९४८६०	३३२९८	९४२९३	३३
२८	२६६६८	९६३७९	२८३४६	९५८९८	३००१५	९५३८९	३१६७५	९४८५१	३३३२६	९४२८४	३२
२९	२६६९६	९६३७१	२८३७४	९५८९०	३००४३	९५३८०	३१७०३	९४८४२	३३३५३	९४२७४	३१
३०	२६७२४	९६३६३	२८४०२	९५८८२	३००७१	९५३७२	३१७३०	९४८३२	३३३८१	९४२६४	३०
३१	२६७५२	९६३५५	२८४२९	९५८७४	३००९८	९५३६३	३१७५८	९४८२३	३३४०८	९४२५४	२९
३२	२६७८०	९६३४७	२८४५७	९५८६५	३०१२६	९५३५४	३१७८६	९४८१४	३३४३६	९४२४५	२८
३३	२६८०८	९६३४०	२८४८५	९५८५७	३०१५४	९५३४५	३१८१३	९४८०५	३३४६३	९४२३५	२७
३४	२६८३६	९६३३२	२८५१३	९५८४९	३०१८२	९५३३७	३१८४१	९४७९५	३३४९०	९४२२५	२६
३५	२६८६४	९६३२४	२८५४१	९५८४१	३०२०९	९५३२८	३१८६८	९४७८६	३३५१८	९४२१५	२५
३६	२६८९२	९६३१६	२८५६९	९५८३२	३०२३७	९५३१९	३१८९६	९४७७७	३३५४५	९४२०६	२४
३७	२६९२०	९६३०८	२८५९७	९५८२४	३०२६५	९५३१०	३१९२३	९४७६८	३३५७३	९४१९६	२३
३८	२६९४८	९६३०१	२८६२५	९५८१६	३०२९२	९५३०१	३१९५१	९४७५८	३३६००	९४१८६	२२
३९	२६९७६	९६२९३	२८६५२	९५८०७	३०३२०	९५२९३	३१९७९	९४७४९	३३६२७	९४१७६	२१
४०	२७००४	९६२८५	२८६८०	९५७९९	३०३४८	९५२८४	३२००६	९४७४०	३३६५५	९४१६७	२०
४१	२७०३२	९६२७७	२८७०८	९५७९१	३०३७६	९५२७५	३२०३४	९४७३०	३३६८२	९४१५७	१९
४२	२७०६०	९६२६९	२८७३६	९५७८२	३०४०३	९५२६६	३२०६१	९४७२१	३३७१०	९४१४७	१८
४३	२७०८८	९६२६१	२८७६४	९५७७४	३०४३१	९५२५७	३२०८९	९४७१२	३३७३७	९४१३७	१७
४४	२७११६	९६२५३	२८७९२	९५७६६	३०४५९	९५२४८	३२११६	९४७०२	३३७६४	९४१२७	१६
४५	२७१४४	९६२४६	२८८२०	९५७५७	३०४८६	९५२४०	३२१४४	९४६९३	३३७९२	९४११८	१५
४६	२७१७२	९६२३८	२८८४७	९५७४९	३०५१४	९५२३१	३२१७१	९४६८४	३३८१९	९४१०८	१४
४७	२७२००	९६२३०	२८८७५	९५७४०	३०५४२	९५२२२	३२१९९	९४६७४	३३८४६	९४०९८	१३
४८	२७२२८	९६२२२	२८९०३	९५७३२	३०५७०	९५२१३	३२२२७	९४६६५	३३८७४	९४०८८	१२
४९	२७२५६	९६२१४	२८९३१	९५७२४	३०५९७	९५२०४	३२२५४	९४६५६	३३९०१	९४०७८	११
५०	२७२८४	९६२०६	२८९५९	९५७१५	३०६२५	९५१९५	३२२८२	९४६४६	३३९२९	९४०६८	१०
५१	२७३१२	९६१९८	२८९८७	९५७०७	३०६५३	९५१८६	३२३०९	९४६३७	३३९५६	९४०५८	९
५२	२७३४०	९६१९०	२९०१५	९५६९८	३०६८०	९५१७७	३२३३७	९४६२७	३३९८३	९४०४९	८
५३	२७३६८	९६१८२	२९०४२	९५६९०	३०७०८	९५१६८	३२३६४	९४६१८	३४०११	९४०३९	७
५४	२७३९६	९६१७४	२९०७०	९५६८१	३०७३६	९५१५९	३२३९२	९४६०९	३४०३८	९४०२९	६
५५	२७४२४	९६१६६	२९०९८	९५६७३	३०७६३	९५१५०	३२४१९	९४५९९	३४०६५	९४०१९	५
५६	२७४५२	९६१५८	२९१२६	९५६६४	३०७९१	९५१४२	३२४४७	९४५९०	३४०९३	९४००९	४
५७	२७४८०	९६१५०	२९१५४	९५६५६	३०८१९	९५१३३	३२४७४	९४५८०	३४१२०	९३९९९	३
५८	२७५०८	९६१४२	२९१८२	९५६४७	३०८४६	९५१२४	३२५०२	९४५७१	३४१४७	९३९८९	२
५९	२७५३६	९६१३४	२९२०९	९५६३९	३०८७४	९५११५	३२५२९	९४५६१	३४१७५	९३९७९	१
६०	२७५६४	९६१२६	२९२३७	९५६३०	३०९०२	९५१०६	३२५५७	९४५५२	३४२०२	९३९६९	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	७४ अंश		७३ अंश		७२ अंश		७१ अंश		७० अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	२० अंश		२१ अंश		२२ अंश		२३ अंश		२४ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	३४२०२	९३९६९	३५८३७	९३३५८	३७४६१	९२७१८	३९०७३	९२०५०	४०६७४	९१३५५	६०
१	३४२२९	९३९५९	३५८६४	९३३४८	३७४८८	९२७०७	३९१००	९२०३९	४०७००	९१३४३	५९
२	३४२५७	९३९४९	३५८९१	९३३३७	३७५१५	९२६९७	३९१२७	९२०२८	४०७२७	९१३३१	५८
३	३४२८४	९३९३९	३५९१८	९३३२७	३७५४२	९२६८६	३९१५३	९२०१६	४०७५३	९१३१९	५७
४	३४३११	९३९२९	३५९४५	९३३१६	३७५६९	९२६७५	३९१८०	९२००५	४०७८०	९१३०७	५६
५	३४३३९	९३९१९	३५९७३	९३३०६	३७५९५	९२६६४	३९२०७	९१९९४	४०८०६	९१२९५	५५
६	३४३६६	९३९०९	३६०००	९३२९५	३७६२२	९२६५३	३९२३४	९१९८२	४०८३३	९१२८३	५४
७	३४३९३	९३८९९	३६०२७	९३२८५	३७६४९	९२६४२	३९२६०	९१९७१	४०८६०	९१२७२	५३
८	३४४२१	९३८८९	३६०५४	९३२७४	३७६७६	९२६३१	३९२८७	९१९५९	४०८८६	९१२६०	५२
९	३४४४८	९३८७९	३६०८१	९३२६४	३७७०३	९२६२०	३९३१४	९१९४८	४०९१३	९१२४८	५१
१०	३४४७५	९३८६९	३६१०८	९३२५३	३७७३०	९२६०९	३९३४१	९१९३६	४०९३९	९१२३६	५०
११	३४५०३	९३८५९	३६१३५	९३२४३	३७७५७	९२५९८	३९३६७	९१९२५	४०९६६	९१२२४	४९
१२	३४५३०	९३८४९	३६१६२	९३२३२	३७७८४	९२५८७	३९३९४	९१९१४	४०९९२	९१२१२	४८
१३	३४५५७	९३८३९	३६१९०	९३२२२	३७८११	९२५७६	३९४२१	९१९०२	४१०१९	९१२००	४७
१४	३४५८४	९३८२९	३६२१७	९३२११	३७८३८	९२५६५	३९४४८	९१८९१	४१०४५	९११८८	४६
१५	३४६१२	९३८१९	३६२४४	९३२०१	३७८६५	९२५५४	३९४७४	९१८७९	४१०७२	९११७६	४५
१६	३४६३९	९३८०९	३६२७१	९३१९०	३७८९२	९२५४३	३९५०१	९१८६८	४१०९८	९११६४	४४
१७	३४६६६	९३७९९	३६२९८	९३१८०	३७९१९	९२५३२	३९५२८	९१८५६	४११२५	९११५२	४३
१८	३४६९४	९३७८९	३६३२५	९३१६९	३७९४६	९२५२१	३९५५५	९१८४५	४११५१	९११४०	४२
१९	३४७२१	९३७७९	३६३५२	९३१५९	३७९७३	९२५१०	३९५८१	९१८३३	४११७८	९११२८	४१
२०	३४७४८	९३७६९	३६३७९	९३१४८	३७९९९	९२४९९	३९६०८	९१८२२	४१२०४	९१११६	४०
२१	३४७७५	९३७५९	३६४०६	९३१३७	३८०२६	९२४८८	३९६३५	९१८१०	४१२३१	९११०४	३९
२२	३४८०३	९३७४८	३६४३४	९३१२७	३८०५३	९२४७७	३९६६१	९१७९९	४१२५७	९१०९२	३८
२३	३४८३०	९३७३८	३६४६१	९३११६	३८०८०	९२४६६	३९६८८	९१७८७	४१२८४	९१०८०	३७
२४	३४८५७	९३७२८	३६४८८	९३१०६	३८१०७	९२४५५	३९७१५	९१७७५	४१३१०	९१०६८	३६
२५	३४८८४	९३७१८	३६५१५	९३०९५	३८१३४	९२४४४	३९७४१	९१७६४	४१३३७	९१०५६	३५
२६	३४९१२	९३७०८	३६५४२	९३०८४	३८१६१	९२४३२	३९७६८	९१७५२	४१३६३	९१०४४	३४
२७	३४९३९	९३६९८	३६५६९	९३०७४	३८१८८	९२४२१	३९७९५	९१७४१	४१३९०	९१०३२	३३
२८	३४९६६	९३६८८	३६५९६	९३०६३	३८२१५	९२४१०	३९८२२	९१७२९	४१४१६	९१०२०	३२
२९	३४९९३	९३६७७	३६६२३	९३०५२	३८२४१	९२३९९	३९८४८	९१७१८	४१४४३	९१००८	३१
३०	३५०२१	९३६६७	३६६५०	९३०४२	३८२६८	९२३८८	३९८७५	९१७०६	४१४६९	९०९९६	३०
३१	३५०४८	९३६५७	३६६७७	९३०३१	३८२९५	९२३७७	३९९०२	९१६९४	४१४९६	९०९८४	२९
३२	३५०७५	९३६४७	३६७०४	९३०२०	३८३२२	९२३६६	३९९२८	९१६८३	४१५२२	९०९७२	२८
३३	३५१०२	९३६३७	३६७३१	९३०१०	३८३४९	९२३५५	३९९५५	९१६७१	४१५४९	९०९६०	२७
३४	३५१३०	९३६२६	३६७५८	९२९९९	३८३७६	९२३४३	३९९८२	९१६६०	४१५७५	९०९४८	२६
३५	३५१५७	९३६१६	३६७८५	९२९८८	३८४०३	९२३३२	४०००८	९१६४८	४१६०२	९०९३६	२५
३६	३५१८४	९३६०६	३६८१२	९२९७८	३८४३०	९२३२१	४००३५	९१६३६	४१६२८	९०९२४	२४
३७	३५२११	९३५९६	३६८३९	९२९६७	३८४५६	९२३१०	४००६२	९१६२५	४१६५५	९०९११	२३
३८	३५२३९	९३५८५	३६८६७	९२९५६	३८४८३	९२२९९	४००८८	९१६१३	४१६८१	९०८९९	२२
३९	३५२६६	९३५७५	३६८९४	९२९४५	३८५१०	९२२८७	४०११५	९१६०१	४१७०७	९०८८७	२१
४०	३५२९३	९३५६५	३६९२१	९२९३५	३८५३७	९२२७६	४०१४१	९१५९०	४१७३४	९०८७५	२०
४१	३५३२०	९३५५५	३६९४८	९२९२४	३८५६४	९२२६५	४०१६८	९१५७८	४१७६०	९०८६३	१९
४२	३५३४७	९३५४४	३६९७५	९२९१३	३८५९१	९२२५४	४०१९५	९१५६६	४१७८७	९०८५१	१८
४३	३५३७५	९३५३४	३७००२	९२९०२	३८६१७	९२२४३	४०२२१	९१५५५	४१८१३	९०८३९	१७
४४	३५४०२	९३५२४	३७०२९	९२८९२	३८६४४	९२२३१	४०२४८	९१५४३	४१८४०	९०८२६	१६
४५	३५४२९	९३५१४	३७०५६	९२८८१	३८६७१	९२२२०	४०२७५	९१५३१	४१८६६	९०८१४	१५
४६	३५४५६	९३५०३	३७०८३	९२८७०	३८६९८	९२२०९	४०३०१	९१५१९	४१८९२	९०८०२	१४
४७	३५४८४	९३४९३	३७११०	९२८५९	३८७२५	९२१९८	४०३२८	९१५०८	४१९१९	९०७९०	१३
४८	३५५११	९३४८३	३७१३७	९२८४९	३८७५२	९२१८६	४०३५५	९१४९६	४१९४५	९०७७८	१२
४९	३५५३८	९३४७२	३७१६४	९२८३८	३८७७८	९२१७५	४०३८१	९१४८४	४१९७२	९०७६६	११
५०	३५५६५	९३४६२	३७१९१	९२८२७	३८८०५	९२१६४	४०४०८	९१४७२	४१९९८	९०७५३	१०
५१	३५५९२	९३४५२	३७२१८	९२८१६	३८८३२	९२१५२	४०४३४	९१४६१	४२०२४	९०७४१	९
५२	३५६१९	९३४४१	३७२४५	९२८०५	३८८५९	९२१४१	४०४६१	९१४४९	४२०५१	९०७२९	८
५३	३५६४७	९३४३१	३७२७२	९२७९४	३८८८६	९२१३०	४०४८८	९१४३७	४२०७७	९०७१७	७
५४	३५६७४	९३४२०	३७२९९	९२७८४	३८९१२	९२११९	४०५१४	९१४२५	४२१०४	९०७०४	६
५५	३५७०१	९३४१०	३७३२६	९२७७३	३८९३९	९२१०७	४०५४१	९१४१४	४२१३०	९०६९२	५
५६	३५७२८	९३४००	३७३५३	९२७६२	३८९६६	९२०९६	४०५६७	९१४०२	४२१५६	९०६८०	४
५७	३५७५५	९३३८९	३७३८०	९२७५१	३८९९३	९२०८५	४०५९४	९१३९०	४२१८३	९०६६८	३
५८	३५७८२	९३३७९	३७४०७	९२७४०	३९०२०	९२०७३	४०६२१	९१३७८	४२२०९	९०६५५	२
५९	३५८१०	९३३६८	३७४३४	९२७२९	३९०४६	९२०६२	४०६४७	९१३६६	४२२३५	९०६४३	१
६०	३५८३७	९३३५८	३७४६१	९२७१८	३९०७३	९२०५०	४०६७४	९१३५५	४२२६२	९०६३१	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	६९ अंश		६८ अंश		६७ अंश		६६ अंश		६५ अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	२५ अंश		२६ अंश		२७ अंश		२८ अंश		२९ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	४२२६२	९०६३१	४३८३७	८९८७९	४५३९९	८९१०१	४६९४७	८८२९५	४८४८१	८७४६२	६०
१	४२२८८	९०६१८	४३८६३	८९८६७	४५४२५	८९०८७	४६९७३	८८२८१	४८५०६	८७४४८	५९
२	४२३१५	९०६०६	४३८८९	८९८५४	४५४५१	८९०७४	४६९९८	८८२६७	४८५३२	८७४३४	५८
३	४२३४१	९०५९४	४३९१६	८९८४१	४५४७७	८९०६१	४७०२४	८८२५४	४८५५७	८७४२०	५७
४	४२३६७	९०५८२	४३९४२	८९८२८	४५५०३	८९०४८	४७०५०	८८२४०	४८५८३	८७४०६	५६
५	४२३९४	९०५६९	४३९६८	८९८१६	४५५२९	८९०३५	४७०७६	८८२२६	४८६०८	८७३९१	५५
६	४२४२०	९०५५७	४३९९४	८९८०३	४५५५४	८९०२१	४७१०१	८८२१३	४८६३४	८७३७७	५४
७	४२४४६	९०५४५	४४०२०	८९७९०	४५५८०	८९००८	४७१२७	८८१९९	४८६५९	८७३६३	५३
८	४२४७३	९०५३२	४४०४६	८९७७७	४५६०६	८८९९५	४७१५३	८८१८५	४८६८४	८७३४९	५२
९	४२४९९	९०५२०	४४०७२	८९७६४	४५६३२	८८९८१	४७१७८	८८१७२	४८७१०	८७३३५	५१
१०	४२५२५	९०५०७	४४०९८	८९७५२	४५६५८	८८९६८	४७२०४	८८१५८	४८७३५	८७३२१	५०
११	४२५५२	९०४९५	४४१२४	८९७३९	४५६८४	८८९५५	४७२२९	८८१४४	४८७६१	८७३०६	४९
१२	४२५७८	९०४८३	४४१५१	८९७२६	४५७१०	८८९४२	४७२५५	८८१३०	४८७८६	८७२९२	४८
१३	४२६०४	९०४७०	४४१७७	८९७१३	४५७३६	८८९२८	४७२८१	८८११७	४८८११	८७२७८	४७
१४	४२६३१	९०४५८	४४२०३	८९७००	४५७६२	८८९१५	४७३०६	८८१०३	४८८३७	८७२६४	४६
१५	४२६५७	९०४४६	४४२२९	८९६८७	४५७८७	८८९०२	४७३३२	८८०८९	४८८६२	८७२५०	४५
१६	४२६८३	९०४३३	४४२५५	८९६७४	४५८१३	८८८८८	४७३५८	८८०७५	४८८८८	८७२३५	४४
१७	४२७०९	९०४२१	४४२८१	८९६६२	४५८३९	८८८७५	४७३८३	८८०६२	४८९१३	८७२२१	४३
१८	४२७३६	९०४०८	४४३०७	८९६४९	४५८६५	८८८६२	४७४०९	८८०४८	४८९३८	८७२०७	४२
१९	४२७६२	९०३९६	४४३३३	८९६३६	४५८९१	८८८४८	४७४३४	८८०३४	४८९६४	८७१९३	४१
२०	४२७८८	९०३८३	४४३५९	८९६२३	४५९१७	८८८३५	४७४६०	८८०२०	४८९८९	८७१७८	४०
२१	४२८१५	९०३७१	४४३८५	८९६१०	४५९४२	८८८२२	४७४८६	८८००६	४९०१४	८७१६४	३९
२२	४२८४१	९०३५८	४४४११	८९५९७	४५९६८	८८८०८	४७५११	८७९९३	४९०४०	८७१५०	३८
२३	४२८६७	९०३४६	४४४३७	८९५८४	४५९९४	८८७९५	४७५३७	८७९७९	४९०६५	८७१३६	३७
२४	४२८९४	९०३३४	४४४६४	८९५७१	४६०२०	८८७८२	४७५६२	८७९६५	४९०९०	८७१२१	३६
२५	४२९२०	९०३२१	४४४९०	८९५५८	४६०४६	८८७६८	४७५८८	८७९५१	४९११६	८७१०७	३५
२६	४२९४६	९०३०९	४४५१६	८९५४५	४६०७२	८८७५५	४७६१४	८७९३७	४९१४१	८७०९३	३४
२७	४२९७२	९०२९६	४४५४२	८९५३२	४६०९७	८८७४१	४७६३९	८७९२३	४९१६६	८७०७९	३३
२८	४२९९९	९०२८४	४४५६८	८९५१९	४६१२३	८८७२८	४७६६५	८७९०९	४९१९२	८७०६४	३२
२९	४३०२५	९०२७१	४४५९४	८९५०६	४६१४९	८८७१५	४७६९०	८७८९६	४९२१७	८७०५०	३१
३०	४३०५१	९०२५९	४४६२०	८९४९३	४६१७५	८८७०१	४७७१६	८७८८२	४९२४२	८७०३६	३०
३१	४३०७७	९०२४६	४४६४६	८९४८०	४६२०१	८८६८८	४७७४१	८७८६८	४९२६८	८७०२१	२९
३२	४३१०४	९०२३३	४४६७२	८९४६७	४६२२६	८८६७४	४७७६७	८७८५४	४९२९३	८७००७	२८
३३	४३१३०	९०२२१	४४६९८	८९४५४	४६२५२	८८६६१	४७७९३	८७८४०	४९३१८	८६९९३	२७
३४	४३१५६	९०२०८	४४७२४	८९४४१	४६२७८	८८६४७	४७८१८	८७८२६	४९३४४	८६९७८	२६
३५	४३१८२	९०१९६	४४७५०	८९४२८	४६३०४	८८६३४	४७८४४	८७८१२	४९३६९	८६९६४	२५
३६	४३२०९	९०१८३	४४७७६	८९४१५	४६३३०	८८६२०	४७८६९	८७७९८	४९३९४	८६९५०	२४
३७	४३२३५	९०१७१	४४८०२	८९४०२	४६३५५	८८६०७	४७८९५	८७७८४	४९४१९	८६९३५	२३
३८	४३२६१	९०१५८	४४८२८	८९३८९	४६३८१	८८५९३	४७९२०	८७७७०	४९४४५	८६९२१	२२
३९	४३२८७	९०१४६	४४८५४	८९३७६	४६४०७	८८५८०	४७९४६	८७७५६	४९४७०	८६९०६	२१
४०	४३३१३	९०१३३	४४८८०	८९३६३	४६४३३	८८५६६	४७९७१	८७७४३	४९४९५	८६८९२	२०
४१	४३३४०	९०१२०	४४९०६	८९३५०	४६४५८	८८५५३	४७९९७	८७७२९	४९५२१	८६८७८	१९
४२	४३३६६	९०१०८	४४९३२	८९३३७	४६४८४	८८५३९	४८०२२	८७७१५	४९५४६	८६८६३	१८
४३	४३३९२	९००९५	४४९५८	८९३२४	४६५१०	८८५२६	४८०४८	८७७०१	४९५७१	८६८४९	१७
४४	४३४१८	९००८२	४४९८४	८९३११	४६५३६	८८५१२	४८०७३	८७६८७	४९५९६	८६८३४	१६
४५	४३४४५	९००७०	४५०१०	८९२९८	४६५६१	८८४९९	४८०९९	८७६७३	४९६२२	८६८२०	१५
४६	४३४७१	९००५७	४५०३६	८९२८५	४६५८७	८८४८५	४८१२४	८७६५९	४९६४७	८६८०५	१४
४७	४३४९७	९००४५	४५०६२	८९२७२	४६६१३	८८४७२	४८१५०	८७६४५	४९६७२	८६७९१	१३
४८	४३५२३	९००३२	४५०८८	८९२५९	४६६३९	८८४५८	४८१७५	८७६३१	४९६९७	८६७७७	१२
४९	४३५४९	९००१९	४५११४	८९२४५	४६६६४	८८४४५	४८२०१	८७६१७	४९७२३	८६७६२	११
५०	४३५७५	९०००७	४५१४०	८९२३२	४६६९०	८८४३१	४८२२६	८७६०३	४९७४८	८६७४८	१०
५१	४३६०२	८९९९४	४५१६६	८९२१९	४६७१६	८८४१७	४८२५२	८७५८९	४९७७३	८६७३३	९
५२	४३६२८	८९९८१	४५१९२	८९२०६	४६७४२	८८४०४	४८२७७	८७५७५	४९७९८	८६७१९	८
५३	४३६५४	८९९६८	४५२१८	८९१९३	४६७६७	८८३९०	४८३०३	८७५६१	४९८२४	८६७०४	७
५४	४३६८०	८९९५६	४५२४३	८९१८०	४६७९३	८८३७७	४८३२८	८७५४६	४९८४९	८६६९०	६
५५	४३७०६	८९९४३	४५२६९	८९१६७	४६८१९	८८३६३	४८३५४	८७५३२	४९८७४	८६६७५	५
५६	४३७३३	८९९३०	४५२९५	८९१५३	४६८४४	८८३४९	४८३७९	८७५१८	४९८९९	८६६६१	४
५७	४३७५९	८९९१८	४५३२१	८९१४०	४६८७०	८८३३६	४८४०५	८७५०४	४९९२४	८६६४६	३
५८	४३७८५	८९९०५	४५३४७	८९१२७	४६८९६	८८३२२	४८४३०	८७४९०	४९९५०	८६६३२	२
५९	४३८११	८९८९२	४५३७३	८९११४	४६९२१	८८३०८	४८४५६	८७४७६	४९९७५	८६६१७	१
६०	४३८३७	८९८७९	४५३९९	८९१०१	४६९४७	८८२९५	४८४८१	८७४६२	५००००	८६६०३	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·को·भु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	६४ अंश		६३ अंश		६२ अंश		६१ अंश		६० अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	३० अंश		३१ अंश		३२ अंश		३३ अंश		३४ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	५००००	८६६०३	५१५०४	८५७१७	५२९९२	८४८०५	५४४६४	८३८६७	५५९१९	८२९०४	६०
१	५००२५	८६५८८	५१५२९	८५७०२	५३०१७	८४७८९	५४४८८	८३८५१	५५९४३	८२८८७	५९
२	५००५०	८६५७३	५१५५४	८५६८७	५३०४१	८४७७४	५४५१३	८३८३५	५५९६८	८२८७१	५८
३	५००७६	८६५५९	५१५७९	८५६७२	५३०६६	८४७५९	५४५३७	८३८१९	५५९९२	८२८५५	५७
४	५०१०१	८६५४४	५१६०४	८५६५७	५३०९१	८४७४३	५४५६१	८३८०४	५६०१६	८२८३९	५६
५	५०१२६	८६५३०	५१६२८	८५६४२	५३११५	८४७२८	५४५८६	८३७८८	५६०४०	८२८२२	५५
६	५०१५१	८६५१५	५१६५३	८५६२७	५३१४०	८४७१२	५४६१०	८३७७२	५६०६४	८२८०६	५४
७	५०१७६	८६५०१	५१६७८	८५६१२	५३१६४	८४६९७	५४६३५	८३७५६	५६०८८	८२७९०	५३
८	५०२०१	८६४८६	५१७०३	८५५९७	५३१८९	८४६८१	५४६५९	८३७४०	५६११२	८२७७३	५२
९	५०२२७	८६४७१	५१७२८	८५५८२	५३२१४	८४६६६	५४६८३	८३७२४	५६१३६	८२७५७	५१
१०	५०२५२	८६४५७	५१७५३	८५५६७	५३२३८	८४६५०	५४७०८	८३७०८	५६१६०	८२७४१	५०
११	५०२७७	८६४४२	५१७७८	८५५५१	५३२६३	८४६३५	५४७३२	८३६९२	५६१८४	८२७२४	४९
१२	५०३०२	८६४२७	५१८०३	८५५३६	५३२८८	८४६१९	५४७५६	८३६७६	५६२०८	८२७०८	४८
१३	५०३२७	८६४१३	५१८२८	८५५२१	५३३१२	८४६०४	५४७८१	८३६६०	५६२३२	८२६९२	४७
१४	५०३५२	८६३९८	५१८५२	८५५०६	५३३३७	८४५८८	५४८०५	८३६४५	५६२५६	८२६७५	४६
१५	५०३७७	८६३८४	५१८७७	८५४९१	५३३६१	८४५७३	५४८२९	८३६२९	५६२८०	८२६५९	४५
१६	५०४०३	८६३६९	५१९०२	८५४७६	५३३८६	८४५५७	५४८५४	८३६१३	५६३०५	८२६४३	४४
१७	५०४२८	८६३५४	५१९२७	८५४६१	५३४११	८४५४२	५४८७८	८३५९७	५६३२९	८२६२६	४३
१८	५०४५३	८६३४०	५१९५२	८५४४६	५३४३५	८४५२६	५४९०२	८३५८१	५६३५३	८२६१०	४२
१९	५०४७८	८६३२५	५१९७७	८५४३१	५३४६०	८४५११	५४९२७	८३५६५	५६३७७	८२५९३	४१
२०	५०५०३	८६३१०	५२००२	८५४१६	५३४८४	८४४९५	५४९५१	८३५४९	५६४०१	८२५७७	४०
२१	५०५२८	८६२९५	५२०२६	८५४०१	५३५०९	८४४८०	५४९७५	८३५३३	५६४२५	८२५६१	३९
२२	५०५५३	८६२८१	५२०५१	८५३८५	५३५३४	८४४६४	५४९९९	८३५१७	५६४४९	८२५४४	३८
२३	५०५७८	८६२६६	५२०७६	८५३७०	५३५५८	८४४४८	५५०२४	८३५०१	५६४७३	८२५२८	३७
२४	५०६०३	८६२५१	५२१०१	८५३५५	५३५८३	८४४३३	५५०४८	८३४८५	५६४९७	८२५११	३६
२५	५०६२८	८६२३७	५२१२६	८५३४०	५३६०७	८४४१७	५५०७२	८३४६९	५६५२१	८२४९५	३५
२६	५०६५४	८६२२२	५२१५१	८५३२५	५३६३२	८४४०२	५५०९७	८३४५३	५६५४५	८२४७८	३४
२७	५०६७९	८६२०७	५२१७५	८५३१०	५३६५६	८४३८६	५५१२१	८३४३७	५६५६९	८२४६२	३३
२८	५०७०४	८६१९२	५२२००	८५२९४	५३६८१	८४३७०	५५१४५	८३४२१	५६५९३	८२४४६	३२
२९	५०७२९	८६१७८	५२२२५	८५२७९	५३७०५	८४३५५	५५१६९	८३४०५	५६६१७	८२४२९	३१
३०	५०७५४	८६१६३	५२२५०	८५२६४	५३७३०	८४३३९	५५१९४	८३३८९	५६६४१	८२४१३	३०
३१	५०७७९	८६१४८	५२२७५	८५२४९	५३७५४	८४३२४	५५२१८	८३३७३	५६६६५	८२३९६	२९
३२	५०८०४	८६१३३	५२२९९	८५२३४	५३७७९	८४३०८	५५२४२	८३३५६	५६६८९	८२३८०	२८
३३	५०८२९	८६११९	५२३२४	८५२१८	५३८०४	८४२९२	५५२६६	८३३४०	५६७१३	८२३६३	२७
३४	५०८५४	८६१०४	५२३४९	८५२०३	५३८२८	८४२७७	५५२९१	८३३२४	५६७३६	८२३४७	२६
३५	५०८७९	८६०८९	५२३७४	८५१८८	५३८५३	८४२६१	५५३१५	८३३०८	५६७६०	८२३३०	२५
३६	५०९०४	८६०७४	५२३९९	८५१७३	५३८७७	८४२४५	५५३३९	८३२९२	५६७८४	८२३१४	२४
३७	५०९२९	८६०५९	५२४२३	८५१५७	५३९०२	८४२३०	५५३६३	८३२७६	५६८०८	८२२९७	२३
३८	५०९५४	८६०४५	५२४४८	८५१४२	५३९२६	८४२१४	५५३८८	८३२६०	५६८३२	८२२८१	२२
३९	५०९७९	८६०३०	५२४७३	८५१२७	५३९५१	८४१९८	५५४१२	८३२४४	५६८५६	८२२६४	२१
४०	५१००४	८६०१५	५२४९८	८५११२	५३९७५	८४१८२	५५४३६	८३२२८	५६८८०	८२२४८	२०
४१	५१०२९	८६०००	५२५२२	८५०९६	५४०००	८४१६७	५५४६०	८३२१२	५६९०४	८२२३१	१९
४२	५१०५४	८५९८५	५२५४७	८५०८१	५४०२४	८४१५१	५५४८४	८३१९५	५६९२८	८२२१४	१८
४३	५१०७९	८५९७०	५२५७२	८५०६६	५४०४९	८४१३५	५५५०९	८३१७९	५६९५२	८२१९८	१७
४४	५११०४	८५९५६	५२५९७	८५०५१	५४०७३	८४१२०	५५५३३	८३१६३	५६९७६	८२१८१	१६
४५	५११२९	८५९४१	५२६२१	८५०३५	५४०९७	८४१०४	५५५५७	८३१४७	५७०००	८२१६५	१५
४६	५११५४	८५९२६	५२६४६	८५०२०	५४१२२	८४०८८	५५५८१	८३१३१	५७०२४	८२१४८	१४
४७	५११७९	८५९११	५२६७१	८५००५	५४१४६	८४०७२	५५६०५	८३११५	५७०४७	८२१३२	१३
४८	५१२०४	८५८९६	५२६९६	८४९८९	५४१७१	८४०५७	५५६३०	८३०९८	५७०७१	८२११५	१२
४९	५१२२९	८५८८१	५२७२०	८४९७४	५४१९५	८४०४१	५५६५४	८३०८२	५७०९५	८२०९८	११
५०	५१२५४	८५८६६	५२७४५	८४९५९	५४२२०	८४०२५	५५६७८	८३०६६	५७११९	८२०८२	१०
५१	५१२७९	८५८५१	५२७७०	८४९४३	५४२४४	८४००९	५५७०२	८३०५०	५७१४३	८२०६५	९
५२	५१३०४	८५८३६	५२७९४	८४९२८	५४२६९	८३९९४	५५७२६	८३०३४	५७१६७	८२०४८	८
५३	५१३२९	८५८२१	५२८१९	८४९१३	५४२९३	८३९७८	५५७५०	८३०१७	५७१९१	८२०३२	७
५४	५१३५४	८५८०६	५२८४४	८४८९७	५४३१७	८३९६२	५५७७५	८३००१	५७२१५	८२०१५	६
५५	५१३७९	८५७९२	५२८६९	८४८८२	५४३४२	८३९४६	५५७९९	८२९८५	५७२३८	८१९९९	५
५६	५१४०४	८५७७७	५२८९३	८४८६६	५४३६६	८३९३०	५५८२३	८२९६९	५७२६२	८१९८२	४
५७	५१४२९	८५७६२	५२९१८	८४८५१	५४३९१	८३९१५	५५८४७	८२९५३	५७२८६	८१९६५	३
५८	५१४५४	८५७४७	५२९४३	८४८३६	५४४१५	८३८९९	५५८७१	८२९३६	५७३१०	८१९४९	२
५९	५१४७९	८५७३२	५२९६७	८४८२०	५४४४०	८३८८३	५५८९५	८२९२०	५७३३४	८१९३२	१
६०	५१५०४	८५७१७	५२९९२	८४८०५	५४४६४	८३८६७	५५९१९	८२९०४	५७३५८	८१९१५	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	५९ अंश		५८ अंश		५७ अंश		५६ अंश		५५ अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	३५ अंश		३६ अंश		३७ अंश		३८ अंश		३९ अंश		
क·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	
०	५७३५८	८१९१५	५८७७९	८०९०२	६०१८२	७९८६४	६१५६६	७८८०१	६२९३२	७७७१५	६०
१	५७३८१	८१८९९	५८८०२	८०८८५	६०२०५	७९८४६	६१५८९	७८७८३	६२९५५	७७६९६	५९
२	५७४०५	८१८८२	५८८२६	८०८६७	६०२२८	७९८२९	६१६१२	७८७६५	६२९७७	७७६७८	५८
३	५७४२९	८१८६५	५८८४९	८०८५०	६०२५१	७९८११	६१६३५	७८७४७	६३०००	७७६६०	५७
४	५७४५३	८१८४८	५८८७३	८०८३३	६०२७४	७९७९३	६१६५८	७८७२९	६३०२२	७७६४१	५६
५	५७४७७	८१८३२	५८८९६	८०८१६	६०२९८	७९७७६	६१६८१	७८७११	६३०४५	७७६२३	५५
६	५७५०१	८१८१५	५८९२०	८०७९९	६०३२१	७९७५८	६१७०४	७८६९३	६३०६८	७७६०५	५४
७	५७५२४	८१७९८	५८९४३	८०७८२	६०३४४	७९७४१	६१७२६	७८६७६	६३०९०	७७५८६	५३
८	५७५४८	८१७८२	५८९६७	८०७६५	६०३६७	७९७२३	६१७४९	७८६५८	६३११३	७७५६८	५२
९	५७५७२	८१७६५	५८९९०	८०७४८	६०३९०	७९७०६	६१७७२	७८६४०	६३१३५	७७५५०	५१
१०	५७५९६	८१७४८	५९०१४	८०७३०	६०४१४	७९६८८	६१७९५	७८६२२	६३१५८	७७५३१	५०
११	५७६१९	८१७३१	५९०३७	८०७१३	६०४३७	७९६७१	६१८१८	७८६०४	६३१८०	७७५१३	४९
१२	५७६४३	८१७१४	५९०६१	८०६९६	६०४६०	७९६५३	६१८४१	७८५८६	६३२०३	७७४९४	४८
१३	५७६६७	८१६९८	५९०८४	८०६७९	६०४८३	७९६३५	६१८६४	७८५६८	६३२२५	७७४७६	४७
१४	५७६९१	८१६८१	५९१०८	८०६६२	६०५०६	७९६१८	६१८८७	७८५५०	६३२४८	७७४५८	४६
१५	५७७१५	८१६६४	५९१३१	८०६४४	६०५२९	७९६००	६१९०९	७८५३२	६३२७१	७७४३९	४५
१६	५७७३८	८१६४७	५९१५४	८०६२७	६०५५३	७९५८३	६१९३२	७८५१४	६३२९३	७७४२१	४४
१७	५७७६२	८१६३१	५९१७८	८०६१०	६०५७६	७९५६५	६१९५५	७८४९६	६३३१६	७७४०२	४३
१८	५७७८६	८१६१४	५९२०१	८०५९३	६०५९९	७९५४७	६१९७८	७८४७८	६३३३८	७७३८४	४२
१९	५७८१०	८१५९७	५९२२५	८०५७६	६०६२२	७९५३०	६२००१	७८४६०	६३३६१	७७३६६	४१
२०	५७८३३	८१५८०	५९२४८	८०५५८	६०६४५	७९५१२	६२०२४	७८४४२	६३३८३	७७३४७	४०
२१	५७८५७	८१५६३	५९२७२	८०५४१	६०६६८	७९४९४	६२०४६	७८४२४	६३४०६	७७३२९	३९
२२	५७८८१	८१५४६	५९२९५	८०५२४	६०६९१	७९४७७	६२०६९	७८४०५	६३४२८	७७३१०	३८
२३	५७९०४	८१५३०	५९३१८	८०५०७	६०७१४	७९४५९	६२०९२	७८३८७	६३४५१	७७२९२	३७
२४	५७९२८	८१५१३	५९३४२	८०४८९	६०७३८	७९४४१	६२११५	७८३६९	६३४७३	७७२७३	३६
२५	५७९५२	८१४९६	५९३६५	८०४७२	६०७६१	७९४२४	६२१३८	७८३५१	६३४९६	७७२५५	३५
२६	५७९७६	८१४७९	५९३८९	८०४५५	६०७८४	७९४०६	६२१६०	७८३३३	६३५१८	७७२३६	३४
२७	५७९९९	८१४६२	५९४१२	८०४३८	६०८०७	७९३८८	६२१८३	७८३१५	६३५४०	७७२१८	३३
२८	५८०२३	८१४४५	५९४३६	८०४२०	६०८३०	७९३७१	६२२०६	७८२९७	६३५६३	७७१९९	३२
२९	५८०४७	८१४२८	५९४५९	८०४०३	६०८५३	७९३५३	६२२२९	७८२७९	६३५८५	७७१८१	३१
३०	५८०७०	८१४१२	५९४८२	८०३८६	६०८७६	७९३३५	६२२५१	७८२६१	६३६०८	७७१६२	३०
३१	५८०९४	८१३९५	५९५०६	८०३६८	६०८९९	७९३१८	६२२७४	७८२४३	६३६३०	७७१४४	२९
३२	५८११८	८१३७८	५९५२९	८०३५१	६०९२२	७९३००	६२२९७	७८२२५	६३६५३	७७१२५	२८
३३	५८१४१	८१३६१	५९५५२	८०३३४	६०९४५	७९२८२	६२३२०	७८२०६	६३६७५	७७१०७	२७
३४	५८१६५	८१३४४	५९५७६	८०३१६	६०९६८	७९२६४	६२३४२	७८१८८	६३६९८	७७०८८	२६
३५	५८१८९	८१३२७	५९५९९	८०२९९	६०९९१	७९२४७	६२३६५	७८१७०	६३७२०	७७०७०	२५
३६	५८२१२	८१३१०	५९६२२	८०२८२	६१०१५	७९२२९	६२३८८	७८१५२	६३७४२	७७०५१	२४
३७	५८२३६	८१२९३	५९६४६	८०२६४	६१०३८	७९२११	६२४११	७८१३४	६३७६५	७७०३३	२३
३८	५८२६०	८१२७६	५९६६९	८०२४७	६१०६१	७९१९३	६२४३३	७८११६	६३७८७	७७०१४	२२
३९	५८२८३	८१२५९	५९६९३	८०२३०	६१०८४	७९१७६	६२४५६	७८०९८	६३८१०	७६९९६	२१
४०	५८३०७	८१२४२	५९७१६	८०२१२	६११०७	७९१५८	६२४७९	७८०७९	६३८३२	७६९७७	२०
४१	५८३३०	८१२२५	५९७३९	८०१९५	६११३०	७९१४०	६२५०२	७८०६१	६३८५४	७६९५९	१९
४२	५८३५४	८१२०८	५९७६२	८०१७८	६११५३	७९१२२	६२५२४	७८०४३	६३८७७	७६९४०	१८
४३	५८३७८	८११९१	५९७८६	८०१६०	६११७६	७९१०५	६२५४७	७८०२५	६३८९९	७६९२१	१७
४४	५८४०१	८११७४	५९८०९	८०१४३	६११९९	७९०८७	६२५७०	७८००७	६३९२२	७६९०३	१६
४५	५८४२५	८११५७	५९८३२	८०१२५	६१२२२	७९०६९	६२५९२	७७९८८	६३९४४	७६८८४	१५
४६	५८४४९	८११४०	५९८५६	८०१०८	६१२४५	७९०५१	६२६१५	७७९७०	६३९६६	७६८६६	१४
४७	५८४७२	८११२३	५९८७९	८००९१	६१२६८	७९०३३	६२६३८	७७९५२	६३९८९	७६८४७	१३
४८	५८४९६	८११०६	५९९०२	८००७३	६१२९१	७९०१६	६२६६०	७७९३४	६४०११	७६८२८	१२
४९	५८५१९	८१०८९	५९९२६	८००५६	६१३१४	७८९९८	६२६८३	७७९१६	६४०३३	७६८१०	११
५०	५८५४३	८१०७२	५९९४९	८००३८	६१३३७	७८९८०	६२७०६	७७८९७	६४०५६	७६७९१	१०
५१	५८५६७	८१०५५	५९९७२	८००२१	६१३६०	७८९६२	६२७२८	७७८७९	६४०७८	७६७७२	९
५२	५८५९०	८१०३८	५९९९५	८०००३	६१३८३	७८९४४	६२७५१	७७८६१	६४१००	७६७५४	८
५३	५८६१४	८१०२१	६००१९	७९९८६	६१४०६	७८९२६	६२७७४	७७८४३	६४१२३	७६७३५	७
५४	५८६३७	८१००४	६००४२	७९९६८	६१४२९	७८९०८	६२७९६	७७८२४	६४१४५	७६७१७	६
५५	५८६६१	८०९८७	६००६५	७९९५१	६१४५१	७८८९१	६२८१९	७७८०६	६४१६७	७६६९८	५
५६	५८६८४	८०९७०	६००८९	७९९३४	६१४७४	७८८७३	६२८४२	७७७८८	६४१९०	७६६७९	४
५७	५८७०८	८०९५३	६०११२	७९९१६	६१४९७	७८८५५	६२८६४	७७७६९	६४२१२	७६६६१	३
५८	५८७३१	८०९३६	६०१३५	७९८९९	६१५२०	७८८३७	६२८८७	७७७५१	६४२३४	७६६४२	२
५९	५८७५५	८०९१९	६०१५८	७९८८१	६१५४३	७८८१९	६२९०९	७७७३३	६४२५६	७६६२३	१
६०	५८७७९	८०९०२	६०१८२	७९८६४	६१५६६	७८८०१	६२९३२	७७७१५	६४२७९	७६६०४	०
	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	स्वा·कोभु·	स्वा·भु·	क·
	५४ अंश		५३ अंश		५२ अंश		५१ अंश		५० अंश		

तिसरे कोष्टक

स्वाभाविक भुजज्या

	४० अंश		४१ अंश		४२ अंश		४३ अंश		४४ अंश		
क.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	
०	६४२७९	७६६०४	६५६०६	७५४७१	६६९१३	७४३१४	६८२००	७३१३५	६९४६६	७१९३४	६०
१	६४३०१	७६५८६	६५६२८	७५४५२	६६९३५	७४२९५	६८२२१	७३११६	६९४८७	७१९१४	५९
२	६४३२३	७६५६७	६५६५०	७५४३३	६६९५६	७४२७६	६८२४२	७३०९६	६९५०८	७१८९४	५८
३	६४३४६	७६५४८	६५६७२	७५४१४	६६९७८	७४२५६	६८२६४	७३०७६	६९५२९	७१८७३	५७
४	६४३६८	७६५३०	६५६९४	७५३९५	६६९९९	७४२३७	६८२८५	७३०५६	६९५४९	७१८५३	५६
५	६४३९०	७६५११	६५७१६	७५३७५	६७०२१	७४२१७	६८३०६	७३०३६	६९५७०	७१८३३	५५
६	६४४१२	७६४९२	६५७३८	७५३५६	६७०४३	७४१९८	६८३२७	७३०१६	६९५९१	७१८१३	५४
७	६४४३५	७६४७३	६५७५९	७५३३७	६७०६४	७४१७८	६८३४९	७२९९६	६९६१२	७१७९२	५३
८	६४४५७	७६४५५	६५७८१	७५३१८	६७०८६	७४१५९	६८३७०	७२९७६	६९६३३	७१७७२	५२
९	६४४७९	७६४३६	६५८०३	७५२९९	६७१०७	७४१३९	६८३९१	७२९५७	६९६५४	७१७५२	५१
१०	६४५०१	७६४१७	६५८२५	७५२८०	६७१२९	७४१२०	६८४१२	७२९३७	६९६७५	७१७३२	५०
११	६४५२४	७६३९८	६५८४७	७५२६१	६७१५१	७४१००	६८४३४	७२९१७	६९६९६	७१७११	४९
१२	६४५४६	७६३८०	६५८६९	७५२४१	६७१७२	७४०८०	६८४५५	७२८९७	६९७१७	७१६९१	४८
१३	६४५६८	७६३६१	६५८९१	७५२२२	६७१९४	७४०६१	६८४७६	७२८७७	६९७३७	७१६७१	४७
१४	६४५९०	७६३४२	६५९१३	७५२०३	६७२१५	७४०४१	६८४९७	७२८५७	६९७५८	७१६५०	४६
१५	६४६१२	७६३२३	६५९३५	७५१८४	६७२३७	७४०२२	६८५१८	७२८३७	६९७७९	७१६३०	४५
१६	६४६३५	७६३०४	६५९५६	७५१६५	६७२५८	७४००२	६८५३९	७२८१७	६९८००	७१६१०	४४
१७	६४६५७	७६२८६	६५९७८	७५१४६	६७२८०	७३९८३	६८५६१	७२७९७	६९८२१	७१५९०	४३
१८	६४६७९	७६२६७	६६०००	७५१२६	६७३०१	७३९६३	६८५८२	७२७७७	६९८४२	७१५६९	४२
१९	६४७०१	७६२४८	६६०२२	७५१०७	६७३२३	७३९४४	६८६०३	७२७५७	६९८६२	७१५४९	४१
२०	६४७२३	७६२२९	६६०४४	७५०८८	६७३४४	७३९२४	६८६२४	७२७३७	६९८८३	७१५२९	४०
२१	६४७४६	७६२१०	६६०६६	७५०६९	६७३६६	७३९०४	६८६४५	७२७१७	६९९०४	७१५०८	३९
२२	६४७६८	७६१९२	६६०८८	७५०५०	६७३८७	७३८८५	६८६६६	७२६९७	६९९२५	७१४८८	३८
२३	६४७९०	७६१७३	६६१०९	७५०३०	६७४०९	७३८६५	६८६८८	७२६७७	६९९४६	७१४६८	३७
२४	६४८१२	७६१५४	६६१३१	७५०११	६७४३०	७३८४६	६८७०९	७२६५७	६९९६६	७१४४७	३६
२५	६४८३४	७६१३५	६६१५३	७४९९२	६७४५२	७३८२६	६८७३०	७२६३७	६९९८७	७१४२७	३५
२६	६४८५६	७६११६	६६१७५	७४९७३	६७४७३	७३८०६	६८७५१	७२६१७	७०००८	७१४०७	३४
२७	६४८७८	७६०९७	६६१९७	७४९५३	६७४९५	७३७८७	६८७७२	७२५९७	७००२९	७१३८६	३३
२८	६४९०१	७६०७८	६६२१८	७४९३४	६७५१६	७३७६७	६८७९३	७२५७७	७००४९	७१३६६	३२
२९	६४९२३	७६०५९	६६२४०	७४९१५	६७५३८	७३७४७	६८८१४	७२५५७	७००७०	७१३४५	३१
३०	६४९४५	७६०४१	६६२६२	७४८९६	६७५५९	७३७२८	६८८३५	७२५३७	७००९१	७१३२५	३०
३१	६४९६७	७६०२२	६६२८४	७४८७६	६७५८०	७३७०८	६८८५७	७२५१७	७०११२	७१३०५	२९
३२	६४९८९	७६००३	६६३०६	७४८५७	६७६०२	७३६८८	६८८७८	७२४९७	७०१३२	७१२८४	२८
३३	६५०११	७५९८४	६६३२७	७४८३८	६७६२३	७३६६९	६८८९९	७२४७७	७०१५३	७१२६४	२७
३४	६५०३३	७५९६५	६६३४९	७४८१८	६७६४५	७३६४९	६८९२०	७२४५७	७०१७४	७१२४३	२६
३५	६५०५५	७५९४६	६६३७१	७४७९९	६७६६६	७३६२९	६८९४१	७२४३७	७०१९५	७१२२३	२५
३६	६५०७७	७५९२७	६६३९३	७४७८०	६७६८८	७३६१०	६८९६२	७२४१७	७०२१५	७१२०३	२४
३७	६५१००	७५९०८	६६४१४	७४७६०	६७७०९	७३५९०	६८९८३	७२३९७	७०२३६	७११८२	२३
३८	६५१२२	७५८८९	६६४३६	७४७४१	६७७३०	७३५७०	६९००४	७२३७७	७०२५७	७११६२	२२
३९	६५१४४	७५८७०	६६४५८	७४७२२	६७७५२	७३५५१	६९०२५	७२३५७	७०२७७	७११४१	२१
४०	६५१६६	७५८५१	६६४८०	७४७०३	६७७७३	७३५३१	६९०४६	७२३३७	७०२९८	७११२१	२०
४१	६५१८८	७५८३२	६६५०१	७४६८३	६७७९५	७३५११	६९०६७	७२३१७	७०३१९	७११००	१९
४२	६५२१०	७५८१३	६६५२३	७४६६४	६७८१६	७३४९१	६९०८८	७२२९७	७०३३९	७१०८०	१८
४३	६५२३२	७५७९४	६६५४५	७४६४४	६७८३७	७३४७२	६९१०९	७२२७७	७०३६०	७१०५९	१७
४४	६५२५४	७५७७५	६६५६६	७४६२५	६७८५९	७३४५२	६९१३०	७२२५७	७०३८१	७१०३९	१६
४५	६५२७६	७५७५६	६६५८८	७४६०६	६७८८०	७३४३२	६९१५१	७२२३६	७०४०१	७१०१९	१५
४६	६५२९८	७५७३८	६६६१०	७४५८६	६७९०१	७३४१३	६९१७२	७२२१६	७०४२२	७०९९८	१४
४७	६५३२०	७५७१९	६६६३२	७४५६७	६७९२३	७३३९३	६९१९३	७२१९६	७०४४३	७०९७८	१३
४८	६५३४२	७५७००	६६६५३	७४५४८	६७९४४	७३३७३	६९२१४	७२१७६	७०४६३	७०९५७	१२
४९	६५३६४	७५६८०	६६६७५	७४५२८	६७९६५	७३३५३	६९२३५	७२१५६	७०४८४	७०९३७	११
५०	६५३८६	७५६६१	६६६९७	७४५०९	६७९८७	७३३३३	६९२५६	७२१३६	७०५०५	७०९१६	१०
५१	६५४०८	७५६४२	६६७१८	७४४८९	६८००८	७३३१४	६९२७७	७२११६	७०५२५	७०८९६	९
५२	६५४३०	७५६२३	६६७४०	७४४७०	६८०२९	७३२९४	६९२९८	७२०९५	७०५४६	७०८७५	८
५३	६५४५२	७५६०४	६६७६२	७४४५१	६८०५१	७३२७४	६९३१९	७२०७५	७०५६७	७०८५५	७
५४	६५४७४	७५५८५	६६७८३	७४४३१	६८०७२	७३२५४	६९३४०	७२०५५	७०५८७	७०८३४	६
५५	६५४९६	७५५६६	६६८०५	७४४१२	६८०९३	७३२३४	६९३६१	७२०३५	७०६०८	७०८१३	५
५६	६५५१८	७५५४७	६६८२७	७४३९२	६८११५	७३२१५	६९३८२	७२०१५	७०६२८	७०७९३	४
५७	६५५४०	७५५२८	६६८४८	७४३७३	६८१३६	७३१९५	६९४०३	७१९९५	७०६४९	७०७७२	३
५८	६५५६२	७५५०९	६६८७०	७४३५३	६८१५७	७३१७५	६९४२४	७१९७४	७०६७०	७०७५२	२
५९	६५५८४	७५४९०	६६८९१	७४३३४	६८१७९	७३१५५	६९४४५	७१९५४	७०६९०	७०७३१	१
६०	६५६०६	७५४७१	६६९१३	७४३१४	६८२००	७३१३५	६९४६६	७१९३४	७०७११	७०७११	०
	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	स्वा.कोभु.	स्वा.भु.	क.
	४९ अंश		४८ अंश		४७ अंश		४६ अंश		४५ अंश		


کتاب کالج فورٹ ولیم
किताब कालिज फ़ोर्टविलियम
পুস্তক কালেজ ফোর্টউলিয়ম


IMPERIAL
LIBRARY